УДК 519.872

**О.Н. ДЫШЛЮК, Е.В. КОБА**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРЕНИЕМ И ПОТОКОМ РАЗНОТИПНЫХ ЗАЯВОК

**Ключевые слова:** *система массового обслуживания с повторением заявок, поток разнотипных заявок, орбита, вложенная цепь Маркова, состояния цепи, переходные вероятности.*

Задачи исследования эффективности многомасштабных систем требуют создания математических моделей с учетом стохастического характера соответствующих случайных процессов. Для моделирования реальных явлений и систем широко применяются дискретные марковские модели. Это объясняется, прежде всего, их простотой, наглядностью и возможностью выводить прозрачные аналитические выражения для нужных исследователю характеристик систем. В рамках классических моделей теории систем и сетей необходимо решать следующие задачи:

— найти условие эргодичности или стохастической ограниченности процесса обслуживания;

— вывести аналитические формулы для актуальных характеристик процесса (если это возможно);

— разработать алгоритм стохастического моделирования для достаточно общей математической схемы и методологию проверки адекватности модели.

Настоящая статья посвящена проблеме определения формул для расчета вероятностей переходов вложенной цепи Маркова для системы с повторением заявок и потоком из $s$ типов заявок.

Теория систем с повторением заявок активно начала развиваться начиная с 80-х годов XX столетия. Значительный вклад в нее внесли: В.В. Анисимов, А.Н. Дудин, В.И. Клименок, Е.В. Коба, Д.Ю. Кузнецов, Е.А. Лебедев, А.А. Назаров, Г.И. Фалин, E. Altman, J.R. Artalejo, J. Keilson, V.G. Kulkarni, L. Lakatos, N. Smith, J.G.C. Templeton, H. Young и др. [1–9]. Бурному развитию данной теории способствовала, прежде всего, разработка технологий проектирования и всеобъемлющее распространение телекоммуникационных сетей. Как следствие, математические модели реальных систем все более усложняются, поэтому важное значение при исследовании таких систем имеет вывод актуальных характеристик соответствующего случайного процесса.

**Описание системы.** Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с повторением заявок. Первичный входящий поток состоит из заявок $s$ типов. Определим состояния системы в виде

$$\bar{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_s),$$

где

$$k_0 = \begin{cases} 0, & \text{канал свободен}, \\ j, & \text{канал обслуживает заявку } j\text{-го типа } (j = 1, 2, \ldots, s). \end{cases}$$

При $1 \le j \le s$ здесь $k_j$ — число заявок $j$-го типа в канале и на орбите, $\lambda_j(\bar{k})\Delta + o(\Delta)$ — вероятность поступления (извне системы) заявки $j$-го типа в малом интервале $(t, t+\Delta)$ при условии, что в момент $t$ ее состояние есть $\bar{k}$.

Определим $B_j(x)$ как функцию распределения времени обслуживания заявки $j$-го типа.

Обозначим: $\bar{k}(t) = (k_0(t), k_1(t), \ldots, k_s(t))$ — состояние системы в момент $t$; $t_n$ — момент окончания $n$-го обслуживания; $\bar{k}_n = (0, k_{n1}, \ldots, k_{ns})$ — состояние системы в момент $t_n + o$.

Пусть $|\bar{k}_n| = k_{n1} + \ldots + k_{ns}$ и всегда $|\bar{k}_n| \le N$, где $N$ — заданное натуральное число.

Если заявка $j$-го типа не попадает в канал немедленно, она поступает на орбиту, откуда возвращается через показательное время с параметром $\theta_j > 0$.

Задача состоит в следующем: вывести формулы для вычисления стационарного распределения $p(\bar{k})$ на множестве $Y_0$ состояний вложенной цепи Маркова $(\bar{k}_n)$.

**Точные формулы.** Выпишем уравнение стационарности:

$$p(\bar{k}) = \sum_{r \in Y_0} p(\bar{r})\, p(\bar{r}, \bar{k}), \quad \bar{k} \in Y_0, \tag{1}$$

$$\sum_{\bar{k} \in Y_0} p(\bar{k}) = 1, \tag{2}$$

где $p(\bar{k})$ — стационарная вероятность состояния $\bar{k}$, $p(\bar{r}, \bar{k})$ — вероятность перехода из $\bar{r}$ в $\bar{k}$ за один шаг.

Рассмотрим состояния системы в моменты $t_{n-1} + o,\ t'_n + o,\ t_n + o$, где $t_{n-1}$ — $(n-1)$-й момент окончания обслуживания заявки, $t'_n$ — $n$-й момент начала обслуживания заявки, $t_n$ — $n$-й момент окончания ее обслуживания. Эти состояния соответственно равны $\bar{r} = (0, r_1, \ldots, r_s)$, $\bar{l} = (l_0, l_1, \ldots, l_s)$, $1 \le l_0 \le s$, $\bar{k} = (0, k_1, \ldots, k_s)$.

Обозначим: $u(\bar{r}, \bar{l})$ — вероятность перехода из состояния $\bar{r}$ в состояние $\bar{l}$; $v(\bar{l}, \bar{k})$ — вероятность перехода из состояния $\bar{l}$ в состояние $\bar{k}$.

Из описания функционирования системы имеем

$$u(\bar{r}, \bar{l}) = \begin{cases} \dfrac{r_j \theta_j}{\sum\limits_{i=1}^{s} [r_i \theta_i + \lambda_i(\bar{r})]}, & \bar{r} = (0, r_1, \ldots, r_s),\ \bar{l} = (j, r_1, \ldots, r_s),\ 1 \le j \le s, \\ \dfrac{\lambda_j(\bar{r})}{\sum\limits_{i=1}^{s} [r_i \theta_i + \lambda_i(\bar{r})]}, & \bar{r} = (0, r_1, \ldots, r_s),\ \bar{l} = (j, r_1, \ldots, r_j + 1, \ldots, r_s),\ 1 \le j \le s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Определим вероятность $v(\bar{l}, \bar{k})$ перехода системы из состояния $\bar{l}$ в состояние $\bar{k}$:

$$v(\bar{l}, \bar{k}) = \int_0^\infty dB_j(x)\, \psi(x, \bar{l}, \bar{k}), \tag{4}$$

где $\bar{l} = (j, l_1, \ldots, l_s)$, $1 \le j \le s$; $\psi(x, \bar{l}, \bar{k})$ — вероятность перехода из $\bar{l}$ в $\bar{k}$ при условии, что $t_n - t'_n = x$.

Определим вероятности $\psi(x, \bar{l}, \bar{k})$, полагая $\bar{l} = (j, l_1, \ldots, l_s)$, где $1 \le j \le s$, $l_i \ge 0$, $1 \le i \le s$, $l_j \ge 1$. При $i \in \{1, \ldots, s\}$ обозначим $\gamma_i$ число новых заявок $i$-го типа, поступивших в систему за время $x$. Тогда получим уравнения

$$k_i = l_i + \gamma_i,\ 1 \le i \le s,\ i \ne j;\ k_j = l_j + \gamma_j - 1. \tag{5}$$

Отсюда выводим необходимые условия для возможных значений $k_i$:

$$k_i \ge l_i,\ 1 \le i \le s,\ i \ne j;\ k_j \ge l_j - 1.$$

При данных $\bar{l}$ и $\bar{k}$, удовлетворяющих этим условиям, в интервале $(t'_n, t_n)$ длительности $x$ при всех $i \ne j$ должно поступить $\gamma_i = l_i - k_i$ новых заявок, а при $i = j$ — $\gamma_j = l_j - k_j + 1$ новых заявок. Вероятность данного события и есть $\psi(x, \bar{l}, \bar{k})$. Общее количество новых заявок составляет $d = |\bar{k}| - |\bar{l}| + 1$.

При $d = 0$ имеем

$$\psi(x, \bar{l}, \bar{k}) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\bar{l})\, x\right\}.$$

При $d > 0$ имеем

$$\psi(x, \bar{l}, \bar{k}) = \sum_{\Gamma} \psi_{\Gamma}(x, \bar{l}, \bar{k}), \tag{6}$$

где $\Gamma$ — всевозможные цепочки $(i_1, \ldots, i_d)$, составленные из чисел $1, 2, \ldots, s$ и удовлетворяющие следующим условиям.

Рассмотрим состояние $\bar{l} = (j, l_1, \ldots, l_s)$. Рекуррентно определим $\bar{l}_m$, $1 \le m \le d$, где $\bar{l}_1 = \bar{l} + \bar{e}(i_1)$ (здесь и далее $\bar{e}(n)$ — вектор с единицей на $n$-м месте и остальными нулями);

$$\bar{l}_m = \bar{l}_{m-1} + \bar{e}(i_m),\ 2 \le m \le d;\ \bar{k} + \bar{e}(j) = \bar{l}_d.$$

Тогда

$$\psi_{\Gamma}(x, \bar{l}, \bar{k}) = \lambda_{i_1}(\bar{l})\lambda_{i_2}(\bar{l}_1)\ldots\lambda_{i_d}(\bar{l}_{d-1}) \times$$
$$\times \int\limits_{0<x_1<\ldots<x_d<x} \ldots \int \exp\{-[\lambda(\bar{l})x_1 + \lambda(\bar{l}_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \lambda(\bar{l}_d)(x - x_2)]\}\, dx_1 \ldots dx_d, \tag{7}$$

где $\lambda(\bar{l}) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(\bar{l})$.

**Окончательная формула для переходных вероятностей.** Выпишем окончательную формулу:

$$p(\bar{r}, \bar{k}) = \sum_{\bar{l}} u(\bar{r}, \bar{l})\, v(\bar{l}, \bar{k}), \tag{8}$$

где $\bar{r} = (0, r_1, \ldots, r_s)$, $\bar{k} = (0, k_1, \ldots, k_s)$, $\bar{l} = (j, l_1, \ldots, l_s)$, $j \in \{1, \ldots, s\}$. Вероятности, входящие в правую часть формулы (8), определяются формулами (3), (4), (6), (7). Вычислив $p(\bar{r}, \bar{k})$, остается найти решение системы уравнений (1), (2) для определения стационарных вероятностей $p(\bar{k})$ состояний вложенной цепи Маркова.

**Приближенные формулы.** Вычисления значительно упрощаются, если в интегралах (7) использовать двустороннюю оценку подынтегральной функции на основании неравенств $1 - \alpha < \exp\{-\alpha\} < 1$, где $\alpha$ — выражение в квадратных скобках. Так, при $d = 1$ интегральный сомножитель правой части формулы (7) оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{0<x_1<x} (1 - \lambda(\bar{l})x_1 - \lambda(\bar{l}_1)(x - x_1))\, dx_1 <$$
$$< \int\limits_{0<x_1<x} \exp\{-[\lambda(\bar{l})x_1 + \lambda(\bar{l}_1)(x - x_1)]\}\, dx_1 < \int\limits_{0<x_1<x} dx_1.$$

После несложных вычислений находим двустороннюю оценку

$$x - (\lambda(\bar{l}) + \lambda(\bar{l}_1))\frac{x^2}{2} < \int\limits_{0<x_1<x} \exp\{-[\lambda(\bar{l})x_1 + \lambda(\bar{l}_1)(x - x_1)]\}dx_1 < x.$$

Предположим теперь, что $\psi(x, \bar{l}, \bar{k})$ допускает двустороннюю оценку

$$f\left(x-\lambda \frac{x^2}{2}\right) < \psi(x, \bar{l}, \bar{k}) < fx,$$

где $\lambda$ — малый параметр, $f$ — некоторая функция. По формуле (4) получим

$$f\tau_j - \lambda \frac{\alpha_{j2}}{2} < \upsilon(\bar{l}, \bar{k}) < f\tau_j,$$

где $\tau_j = \int_0^\infty x dB_j(x)$, $\alpha_{j2} = \int_0^\infty x^2 dB_j(x)$.

При условии

$$\lambda \frac{\alpha_{j2}}{\tau_j} \to 0 \tag{9}$$

нижняя и верхняя оценки $\upsilon(\bar{l}, \bar{k})$ асимптотически сближаются. Условие (9) можно интерпретировать как малую вероятность поступления двух или более заявок за время обслуживания одной заявки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Dudin A., Klimenok V. A retrial $BMAP/G/1$ system with linear repeated requests // Queueing Systems. — 2000. — **34**. — P. 222–227.
2. Falin G. A survey of retrial queues // Ibid. — 1990. — **41**, N 7. — P. 127–167.
3. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. — London: Chapmen & Hall, 1997. — 295 p.
4. Koba E.V. On a $GI/G/1$ retrial queueing system with a FIFO queueing discipline // Theory of Stochastic Processes. — 2002. — **24**, N 8. — P. 201–207.
5. Kulkarni V.G. On queueing systems with retrials // J. Appl. Prob. — 1985. — **20**. — P. 380–389.
6. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queueing // Queueing Systems. — 1987. — N 3. — P. 201–233.
7. Анисимов В.В., Куртулуш М. Некоторые марковские модели обслуживания с повторными вызовами в условиях малой загрузки // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 110–126.
8. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Адаптивные сети случайного множественного доступа. — Томск: Дельтаплан, 2003. — 253 с.
9. Лакатош Л. Системы с циклическим ожиданием // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 144–151.


*Поступила 15.12.2011*