УДК 681.3.06

Г.С. ТЕСЛЕР, Р.В. ГЕЛЕМБ'ЮК

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ В РЯДИ НЕВ'ЯЗОК

Abstract: *In the paper we proposed the new means of solving ordinary differential equations using function expansion with residuals series method. The algorithm of its practice using is given. The comparative analysis of an investigated method with existing methods for the numerical solving of the differential equations is executed, in particular the Taylor series method. The attention is concentrated on the stiff differential equations and systems. Prospects of the further researches in sphere of using function expansion with the residual series method for the solving of differential equations are analysed.*
Key words: *numerical methods, stiff differential equations, series expansion, residual expansion.*

Анотація: *У статті запропоновано новий спосіб розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу розвинення функції в ряд нев'язок. Описано алгоритм його практичного застосування. Здійснено порівняльний аналіз досліджуваного методу з існуючими методами чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, зокрема, методом рядів Тейлора. Увагу сконцентровано на жорстких диференціальних рівняннях та системах. Проаналізовано перспективи подальшого дослідження у сфері застосування методу розвинення функцій за нев'язками до розв'язування диференціальних рівнянь.*
Ключові слова: *чисельні методи, жорсткі диференціальні рівняння, розвинення в ряди, розвинення за нев'язками.*

Аннотация: *В статье предложен новый способ решения обычных дифференциальных уравнений с использованием метода разложения функции в ряд невязок. Рассмотрен алгоритм его практического использования. Выполнен сравнительный анализ исследуемого метода с существующими методами численного решения дифференциальных уравнений, в частности, методом рядов Тейлора. Внимание сконцентрировано на жестких дифференциальных уравнениях и системах. Проанализированы перспективы дальнейших исследований в сфере использования метода разложения функций по невязкам для решения дифференциальных уравнений.*
Ключевые слова: *численные методы, жесткие дифференциальные уравнения, разложение в ряд, разложение по невязкам.*

1. Вступ

Методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ДР), включаючи і жорсткі системи ДР, займають важливе місце серед чисельних методів, які входять у математичне забезпечення сучасних комп'ютерів для вирішення наукових та інженерних задач.

Серед методів для наближеного інтегрування ДР гідне місце займають методи, які використовують розвинення функції в ряд Тейлора. Вперше такий підхід для вирішення ДР запропонував Леонард Ейлер (1707-1783). У сучасній математиці такі підходи використовували Адамс Е., Мур Р., Ралл Л., Лохнер Р., Ейгенрам П. і багато інших.

Похибка цього методу залежить від радіуса збіжності в ряду Тейлора та величини значень $x - x_0$, а також кількості членів розкладу (відрізку виття) в ряд Тейлора.

Крім розвинення в ряд Тейлора, для вирішення ДР використовують розвинення в ланцюгові дроби різного виду. Також застосовуються дробово-раціональні наближення, двоточкова формула Тейлора, розклад у ланцюгові дроби, методи табулювання, сегментної апроксимації функцій та ін. У деяких підходах використовують як базовий метод розвинення в ряд Тейлора, але завдяки використанню нев'язки стає можливим використання початкового наближення шуканої функції на заданому інтервалі, що дозволяє збільшити радіус збіжності та скоротити число використаних членів ряду для досягнення необхідної точності. Крім того, цей метод дозволяє також будувати ітераційні формули високого порядку збіжності та формули табулювання функцій, що дуже важливо при інтегруванні ДР тому, що стає можливим додатково скоротити час знаходження розв'язку.

Подальший розвиток цього підходу оснований на розширенні використання спектра базових методів (двоточкова формула Тейлора, дробово-раціональні наближення, розклад у ланцюгові дроби, методи табулювання, сегментної апроксимації функцій і багато ін.) [3–6].

Треба відмітити, що розвинення функцій за нев'язками взагалі, включаючи розвинення функцій в ряд, у багатьох випадках дозволяє знаходити розв'язок ДР тоді, коли він має особливі точки в дійсній або комплексній площині на відрізку інтегрування.

Однак до останнього часу розвинення функцій за нев'язками в більшості випадків використовувались для обчислення елементарних і спеціальних (математичних) функцій на комп'ютерах, створення породжуючих алгоритмів і на їх основі відтворення нового типу баз знань. Хоч для вищезазначених цілей розглядалися функції в основному однієї змінної, такий підхід може бути розширений на клас функцій багатьох змінних. Вищезгадане показує, що розвинення функцій за нев'язками може стати потужним інструментом для інтегрування ДР різного виду наближеними чисельно-аналітичними методами.

У даній роботі вперше показано, як можна застосовувати розвинення функцій за нев'язками для вирішення ДР. При цьому спеціально вибрано клас найбільш важких для вирішення жорстких ДР. У подальших роботах автори будуть намагатися розширити спектр розвинення функцій за нев'язками для розв'язування ДР за рахунок використання дробово-раціональних наближень, методів розвинення в ланцюгові дроби, апроксимації сплайнами тощо.

Зазначимо, що за допомогою жорстких ДР зображуються процеси, які описують управління динамічними об'єктами, процеси, які виникають в електричних мережах, хімічні реакції, біологічні процеси тощо.

Отже, розв'язання жорстких задач важливо не тільки для теорії, але й для практики.

Що являє собою жорсткість ДР? Вона, насамперед, виявляється в тому, що при чисельному інтегруванні ДР для скорочення часу Її розв'язування немає можливості збільшити крок інтегрування, бо значно зростає похибка розв'язку, а це не дозволяє досягти необхідної точності. Тому у звичайних методах наближеного розв'язування жорстких ДР використовують обмеження зверху для кроку інтегрування.

Неформально жорсткість ДР n-го порядку або системи n ДР першого порядку рівнозначна тому, що ДР має n сталих часу, які можуть значно розрізнятися між собою або коли одна із сталих часу достатньо мала у порівнянні з загальним інтервалом часу розв'язування ДР.

Більш детально з особливостями і методами розв'язування жорстких ДР можна ознайомитися у роботах [7-11].

2. Постановка задачі

Розв'язування ДР за допомогою розкладу його розв'язку в ряд Тейлора у класичній постановці виглядає таким чином.

Рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ наближається частковою сумою ряду Тейлора

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k .$$

Похідні виражаються через $f(x,y)$ і її похідні у вигляді

$$y'=f(x,y), y''=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)y',$$
$$y'''=f''_{xx}(x,y)+2f''_{xy}(x,y)y'+f''_{yy}(x,y)(y')^2+f'_y(x,y)y'' \ \ і \ т.д.$$

При цьому робимо підстановки $x=x_0; y=y_0$ у ДР і похідні.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \quad (1)$$

Розв'язки таких рівнянь не завжди виражаються через елементарні функції, а інтегрування такого рівняння рідко зводиться до квадратур.

Найпоширенішим прийомом інтегрування вказаних рівнянь є зображення шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду.

Коротко опишемо цей метод (метод Фробеніуса) [14].

Нехай коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$ є аналітичними функціями на відрізку $|x-x_0|<a$, тобто розвиваються у степеневі ряди $p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k, q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k$, які збігаються при $|x-x_0|<a$.

Теорема. Якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ є аналітичними функціями на відрізку $|x-x_0|<a$, то всякий розв'язок рівняння (1) є аналітичним на відрізку $|x-x_0|<a$, тобто розкладається у степеневий ряд

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k, \quad (1)$$

який збігається при $|x-x_0|<a$.

Коефіцієнти $c_0,c_1,c_2,...$ можна відшукати методом невизначених коефіцієнтів з виразу

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k(x-x_0)^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}p_k(x-x_0)^k\sum_{k=1}^{\infty}kc_k(x-x_0)^{k-1}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}q_k(x-x_0)^k\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k=0.$$

Залишимо у виразі (1) перші m членів. Відповідно і розвинення функцій $p(x),q(x)$ будуть скорочені до многочленів ступеня m.

Коефіцієнти c_o,c_1 визначаються із початкових даних задачі Коші, а $c_2,c_3,....$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} q_0c_0 + p_0c_1 + 1\bullet 2c_2 = 0 \\ q_1c_0 + (q_0 + p_1)c_1 + 2p_0c_2 + 2\bullet 3c_3 = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{m}[q_{m-i}c_i + (i+1)p_{m-i}c_{i+1}] + (m+1)(m+2)c_{m+2} = 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Для представлення функцій $p(x)$ та $q(x)$ у вигляді ряду використовується розвинення в ряд Тейлора. На практиці цей метод не є ефективним, оскільки дає достатньо точне наближення розв'язку лише в малому околі точки x_0.

Ми спробуємо замінити ряди Тейлора функцій $p(x), q(x)$ на їх степеневі розвинення за нев'язками. Оскільки правильно вибране розвинення за нев'язками краще наближає функцію на відрізку, то можна сподіватися, що і наближення розв'язку $y = y(x)$ також буде точнішим.

Проте в більшості випадків розвинення функцій $p(x), q(x)$ в ряди за нев'язками є досить громіздким процесом. Отже доцільніше буде розглядати ці функції як суперпозиції елементарних функцій, для кожної з яких можна вибрати нев'язку зручного вигляду.

3. Розвинення за нев'язками

Розглянемо загальну методику розвинення функцій за нев'язками [1–7]. Нехай функція $y = f(x)$ визначена для $x \in [a,b]$. Представимо її у неявному вигляді $F(x, f(x)) = 0$. Замінимо у виразі $F(x, f(x))$ функцію $f(x)$ її наближеним значенням y_0. Тоді цей вираз буде відмінним від нуля та рівний нев'язці $z_0 = F(x, y_0)$.

Значення нев'язки для $x \in [a,b]$ при y_0, достатньо близькому до $f(x)$, буде достатньо мале для функцій, які є аналітичними в деякому околі точки x_0 (яка відповідає значенню y_0), тобто $\lim\limits_{y_0 \to f(x_0)} z_0 = 0$.

В такому разі розвинення в ряд Тейлора – Маклорена за нев'язками z_0 може виявитись досить ефективним для різних застосувань.

З рівняння нев'язки визначимо x у явному вигляді: $x = \phi(y_0, z_0)$ (припускаємо, що це можливо). Далі розвинемо функцію $y = f(x) = f(\phi(y_0, z_0))$ у ряд Тейлора за степенями z_0 або у ланцюговий дріб від z_0. Одержане розвинення і є розвиненням функції в ряд $y = f(x)$ за нев'язками.

Описаний спосіб розвинення функції в ряд дає її краще наближення на відрізку, ніж ряд Тейлора. Як відомо, наближення функції $n-$ною частинною сумою ряду Тейлора дає найкраще наближення функції в точці x_0. Для отримання найкращих наближень на заданому відрізку існують спеціальні методи. Розвинення в ряди за нев'язками займає проміжне положення між цими двома класами наближень і володіє цілою низкою особливостей.

Розвинення такого типу може міняти швидкість наближення залежно від обраного початкового наближення. Характерним для розвинення в ряди нев'язок є те, що додавання нових членів розвинення виконується без перерахунку решти коефіцієнтів, оскільки це необхідно робити у випадках найкращих рівномірних наближень.

Наближення функцій, що грунтується на розвиненні за нев'язками, включає декілька характерних етапів: вибір виду нев'язки, вибір початкового наближення, що забезпечує необхідну точність, вибір відповідної кількості членів ряду розвинення для забезпечення необхідної точності [16].

Наводимо приклади розвинення в ряд за нев'язками деяких елементарних функцій.

Функція	Нев'язка	Розвинення
$(1+x)^n$	$z_0 = 1-(1+x)y_0^{-\frac{1}{n}}$	$f(x) = y_0(1+z_0)^n = y_0(1-nz_0+\frac{n(n-1)}{2!}z_0{}^2-...)$
x^α	$z_0 = \frac{x}{y_0^{\frac{1}{\alpha}}}-1$	$f(x) = y_0(z_0+1)^\alpha = y_0(1+\alpha z_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z_0{}^2+$ $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}z_0{}^3+...)$
$\ln x$	$z_0 = 1-\frac{x}{e^{y_0}}$	$f(x) = y_0+\ln(1-z_0) = y_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_0{}^k}{k}$
$\sin x$	$z_0 = \arcsin y_0 - x$	$f(x) = y_0(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z_0{}^{2k}}{(2k)!}-\sqrt{1-y_0{}^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z_0{}^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos x$	$z_0 = \arccos y_0 - x$	$f(x) = y_0(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z_0{}^{2k}}{(2k)!})-\sqrt{1-y_0{}^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z_0{}^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Також зручні розвинення в степеневий ряд виписуються для функцій $\sqrt[n]{x}, \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, \frac{1}{x}, a^x, \arcsin x$ та інших елементарних і спеціальних функцій.

Наступна таблиця демонструє ефективність застосування розвинення за нев'язками для наближення деяких функцій.

Таблиця

Функція		$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$\ln(x)$	$\arcsin(x)$
Порядок розкладу в ряд	Тейлора	9	8	11	7
	Нев'язок	3	7	7	3
Інтервал		[.5,5]	[1.1, 6]	[1.1,5]	[-0.9,0.9]
Значення у правій крайній точці	Точне	.2	.9601702867	1.609437912	-1.4292568
	Тейлора	-697356880	5.044455179	77247.27564	-242167769
	Нев'язок	-1312.	1.30578246	759.7302275	.99
Похибка	Тейлора	697356880.2	4.084284892	77245.66620	242167768.3
	Нев'язок	1312.2	.3456121733	758.1207896	2.419256853

Розвинення в ряд виконувалось в околі лівої крайньої точки інтервалу. Початкове наближення для розвинення за нев'язкою – значення оберненої функції в лівій крайній точці інтервалу.

Примітка. Для функції $\arcsin(x)$ розвинення виконано в околі правої крайньої точки, а значення взято в лівій крайній точці.

4. Алгоритм використання методу

Розв'язки системи (2) залежать від параметрів c_0, c_1. Зафіксувавши їх, знайдемо наближений розв'язок рівняння (1), що задовольняє деякі початкові умови, тобто задачу Коші:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad ,$$
$$y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1 \quad .$$

Найпростіший алгоритм обчислення значення функції $y = y(x)$ в точці x відбувається за наступним алгоритмом (явний метод наближення рядами).

Ініціалізація.

Цикл для кожного кроку наближення.

Передбачення початкового кроку.

Цикл.

Генерація коефіцієнтів $c_2, c_3, c_4, \ldots$ в точці x_i.

Обчислення $y_{i+1} = \sum_{k=0}^{m} c_k (x_{i+1} - x_i)^k$, де $c_0 = y_i, c_1 = y_0'$.

Визначення похибки.

Зменшення кроку або вихід із циклу.

У досконалішому варіанті вводиться ще один крок – коректування отриманого результату y_{i+1}.

5. Визначення похибки та коректор

Для обчислення локальної похибки застосуємо екстраполяцію Річардсона [15].

Ряд $\sum_{k=0}^{m} c_k (x - x_i)^k$ використаємо для визначення наближеного значення y_{i+1} розв'язку $y(x)$ в точці $x_{i+1} = x_i + \tau$. Також обчислимо наближені значення $y_{i+\frac{1}{2}}$ та $y'_{i+\frac{1}{2}}$ в точці $x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2}$. Після чого визначимо коефіцієнти $\dot{c}_2, \dot{c}_3, \dot{c}_4, \ldots$ в точці $x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2}$. Отриманий ряд $\sum_{k=0}^{m} \dot{c}_k (x - (x_i + \frac{\tau}{2}))^k$ дає можливість обчислити значення $\dot{y}_{i+1}$ в точці $x_{i+1} = x_i + \tau$.

Обидві отримані величини y_{i+1} та $\dot{y}_{i+1}$ є наближеними значеннями $y(x)$ в точці x_{i+1}.

Похибка обчислення в точці y_{i+1} є локальною похибкою в точці x_{i+1}. А похибка обчислення $\dot{y}_{i+1}$ складається з перенесеної локальної похибки при обчисленні $y_{i+\frac{1}{2}}$ в точці $x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2}$ та локальної похибки обчислення $\dot{y}_{i+1}$ в точці x_{i+1}.

Тобто

$$y(x+\tau) = y_{i+1} + e + O(\tau^{m+1});$$

$$y(x+\tau) = \dot{y}_{i+1} + E(\frac{\tau}{2}),$$

де $E(\frac{t}{2})$ – глобальна похибка методу з кроком $\frac{\tau}{2}$.

Після деяких обчислень [15] отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_{i+1} + e; \\ \tilde{y}_{i+1} = \dot{y}_{i+1} + \dfrac{e}{2^{m-1}}. \end{cases}$$

З якої легко визначити локальну похибку, а також наближене значення $\tilde{y}_{i+1}$ функції $y(x)$, точність якого на порядок вища за y_{i+1}.

$$e = \frac{2^{m-1}}{2^{m-1}-1}(\dot{y}_{i+1} - y_{i+1}),$$

$$\tilde{y}_{i+1} = \dot{y}_{i+1} + \frac{(\dot{y}_{i+1} - y_{i+1})}{2^{m-1}-1}.$$

6. Практична реалізація

Для застосування описаної процедури на практиці було створено бібліотеку функцій для пакета комп'ютерної алгебри Maple8.

Для тестів було вибрано набір задач Коші з наперед відомими розв'язками. Це дало змогу порівняти отримані за допомогою вказаного методу наближені розв'язки із розв'язками цієї ж задачі, одержаними з використанням інших методів. Серед переліку тестових задач були також і жорсткі задачі.

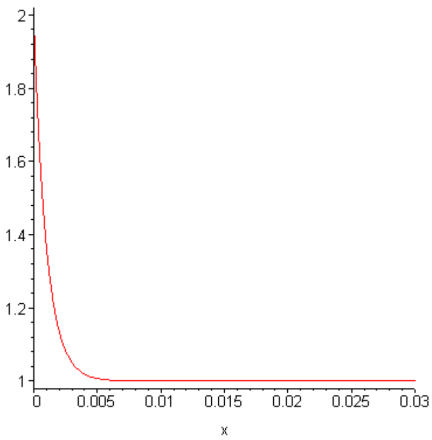
Наведемо приклад розв'язування задачі Коші:

$$\begin{aligned} &(1000\cos x - \sin x)y'' + (100001\cos x)y' + 1000(\cos x + 1000\sin x)y = 0; \\ &y(0) = 2, y'(0) = -1000. \end{aligned} \quad (3)$$

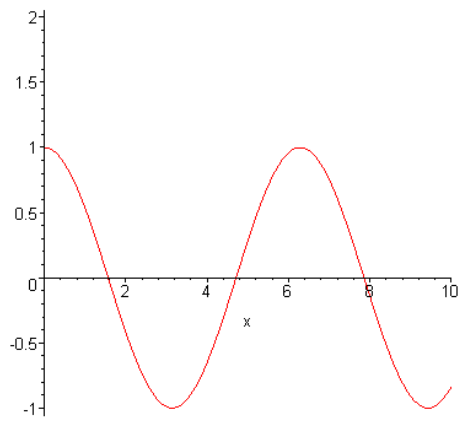
Розв'язок цієї задачі:

$$y(x) = \cos x + e^{-1000x}.$$

Другий доданок правої частини виразу суттєво впливає на значення розв'язку лише на початку інтервалу $[0,\infty)$. Тобто, задача (3) є жорсткою (це можна легко показати і точнішими методами).



Графік 1. Розв'язок задачі (4)



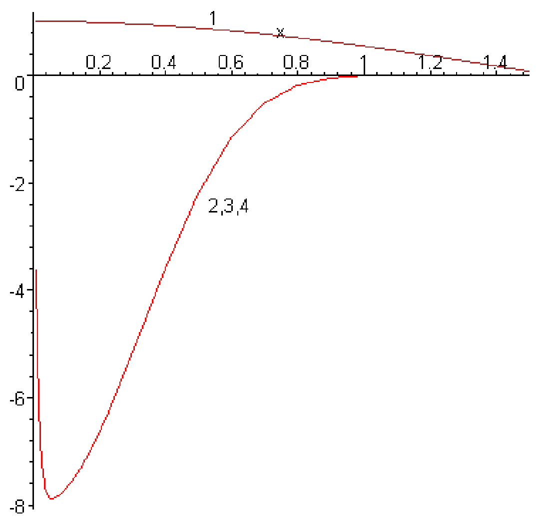
Графік 2. Розв'язок задачі (4)

На графіках 1 та 2 зображено розв'язок задачі (3) на інтервалах [0,0.03] та [0,10] відповідно.

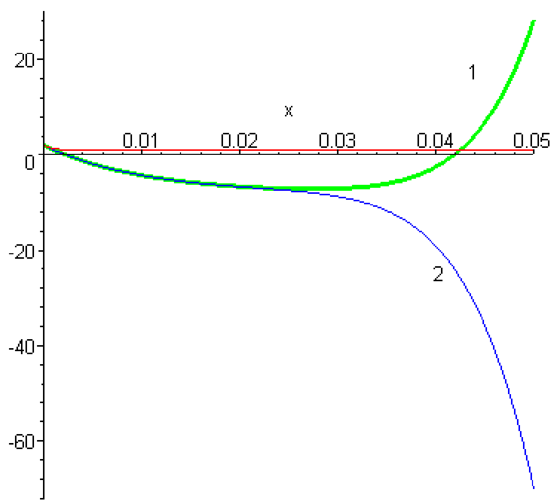
При розв'язуванні задачі (3) стандартними методами пакета Maple8 як розв'язок пропонується процедура, що обчислює значення функції в конкретній точці методом Розенброка.

У процесі порівняння розв'язків отриманих вбудованими процедурами математичного пакета та відповідними розв'язками, отриманими процедурами, які є реалізацією описаних вище методів рядів Тейлора та рядів нев'язок, були отримані очікувані результати. Тобто, застосування розвинення в ряди за нев'язками має кращі апроксимаційні властивості, ніж ряд Тейлора.

При використанні методу рядів Тейлора на відрізку $[0, 2]$ потрібна точність була досягнута на 51 кроці. Для рядів нев'язок достатньо було 32 кроки. Порядок часткової суми в обох випадках – 6.



Графік 3. Розв'язок задачі (4)



Графік 4. Наближення частковими сумами

На графіку 3 зображено точний розв'язок задачі (3) (крива 1) та наближені розв'язки, отримані трьома методами наближення. Криві 2, 3, 4 злилися в одну. Значення наближених розв'язків практично не відрізняються. Графік 4 демонструє наближення частковими сумами в околі 0. Крива 1 – наближення методом нев'язок, крива 2 – методом рядів Тейлора.

Також добрі результати були отримані для жорстких диференціальних систем.

Як приклад розглянемо систему

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{z}, & y(0) = 10 \\ z' = \dfrac{x}{y}, & z(0) = \dfrac{1}{20} \end{cases}, \text{ її точний розв'язок } \begin{cases} y = e^{10x^2} \\ z = \dfrac{1}{20} e^{-10x^2} \end{cases}.$$

Наближення, отримане методом рядів Тейлора в околі 0 в точці 0,2, дало похибку 7488,259 для $y(x)$ та 1658 для $z(x)$, а методом рядів нев'язок 0,003 для $y(x)$ та 0,33 для $z(x)$. В обох випадках порядок часткової суми рівний 6.

7. Висновки

Одержані практичні результати демонструють значний потенціал розвинення в ряди за нев'язками для застосування у процесі наближення розв'язків диференціальних рівнянь (в тому числі і жорстких ДР). Крім цього, технологія розвинення за нев'язками пропонує зручні методи наближення функцій підхідними дробами, які характеризуються кращим наближенням, ніж ряди. Подальше дослідження означеного питання пов'язано з розширенням спектру базових методів розвинення за нев'язками і класів диференціальних рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теслер Г.С. Вычисление некоторых элементарных функций на ЦВМ // Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса: Сб. научных трудов института кибернетики. – Киев, 1967.– Вып. 2. – С. 91–110.
2. Теслер Г.С. Способы вычисления некоторого класса функций на ЦВМ // Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса: Сб. научных трудов института кибернетики. – Киев, 1967. – Вып. 2. – С. 11–12.
3. Благовещенский Ю.В., Теслер Г.С. Вычисление элементарных функций на ЭВМ. – Киев: Техника, 1977. – 208 с.
4. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – К.: Наукова думка, 1980. – 352 с.
5. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций на ЭВМ: Справочник. – К.: Наукова думка, 1984. – 600 с.
6. Теслер Г.С. Новая кибернетика. – Киев: Логос, 2004. – 404 с.
7. Gear C.W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations // Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. – 1971. – 253 p.
8. Hall G., Watt J. Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. – Oxford, England: Clarendon Press, 1976. – 336 p.
9. Barton D. On Taylor Series and Stiff Equations // Transactions on Mathematical Software. – 1980. Vol. 6, N 3.
10. Barton D., Willers I.M., Zahar R.V.M. The Automatic Solution of Systems of Ordinary Differential Equations by the Method of Taylor Series // Comput. – 1971. – Vol. 14(3).
11. Corliss G., Kirlinger G. On implicit taylor series methods for stiff ODEs. CRPC-TR91251. – 1991.
12. Sundnes J., Lines G.T., Tveito A. ODE-solvers for a Stiff System Arising in the Modeling of the Electrical Activity of the Heart // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2003. – Vol. 4, N1.
13. Verwer J.G., Blom J.G. A comparison of stiff ODE solvers for atmospheric chemistry problems. NM-R9505. – 1995.
14. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – К.: Вища школа, 1984. – 406 с.
15. Акмеров Р.Р. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений http://www.ict.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/index.html.
16. Попов Б.О. Розв'язування математичних задач у системі комп'ютерної алгебри MapleV. – К.: Vip, 2001. – 306 с.