УДК 519.854

**В.А. МИХАЙЛЮК**

# РЕОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ *k*-ПОКРЫТИИ: ПОРОГ ОТНОШЕНИЯ АППРОКСИМАЦИИ

**Ключевые слова:** *реоптимизация*, *r-приближенный алгоритм*.

## ВВЕДЕНИЕ

Существует большое количество проблем в дискретной оптимизации, и нахождение их решения является важным в различных приложениях. К сожалению, большинство этих проблем вычислительно труднорешаемы, и используются различные подходы (эвристики, приближенные алгоритмы, рандомизация) для получения хороших (не обязательно оптимальных) решений. Однако нет никакой гарантии в качестве полученных приближенных решений или в эффективности применяемого алгоритма. Один из подходов, предложенных в настоящее время, — не рассматривать конкретные экземпляры проблем как изолированные задания, а использовать накопленный вычислительный опыт нахождения решения других экземпляров, отличных от исходных. Предлагается не начинать с нуля, оперируя проблемой, а эффективно использовать предварительные знания о подобных экземплярах проблем, если они доступны. Казалось бы, что таких предварительных знаний не должно быть, поскольку начальные данные для проблем рассматриваются изолированно. Однако в действительности подобные знания могут оказаться доступными, если экземпляры проблем появляются как некоторые локальные модификации предыдущих экземпляров. Тогда возникает вопрос: можно ли, исходя из оптимального решения экземпляра проблемы (или близкого к нему), использовать эту информацию для нахождения оптимального (или близкого к нему) решения экземпляра проблемы, полученного в результате незначительных локальных модификаций первоначального экземпляра. Данный подход, названный реоптимизацией [1–7], позволяет в некоторых случаях получить лучшее качество приближенного решения (которое определяется как отношение значения приближенного решения к точному) в локально модифицированных экземплярах, чем в первоначальных. Например, при вставке (удалении) элемента в множество задача о покрытии множествами реоптимизирована с отношением $\left(2-\frac{1}{\ln m+1}\right)$, где $m$ — число элементов множества [8]. Жадный алгоритм дает качество приближения $\ln m+1$. При любом $m>1$ имеем $2-\frac{1}{\ln m+1}<\ln m+1$, т.е. лучшее качество приближения.

В настоящей статье данная проблема относится к задаче о максимальном $k$-покрытии. Считают, что для проблемы $\Pi$ установлена верхняя оценка отношения аппроксимации $C$, если существует полиномиальный $C$-приближенный алгоритм решения $\Pi$, и установлена нижняя оценка отношения аппроксимации $c$, если для произвольного $\varepsilon>0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма для $\Pi$, на котором достигается отношение аппроксимации $c+\varepsilon>0$. Если $C=c$, то для проблемы $\Pi$ установлен порог отношения аппроксимации.

Для некоторых проблем удалось установить порог отношения аппроксимации, например для задачи о покрытии множествами установлен порог $\ln n$ [12].

Недостаточно исследованной является проблема установления порогов отношения аппроксимации для реоптимизационных версий $NP$-трудных задач. В данной работе эта проблема изучается для реоптимизации задачи о максимальном $k$-покрытии. Получены следующие результаты.

Для произвольного $\varepsilon>0$ при вставке (удалении) элемента в множество, задача о максимальном $k$-покрытии не может быть реоптимизирована с отношением

$1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon$, если $NP \not\subset TIME(m^{O(\log\log m)})$. Ниже представлен алгоритм реоптимизации, на котором достигается отношение аппроксимации $1-\frac{1}{e+1}$. Таким образом, для реоптимизации задачи о максимальном $k$-покрытии при вставке (удалении) элемента в множество получен порог отношения аппроксимации, равный $1-\frac{1}{e+1}$.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМАХ И АППРОКСИМАЦИОННЫХ КЛАССАХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Приведем некоторые необходимые обозначения для дальнейшего изложения [7].

**Определение 1** [7]. $NP$-оптимизационная проблема ($NPO$-проблема) $\Pi$ определяется как четверка $(E, \mathrm{Sol}, m, \mathrm{opt})$ такая, что:

— $E$ является множеством экземпляров $\Pi$, распознаваемым за полиномиальное время;

— для данного $I \in E$ $\mathrm{Sol}(I)$ — множество допустимых решений $I$; для каждого $S \in \mathrm{Sol}(I)$ $|S|$ (размер $S$) полиномиален по $|I|$ (размер $I$); для любого данного $I$ за полиномиальное время можно определить $S \in \mathrm{Sol}(I)$;

— для данных $I \in E$ и $S \in \mathrm{Sol}(I)$ $m(I, S)$ обозначает значение (числовое) $S$; $m$ полиномиально вычислима и обычно называется целевой функцией;

— $\mathrm{opt} \in \{\min, \max\}$ — тип оптимизационной проблемы.

Для данной $NPO$-проблемы $\Pi = \{E, \mathrm{Sol}, m, \mathrm{opt}\}$ оптимальное решение экземпляра $I$ с $\Pi$ будем обозначать $S^*(I)$, а его величину $m(I, S^*(I))$ — как $\mathrm{opt}(I)$.

**Определение 2** [7]. Для данной $NPO$-проблемы $\Pi = (E, \mathrm{Sol}, m, \mathrm{opt})$ приближенный (аппроксимационный) алгоритм $A$ — это алгоритм, который для данного экземпляра $I$ с $\Pi$ выдает допустимое решение $S \in \mathrm{Sol}(I)$.

Если $A$ выполняется за полиномиальное время по $|I|$, то $A$ называется полиномиальным приближенным алгоритмом для $\Pi$.

Качество приближенного алгоритма обычно оценивается как отношение $\rho_A(I)$ (аппроксимационное отношение) между значением приближенного решения $m(I, A(I))$ и значением оптимального решения $\mathrm{opt}(I)$. Таким образом, для минимизационных проблем аппроксимационное отношение находится в пределе $[1, \infty)$, для максимизационных проблем — в пределе $[0, 1]$.

Относительно качества приближенных алгоритмов $NPO$-проблемы классифицируют следующим образом.

**Определение 3** [7]. $NPO$-проблема $\Pi$ принадлежит классу APX, если существуют полиномиально приближенный алгоритм $A$ и рациональное число $r$ такие, что для данного $I$ с $\Pi$ имеем $\rho_A(I) \le r$ (для максимизационных $\rho_A(I) \ge r$), если $\Pi$ — минимизационная (соответственно максимизационная) проблема. В этом случае $A$ называется $r$-приближенным (аппроксимационным) алгоритмом (а проблема $\Pi$ $r$-аппроксимируема алгоритмом $A$).

Примерами комбинаторных оптимизационных проблем, принадлежащих классу APX являются реоптимизации Max Weighted Sat, Min Vertex Cover, Min TSP. Для отдельных проблем из класса APX можно ввести более сильную форму аппроксимационности.

В таких проблемах для любого данного рационального $r > 1$ (или $r \in (0, 1)$ для максимизационных проблем) существуют алгоритм $A_r$ и подходящий полином $p$ такие, что $A_r$ – $r$-аппроксимационный (приближенный) алгоритм со временем, измеряемым как $p$ по $|I|$. Семейство алгоритмов $A_r$ (параметризованное с помощью $r$) называется полиномиальной приближенной схемой (PTAS — Polynomial Time Approximation Scheme).

**Определение 4** [7]. $NPO$-проблема $\Pi$ принадлежит классу PTAS, если для любого данного рационального $r > 1$ ($r \in (0, 1)$) и любого экземпляра $I$ с $\Pi$ существует полиномиальная приближенная схема $A_r$ такая, что $\rho_{A_r}(I) \le r$ (соответственно $\rho_{A_r}(I) \ge r$), если $\Pi$ — минимизационная (соответственно максимизационная) проблема.

Заметим, что в определении PTAS время алгоритма $A_r$ полиномиально относительно размера входа, однако оно может быть экспоненциально относительно $r-1$. Лучшая ситуация возникает, когда время выполнения полиномиально как по размеру входа, так и относительно $r-1$ ($1-r$ для максимизационных проблем). В этом случае алгоритм называется полностью полиномиальной приближенной схемой (FPTAS — Fully Polynomial Time Approximation Scheme).

**Определение 5** [7]. *NPO*-проблема принадлежит классу FPTAS, если она допускает полностью полиномиальную приближенную схему.

Если $P \neq NP$, то имеет место включение FPTAS $\subset$ PTAS $\subset$ APX $\subset$ NPO.

### ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ *k*-ПОКРЫТИИ

Пусть $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество точек, $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — семейство подмножеств множества $S$. Максимальное $k$-покрытие является проблемой выбора $k$ подмножеств из $F$ таких, что их объединение содержит максимальное число точек (имеет максимальную мощность). Эта проблема является *NP*-трудной [12].

Считают, что полиномиальный алгоритм конструктивно приближает (аппроксимирует) максимальное $k$-покрытие с отношением $\delta < 1$, если для произвольного входа число точек, покрываемых $k$-множествами и выбранных алгоритмом, есть не менее чем $\delta$ — часть числа точек, покрываемых оптимальным решением. Под жадным алгоритмом для задачи о максимальном $k$-покрытии понимают итеративный процесс выбора множеств, которые покрывают наибольшее число еще не покрытых точек. Имеет место теорема.

**Теорема 1** [12]. Жадный алгоритм конструктивно аппроксимирует максимальное $k$-покрытие с отношением, не меньшим $1-\frac{1}{e} \approx 0{,}632$.

**Доказательство**. Пусть $S' \subset S$ — число точек, покрытых оптимальным решением; $n' = |S'|$; $n_i$ — число новых точек, покрытых $i$-м множеством, выбранным жадным алгоритмом. Поскольку $S'$ должно быть покрытым $k$ множествами, то

$$n_i \geq \left( n' - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \right) \Big/ k.$$

Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{i} n_j \geq n' - n' \left( -\frac{1}{k} \right)^i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \geq n' - n' \left( -\frac{1}{k} \right)^k \geq n' \left( 1 - \frac{1}{e} \right)$.

В [10, 11] показано, что существует константа $\delta < 1$ такая, что аппроксимация максимального $k$-покрытия с отношением лучшим (большим), чем $\delta$, является *NP*-трудным.

### РЕОПТИМИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ *k*-ПОКРЫТИЙ МНОЖЕСТВА ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ И ИСКЛЮЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА

Пусть $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество точек, $I = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — семейство подмножеств множества $S$ ($I$ — экземпляр задачи о максимальном $k$-покрытии), удовлетворяющее следующим условиям:

**Условие 1.** Каждый элемент $j$ ($1 \leq j \leq m$) содержится хотя бы в двух подмножествах $F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

**Условие 2.** Каждое $F_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ содержат не менее двух элементов множества $S$.

**Условие 3.** Оптимальное решение на экземпляре $I$ имеет вид $F^* = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}\}$, т.е. $k$ подмножеств из $I$ таких, что их объединение содержит максимальное число точек (имеет максимальную мощность).

Рассмотрим следующие проблемы реоптимизаций максимальных $k$-покрытий.

**Проблема 1.** Реоптимизация максимального $(j, i, +)k$-покрытия.

**Ввод**. $F^* = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}\}$ — оптимальное решение на экземпляре $I$, $j$ — фиксировано ($1 \leq j \leq m$), $i$ — фиксировано ($1 \leq i \leq n$), экземпляр $I' = \{F_1, \ldots, F_{i-1}, F_i', F_{i+1}, \ldots, F_n\}$, где $F_i' = F_i \cup \{j\} (j \notin F_i)$.

**Вывод.** Получить $k$ подмножеств экземпляра $I'$.

**Цель.** Объединение $k$ подмножеств, имеющих максимальную мощность.

**Проблема 2.** Реоптимизация максимального $(j, i, -)$ $k$-покрытия.

**Ввод.** $F^* = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}\}$ — оптимальное решение на экземпляре $I$, $j$ — фиксировано ($1 \le j \le m$), $i$ — фиксировано ($1 \le i \le n$), экземпляр $I' = \{F_1, \ldots, F_{i-1}, F'_i, F_{i+1}, \ldots, F_n\}$, где $F'_i = F_i \setminus \{j\} (j \in F_i)$.

**Вывод.** Получить $k$ подмножеств экземпляра $I'$.

**Цель.** Объединение $k$ подмножеств, имеющих максимальную мощность.

Вызывает интерес рассмотрение вопроса об установлении труднорешаемости реоптимизации дискретных задач оптимизации. Используя результаты работы [9, теорема 2], можно предложить такой критерий установления труднорешаемости реоптимизации. Суть критерия для большинства $NP$-трудных проблем состоит в использовании полиномиальной сводимости Тьюринга [13] исходной задачи к ее реоптимизационному варианту для показания $NP$-трудных реоптимизационных вариантов.

**Лемма 1.** Пусть $P$ является $NP$-трудной проблемой и mod-$P$ — некоторая локальная модификация для $P$. Если существует полиномиальный алгоритм $A$, который для произвольного экземпляра $I$ проблемы $P$ вычисляет экземпляр $I'$ для $P$, оптимальное решение $x'$ для $I'$, последовательность локальных модификаций типа mod (не более чем полиномиальную), преобразующую $I'$ в $I$, то проблема mod-$P$ является $NP$-трудной.

**Доказательство.** Сведем проблему $P$ к проблеме mod-$P$, используя полиномиальную сводимость Тьюринга. Поскольку $P$ является $NP$-трудной проблемой, то таковой (т.е. $NP$-трудной) будет и проблема mod-$P$ [13].

Пусть $q$ — число локальных модификаций типа mod для $A$, которые экземпляр $I'$ преобразуют в $I$. Допустим, что существует полиномиальный алгоритм $A_1$ (со сложностью $p$) для проблемы mod-$P$. Тогда, применяя $A_1$ точно $q$ раз, начиная с $I'$, получаем оптимальное решение для $I$. При этом и количество вычислений ($q$), и время каждого вычисления ($p$) полиномиальны относительно параметра $P$. Получено полиномиальное сведение (со сложностью $q \cdot p$). Лемма доказана.

**Теорема 2.** Максимальное $(j, i, +)k$-покрытие является $NP$-трудной проблемой.

**Доказательство.** Воспользуемся леммой 1, а также тем, что проблема максимального $k$-покрытия является $NP$-трудной. Пусть $I = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — произвольный экземпляр проблемы максимального $k$-покрытия для множества $S = \{1, \ldots, m\}$ ($m \le n$). Экземпляр $I' = \{F'_1, \ldots, F'_n\}$ построим следующим образом: каждое $F'_i$ ($i = 1, \ldots, n$) содержит ровно два элемента множества $S$, каждый элемент $j \in S$ содержится ровно в двух множествах $F'_i$ (заметим, что $I'$ удовлетворяет условиям 1, 2). Матрица инциденций такого экземпляра (строки – это элементы, столбцы — это множества) в каждой строке и в каждом столбце содержит ровно две единицы. Произвольный экземпляр $I$ (удовлетворяющий условиям 1, 2) может быть получен из соответствующего экземпляра $I'$ полиномиальным числом преобразований mod (не более $m(n-2)$), каждое из которых в данном случае состоит в последовательном включении в соответствующие $F'_i$ некоторых элементов множества $S$ (т.е. замены некоторых нулей матрицы инциденций на единицы). Задача о максимальном $k$-покрытии (как и просто задача о покрытии) для экземпляра $I'$ сводится к полиномиально разрешимой задаче о покрытии вершин графа ребрами [14] . Таким образом, все условия леммы 1 выполнены и теорема доказана.

**Теорема 3.** Максимальное $(j, i, -)k$-покрытие является $NP$-трудной проблемой.

**Доказательство** аналогично предыдущему доказательству с использованием двойственности.

**Теорема 4.** Существует полиномиальный алгоритм (реоптимизации) для максимального $(j, i, +)k$-покрытия с отношением аппроксимации не меньшим, чем $1 - \dfrac{1}{e+1}$.

**Доказательство.** Пусть $I=\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — начальный экземпляр задачи о максимальном $k$-покрытии, $F^*=\{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}\}$ — оптимальное решение на экземпляре $I$, $c(F^*)$ — число элементов множества $S$, покрытых $F^*$. Пусть $I'=\{F_1, \ldots, F_{i-1}, F_i', F_{i+1}, \ldots, F_n\}$ — экземпляр задачи о максимальном $(j,i,+)k$-покрытии, $F_{I'}^*$ — оптимальное решение на $I'$. Если $F_{I'}^*$ не содержит элемента $i(F_i')$, то начальное решение $F^*$ оптимально для $I'$. Следовательно,

$$c(F^*) \ge c(F_{I'}^*)-1. \tag{1}$$

(Здесь $F^*$ — оптимальное решение $I'$, и оно покрывает число точек не меньшее, чем $F_{I'}^*$, которое не содержит элемента $j$, а точнее $i(F_i')$.)

Если $F_{I'}^*$ содержит элемент $i$, удалим $i(F_i')$ из $I'$ и применим $\rho$-приближенный алгоритм (для $k-1$ множества), получим решение $F_1$. Затем к $F_1$ добавим элемент $\{j\}$ и получим решение $F_1 \cup \{j\}$. Имеем

$$c(F_1 \cup \{j\}) \ge \rho(c(F_{I'}^*)-1)+1=\rho c(F_{I'}^*)+1-\rho. \tag{2}$$

Будем выбирать лучшее решение $F$ из $F^*$ и $F_1 \cup \{j\}$ (т.е. с большим значением целевой функции $c$), суммируя (1) и (2) соответственно с коэффициентами $1-\rho$ и 1. Получим

$$(1-\rho)c(F^*)+c(F_1 \cup \{j\}) \ge (1-\rho)c(F_{I'}^*)-(1-\rho)+\rho c(F_{I'}^*)+1-\rho=c(F_{I'}^*).$$

Поскольку

$$(1-\rho)c(F^*)+c(F_1 \cup \{j\}) \le (1-\rho+1)\max\{c(F^*), c(F_1 \cup \{j\})\}=(2-\rho)c(F),$$

получим $(2-\rho)c(F) \ge c(F_{I'}^*)$ или $c(F) \ge \dfrac{1}{2-\rho}c(F_{I'}^*)$, т.е. найдем аппроксимационное отношение $\dfrac{1}{2-\rho}$ (заметим, что всегда $\dfrac{1}{2-\rho}>\rho$).

Положим $\rho=1-\dfrac{1}{e}$, т. е. применим для нахождения $F_1$ жадный алгоритм (теорема 1) и получим аппроксимационное отношение

$$\frac{1}{2-\left(1-\frac{1}{e}\right)}=\frac{1}{2-1+\frac{1}{e}}=\frac{1}{1+\frac{1}{e}}=\frac{e}{e+1}=\frac{e+1-1}{e+1}=1-\frac{1}{e+1},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Для реоптимизации проблемы 1 получено отношение аппроксимации $1-\dfrac{1}{e+1}\approx 0{,}731$, что больше, чем 0,632 — отношение аппроксимации для обычной задачи о максимальном $k$-покрытии.

**Теорема 5.** Существует полиномиальный алгоритм (реоптимизации) для максимального $(j,i,-)k$-покрытия с отношением аппроксимации не меньшим $1-(1/(e+1))$.

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 2 с некоторыми модификациями. Пусть $I=\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — начальный экземпляр задачи о максимальном $k$-покрытии, $F^*=\{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_k}\}$ — оптимальное решение на экземпляре $I$, $c(F^*)$ — число элементов множества $S$, покрытых $F^*$. Пусть также $I'=\{F_1, \ldots, F_{i-1}, F_i', F_{i+1}, \ldots, F_n\}$ — экземпляр задачи максимального $(j,i,-)k$-покрытия, $F_{I'}^*$ — оптимальное решение на $I'$. Если $F_{I'}^*$ не содержит элемента $i(F_i')$, то начальное решение $F^*$ оптимально для $I'$. Следовательно,

$$c(F^*) \ge c(F_{I'}^*)-1. \tag{3}$$

(Здесь $F^*$ — оптимальное решение $I'$ и оно покрывает число точек не меньшее, чем $F^*_{I'}$, которое не содержит элемента $j$, а точнее $i(F'_i)$, однако $F'_i$ содержит хотя бы один произвольный элемент $j_1 \in S$ в силу условия (2)).

Если $F^*_{I'}$ содержит элемент $i$ (а значит, содержит и элемент $j$), удалим $i(F'_i)$ из $I'$. В силу условия 1 существует $F_{i_1}$, содержащий $j$. Применим $\rho$-приближенный алгоритм (для $k-1$ множества с исключенным $F_{i_1}$) и получим решение $F_1$. Затем к $F_1$ добавим элемент $\{j\}$ и получим решение $F_1 \cup \{j\}$. Имеем

$$c(F_1 \cup \{j\}) \ge \rho(c(F^*_{I'})-1)+1 = \rho c(F^*_{I'})+1-\rho. \tag{4}$$

Будем выбирать лучшее решение $F$ из $F^*$ и $F_1 \cup \{j\}$ (т.е. с большим значением целевой функции $c$), суммируя (3) и (4) соответственно с коэффициентами $1-\rho$ и 1. Получим

$$(1-\rho)c(F^*)+c(F_1 \cup \{j\}) \ge (1-\rho)c(F^*_{I'})-(1-\rho)+\rho c(F^*_{I'})+1-\rho = c(F^*_{I'}).$$

Поскольку

$$(1-\rho)c(F^*)+c(F_1 \cup \{j\}) \le (1-\rho+1)\max\{c(F^*), c(F_1 \cup \{j\})\} = (2-\rho)c(F),$$

получим $(2-\rho)c(F) \ge c(F^*_{I'})$ или $c(F) \ge \dfrac{1}{2-\rho}c(F^*_{I'})$, т.е. аппроксимационное отношение $\dfrac{1}{2-\rho}$ (заметим, что всегда $\dfrac{1}{2-\rho} > \rho$).

Положим $\rho = 1-\dfrac{1}{e}$, т. е. применим для нахождения $F_1$ жадный алгоритм (теорема 1) и получим аппроксимационное отношение $1\Big/\left(2-\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\right) = 1-\dfrac{1}{e+1}$, что и требовалось доказать.

### ПОРОГ ОТНОШЕНИЯ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕОПТИМИЗАЦИИ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ *k*-ПОКРЫТИИ

Покажем, что для реоптимизации задачи о максимальном $k$-покрытии (проблемы 1, 2) оценка отношения аппроксимации $1-\dfrac{1}{e+1}$ не является улучшаемой в предположении $NP \not\subset TIME(m^{O(\log\log m)})$, где $TIME(t)$ обозначает класс языков (проблем), которые имеют детерминированные алгоритмы со временем работы $t$ (будем использовать результаты работы [12]).

Задачу о покрытии множествами рассмотрим в такой постановке. Пусть $S = \{1, \ldots, m\}$ и $I = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — система подмножеств $S$ (экземпляр задачи). Задача о покрытии множествами является задачей выбора наименьшего количества множеств из $I$ таких, что каждая точка из $S$ содержится хотя бы в одном из выбранных множеств.

**Теорема 6** [12]. Если существует некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что полиномиальный алгоритм может аппроксимировать задачу о покрытии множествами с аппроксимационным отношением $(1-\varepsilon)\ln m$, то $NP \subset TIME(m^{O(\log\log m)})$.

**Лемма 2.** Если проблема 1 (максимальное $(j, i, +)k$-покрытие) может быть эффективно аппроксимирована за полиномиальное время (реоптимизирована) с отношением $1-\dfrac{1}{e+1}+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $NP \subset TIME(m^{O(\log\log m)})$.

**Доказательство.** Предположим, что полиномиальный алгоритм $A$ аппроксимирует максимальное $(j, i, +)k$-покрытие с отношением $1-\dfrac{1}{e+1}+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Будем использовать алгоритм $A$ в качестве подпрограммы в полиномиальном алгоритме $B$, который аппроксимирует задачу о покрытии с отношением $(1-\delta)\ln m$. Отсюда согласно теореме 6 следует, что $NP \subset TIME(m^{O(\log\log m)})$.

Пусть задан некоторый экземпляр задачи о покрытии. Необходимо перебрать все возможные $k$ $(1 \le k \le n)$, как число множеств, достаточных для покрытия всех точек $S$. Один из таких выборов $k$ является оптимальным (он предусматривается при конструировании системы доказательства теоремы 6, и основная сложность $k$ определяется $TIME(m^{O(\log\log m)})$). Будем рассматривать именно такое оптимальное число $k$.

Алгоритм $B$ повторно применяет алгоритм $A$ для максимального $(j, i,+)k$-покрытия, и после каждого его применения точки, уже покрытые предыдущими множествами, удаляются (однако $k$ при этом остается неизменным). Определим, сколько раз нужно применять алгоритм $A$, чтобы покрыть все точки $S$. После первого применения алгоритма часть точек $\left(1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon\right)$ будет покрыта (останутся непокрытыми $1-\left(1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon\right)=\frac{1}{e+1}-\varepsilon$ часть точек). После второго применения алгоритма будет покрыта часть точек $\left(1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon\right)$ из числа $\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)$ точек, т.е. $\left(1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)=\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)-\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)^2$. При этом останутся непокрытыми $\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)-\left[\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)-\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)^2\right]=\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)^2$ точек и т.д. После $q$-го применения алгоритма $A$ часть точек $\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)^q$ останутся непокрытыми. Таким образом, чтобы покрыть все точки $S$ нужно алгоритм $A$ применить не более $q$ раз, где $\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)^q=\frac{1}{m}$, при этом число множеств, которые используются для покрытия, составляет не более $qk$ ($k$ — число множеств оптимального покрытия). Таким образом,

$$q=-\frac{\ln m}{\ln\left(\frac{1}{e+1}-\varepsilon\right)}=-\frac{\ln m}{\ln\frac{1-\varepsilon(e+1)}{e+1}}=-\frac{\ln m}{\ln(1-\varepsilon(e+1))-\ln(e+1)}=\frac{\ln m}{\ln(e+1)-\ln(1-\varepsilon(e+1))}$$

и должно быть $q<(1-\delta)\ln m$ для некоторого $\delta>0$. С помощью простых вычислений получим, что при $0<\varepsilon<\frac{1}{e+1}$ имеем $0<\delta<1-\frac{1}{\ln(e+1)-\ln(1-\varepsilon(e+1))}$, при этом $\delta$ зависит только от $\varepsilon$. Лемма доказана.

**Теорема 7.** Если $NP \not\subset TIME(m^{O(\log\log m)})$, то для произвольного $\varepsilon>0$ проблема 1 (максимальное $(j, i,+)k$-покрытие) не может быть эффективно аппроксимирована за полиномиальное время (реоптимизирована) с отношением $1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon$.

**Доказательство** следует из результата применения принципа контрапозиции к лемме 2.

Аналогично теореме 7 устанавливается следующий факт.

**Теорема 8.** Если $NP \not\subset TIME(m^{O(\log\log m)})$, то для произвольного $\varepsilon>0$ проблема 2 (максимальное $(j, i,-)k$-покрытие) не может быть эффективно аппроксимирована за полиномиальное время (реоптимизирована) с отношением $1-\frac{1}{e+1}+\varepsilon$.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье для реоптимизации задачи о максимальном $k$-покрытии при вставке (удалении) элемента в множество получен порог отношения аппроксимации, равный $1-\frac{1}{e+1}$. Результат получен при условии $NP \not\subset TIME(m^{O(\log\log m)})$, которое исходит из [12] с учетом использованной системы доказательства. Хотя эта гипотеза, по мнению специалистов, является правдоподобной, в [12] показаны пути сведения этой гипотезы к стандартной $P \neq NP$. На наш взгляд, подобную замену можно сделать для рассмотренных реоптимизационных версий задачи о максимальном $k$-покрытии.

Представляет интерес получение пороговых результатов (если они вообще возможны) для реоптимизационных версий задач, для которых неизвестны нижние оценки отношения аппроксимации, совпадающие с верхними (например, для задачи о минимальном вершинном покрытии графа).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ausiello G., Escoffier B., Monnot J., Paschos V.Th. Reoptimization of minimum and maximum traveling salesman prime s tours // Algorithmic theory. — SWAT 2006, Lect. Notes Comput. Sci. — Berlin: Springer, 2006. — **4059**. — P. 196–207.
2. Bockenhauer H.J., Forlizzi L., Hromkovic J., et al. On the approximability of TSP on local modifications of optimal solved instances // Algorithmic Oper. Res. — 2007. — **2**, N 2. — P. 83–93.
3. Bockenhauer H.J., Hromkovic J., Momke T., Widmayer P. On the hardness of reoptimization // Proc. of the 34 th Intern. Conf. on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOF — SEM 2008); Lect. Notes Comput. Sci. — Berlin: Springer, 2008. — **4910**. — P. 50–65.
4. Escoffier B., Milanic M., Paschos V. Simple and fast reoptimizations for the Steiner tree problem // Algorithmic Operations Research. — 2009. — **4**, N 2. — P. 86–94.
5. Archetti C., Bertazzi L., Speranza M.G. Reoptimizing the travelling salesman problem // Networks. — 2003. — **42**, N 3. — P. 154–159.
6. Archetti C., Bertazzi L., Speranza M.G. Reoptimizing the 0-1 knapsack problem // Discrete Applied Mathematics. — 2010. — **158**, N 17. — P. 1879–1887.
7. Ausiello G., Bonifaci V., Escoffier B. Complexity and approximation in re optimization // Computability in Context: Computation and Logic in the Real World / Ed. S. Barry Cooper and Andrea Sorbi. — London: Imperial College Press. — 2011. — P. 101–130.
8. Михайлюк В.А. Реоптимизация задачи о покрытии множествами // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — **46**, № 6. — С. 27–31.
9. Михайлюк В.А. Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Там же. — 2010. — **46**, № 2. — С. 134–141.
10. Arora S., Lund C., Motwani R., Sudan M., Szegedy M. Proof verification and hardness of approximation problems // Proceedings of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, Calif., 1992. — P. 14–23.
11. Papadimitrious C., Yannakakis M. Optimization, approximation, and complexity classes // J. Comput. Syst. Sci. — 1991. **— 43**. — P. 425–440.
12. Feige U. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover // J. of the ACM. — 1998. — **45**, N 4. — P. 634–652.
13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
14. Агеев А.А. Алгоритмы с улучшенными оценками точности для задачи о покрытии множествами // Дискретный анализ и исследование операций. — 2004. — **11**, № 2. — С. 3–10.


*Поступила 21.01.2011*