УДК 519.25

МОДЕЛИРОВАНИЕ В КЛАССЕ СИСТЕМ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ

А.П. Сарычев

Институт технической механики НАНУ и ГКАУ, г. Днепропетровск
Sarychev@prognoz.dp.ua

Для моделювання в класі систем регресійних рівнянь з випадковими коефіцієнтами запропоновано системний критерій регулярності з розбиттям вибірок спостережень на навчальні й перевірні підвибірки. Доведено існування оптимальної множини регресірів. Виявлено умову редукції оптимальної системи регресійних рівнянь, що залежить від параметрів системи і обсягів вибірок.

Ключові слова: невизначеність за складом регресірів, системний критерій регулярності.

For modelling in a class of regression equations systems with random coefficients the system criterion of regularity with dividing of observation sample on training and testing subsamples is offered. It is proved, that the optimum set of regressors exists. The condition of a reduction of optimum system of regression equations is obtained. This condition depends on parameters of system and volumes of samples.

Keywords: uncertainty on structure of regressors, system criterion of regulatory.

Для моделирования в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами предложен системный критерий регулярности с разбиением выборок наблюдений на обучающие и проверочные подвыборки. Доказано существование оптимального множества регрессоров. Выявлено условие редукции оптимальной системы регрессионных уравнений, которое зависит от параметров системы и объемов выборок.

Ключевые слова: неопределенность по составу регрессоров, системный критерий регулярности.

Введение

Распространенным классом моделей является класс линейных по параметрам систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами. Модели этого класса позволяют описывать и прогнозировать состояния объектов как линейных по входным переменным, так и нелинейных (необходимо предварительно расширить множество входных переменных за счет нелинейных функций). Также, такой класс моделей можно применять и при моделировании статических характеристик динамических систем.

Задачи моделирования в классе систем регрессионных уравнений часто бывают поставлены в условиях структурной неопределенности по количеству и составу входных переменных, и для их решения необходимо принять критерий для оценивания качества и сравнения моделей с разными структурами. Известный подход к построению критериев качества в условиях структурной неопределенности применяется в методе группового учета аргументов (МГУА), который разработал академик НАН Украины А.Г. Ивахненко [1–8]. Подход основан на разбиении выборки данных на обучающую и проверочную части: на обучающей выборке оцениваются коэффициенты моделей, а на проверочной оценивается качество моделей.

Известным критерием качества для систем регрессионных уравнений является многомерный аналог информационного критерия Акаике [9]. Его недостаток состоит в том, что он построен в предположении, что все выходные переменные объекта определяются общим множеством входных переменных. В прикладных задачах могут встречаться объекты более широкого класса, в которых выходные переменные могут определяться, вообще говоря, разными подмножествами входных переменных. Поэтому построение и обоснование критерия структурной идентификации для систем регрессионных уравнений такого класса является актуальной задачей.

1. Априорные предположения об объекте

Пусть статический объект описывается множеством m входных переменных $\overset{o}{X}=\{\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,\ldots,\overset{o}{x}_m\}$ и множеством h выходных переменных $Y=\{y(1),y(2),\ldots,y(h)\}$. Пусть модель функционирования объекта представляет собой систему регрессионных уравнений

$$y_i(k)=\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{\theta}_i(k)+\zeta_i(k),\quad k=1,2,\ldots,h,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

где k – номер выходной переменной; $y_i(k)$ – i-е наблюдение выходной переменной с номером k; $\overset{o}{\mathbf{x}}_i(k)$ – $(m(k)\times 1)$-вектор i-го наблюдения множества входов $\overset{o}{X}(k)\subseteq\overset{o}{X}$ ($\overset{o}{X}(k)\neq\varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество), которые участвуют в формировании выходной переменной $y(k)$; $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ – ненаблюдаемый случайный $(m(k)\times 1)$-вектор коэффициентов; $\zeta_i(k)$ – ненаблюдаемая случайная величина; n – объем выборки наблюдений.
Пусть для случайного вектора $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ выполнено

$$\boldsymbol{\theta}_i(k)=\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\boldsymbol{\eta}_i(k),\quad k=1,2,\ldots,h,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)=(\overset{o}{\theta}_1(k),\overset{o}{\theta}_2(k),\ldots,\overset{o}{\theta}_{m(k)}(k))^{\mathrm{T}}$ – неизвестный детерминированный $(m(k)\times 1)$-вектор; $\boldsymbol{\eta}_i(k)$ – случайный $(m(k)\times 1)$-вектор.

Пусть $\boldsymbol{\eta}_i(k)=(\eta_{1i}(k),\eta_{2i}(k),\ldots,\eta_{m(k),i}(k))^{\mathrm{T}}$ распределен по $m(k)$-мерному нормальному закону: $\boldsymbol{\eta}_i(k)\sim N(\mathbf{0}_{m(k)},\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k))$, а относительно случайных векторов $\boldsymbol{\eta}_i(k)$, $k=1,2,\ldots,h$, выполнено

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\}=\mathbf{0}_{m(k)},\quad i=1,2\ldots,n; \tag{3}$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}(k)\}=\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k); \tag{4}$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_i(k)\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}(q)\}=\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,q),\quad q=1,2,\ldots,h,\quad k\neq q; \tag{5}$$

$$E\{\boldsymbol{\eta}_{i_1}(k)\boldsymbol{\eta}_{i_2}^{\mathrm{T}}(q)\}=\mathbf{O}_{(m(k)\times m(q))},\quad k,q=1,2,\ldots,h,\quad i_1,i_2=1,2,\ldots,n,\quad i_1\neq i_2, \tag{6}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по реализациям случайных векторов

$\boldsymbol{\eta}_i(k)$ и $\boldsymbol{\eta}_i(q)$; $\mathbf{0}_{m(k)}$ – нулевой $(m(k)\times 1)$-вектор; $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k)$ – неизвестная ковариационная $(m(k)\times m(k))$-матрица; $\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,q)$ – неизвестная ковариационная $(m(k)\times m(q))$-матрица; $\mathbf{O}_{(m(k)\times m(q))}$ – нулевая $(m(k)\times m(q))$-матрица.

Пусть относительно $\boldsymbol{\zeta}(k)$, $k=1,2,\ldots,h$, выполнено

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\}=\mathbf{0}_n,\ \ E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(k)\}=\sigma_\zeta(k,k)\,\mathbf{I}_n,\ \ k=1,2,\ldots,h; \tag{7}$$

$$E\{\boldsymbol{\zeta}(k)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(q)\}=\sigma_\zeta(k,q)\,\mathbf{I}_n,\ \ k,q=1,2,\ldots,h;\ \ k\neq q; \tag{8}$$

$$E\{\zeta_{i_1}(k)\zeta_{i_2}(q)\}=0,\ \ i_1,i_2=1,\ldots,n,\ \ i_1\neq i_2,\ \ k,q=1,2,...,h, \tag{9}$$

где $E\{\cdot\}$ – знак математического ожидания по реализациям случайных векторов $\boldsymbol{\zeta}(k)$ и $\boldsymbol{\zeta}(q)$; $\mathbf{0}_n$ – нулевой $(n\times 1)$-вектор; $\sigma_\zeta(k,k)$ – дисперсия случайной величины $\zeta_i(k)$, $i=1,2,\ldots,n$, ограниченная величина; $\sigma_\zeta(k,q)$ – ковариация случайных величин $\zeta_i(k)$ и $\zeta_i(q)$, $i=1,2,\ldots,n$, ограниченная величина; $\mathbf{I}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица.

Пусть в результате наблюдения для каждой выходной переменной $y(k)$, $k=1,2,...,h$, получены: 1) $\overset{\circ}{\mathbf{X}}(k)$ – $(n\times m(k))$-матрица n наблюдений $m(k)$ входов множества $\overset{\circ}{X}(k)$, имеющая полный ранг, равный $m(k)$; 2) $\mathbf{y}(k)$ – $(n\times 1)$-вектор соответствующих наблюдений выходной переменной $y(k)$.
В соответствии с (1)–(2) для наблюдений выполняется

$$y_i(k)=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{\eta}_i(k)+\zeta_i(k)=$$

$$=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\xi_i(k)=\overset{\circ}{y}_i(k)+\xi_i(k),\ \ k=1,2,\ldots,h, \tag{10}$$

$$\xi_i(k)=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{\eta}_i(k)+\zeta_i(k). \tag{11}$$

Для математического ожидания $\xi_i(k)$, учитывая (3) и (7), получаем

$$E\{\xi_i(k)\}=0,\ \ k=1,2,\ldots,h,\ \ i=1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

а для ковариаций случайных величин $\xi_i(k)\xi_i(k)$, $\xi_i(k)\xi_i(q)$, $\xi_i(k)\xi_j(q)$ с учетом соответственно (4)–(6) и (7)–(9) получаем

$$E\{\xi_i(k)\xi_i(k)\}=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,k)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(k)+\sigma_\zeta(k,k)=[\boldsymbol{\Sigma}_\xi(k,k)]_{ii},\ \ k=1,2,\ldots,h; \tag{13}$$

$$E\{\xi_i(k)\xi_i(q)\}=\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\Sigma}_\eta(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(q)+\sigma_\zeta(k,q)=[\boldsymbol{\Sigma}_\xi(k,q)]_{ii},\ \ k\neq q; \tag{14}$$

$$E\{\xi_i(k)\xi_j(q)\}=0,\ \ k,q=1,2,\ldots,h,\ \ i,j=1,2,\ldots,n,\ \ j\neq i. \tag{15}$$

Запишем (10)–(15) в обобщённом виде. Введём обозначения:

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(2),\ldots,\mathbf{y}(h)], \quad \overset{\circ}{\mathbf{Y}}=[\overset{\circ}{\mathbf{y}}(1),\overset{\circ}{\mathbf{y}}(2),\ldots,\overset{\circ}{\mathbf{y}}(h)], \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\Xi}=[\boldsymbol{\xi}(1),\boldsymbol{\xi}(2),\ldots,\boldsymbol{\xi}(h)]. \tag{17}$$

Тогда (10) и (12) соответственно принимают вид

$$\mathbf{Y}=\overset{\circ}{\mathbf{Y}}+\boldsymbol{\Xi}, \tag{18}$$

$$E\{\boldsymbol{\Xi}\}=\mathbf{O}_{(n\times h)}, \tag{19}$$

где $\mathbf{O}_{(n\times h)}$ – нулевая $(n\times h)$-матрица.

Для (k,q)-элемента матрицы ковариаций векторов в (17) получаем

$$E\{[\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}]_{kq}\}=E\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\xi}(q)\}=E\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i(k)\xi_i(q)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E\{\xi_i(k)\xi_i(q)\}=\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(q)+n\cdot\sigma_{\zeta}(k,q), \tag{20}$$

а для ее (k,k)-элемента –

$$E\{[\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}]_{kk}\}=\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\eta}(k,k)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(k)+n\cdot\sigma_{\zeta}(k,k). \tag{21}$$

2. Вывод формул для оценивания коэффициентов

Запишем (10)–(15) в объединенном виде. Введем обозначения

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}(1)\\ \hdashline \mathbf{y}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \mathbf{y}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\mathbf{y}}(1)\\ \hdashline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \overset{\circ}{\mathbf{y}}(h)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\theta}(1)\\ \hdashline \boldsymbol{\theta}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{\theta}(h)\end{pmatrix},\quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(1)\\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(h)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(1)\\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(2)\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{\xi}(h)\end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\overset{\circ}{\mathbf{X}}(1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \overset{\circ}{\mathbf{X}}(2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \overset{\circ}{\mathbf{X}}(h)\end{array}\right], \tag{23}$$

где $\mathbf{y}$ – объединенный $(N\times 1)$-вектор наблюдаемых зашумленных значений; $\overset{\circ}{\mathbf{y}}$ –$(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых значений; $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ – неизвестный детермини-рованный $(M\times 1)$-вектор коэффициентов; $\boldsymbol{\theta}$ – ненаблюдаемый случайный $(M\times 1)$-вектор коэффициентов; $\boldsymbol{\xi}$ –$(N\times 1)$-вектор ненаблюдаемых

случайных аддитивных составляющих; $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ – объединенная $(N \times M)$-матрица регрессоров;
$N = n\,h$; $M = m(1) + m(2) + \ldots + m(h)$.

С учетом (22)–(23) систему регрессионных уравнений (10) запишем

$$\mathbf{y} = \overset{\circ}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}. \tag{24}$$

Необходимо найти оценку неизвестных коэффициентов $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}$ в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\,\mathbf{y}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(1) \\ \hdashline \mathbf{d}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{d}(h) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k,1) \\ \hdashline \mathbf{d}(k,2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{d}(k,h) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, h, \tag{25}$$

где $(M \times N)$-матрицу $\mathbf{C}$, которая зависит от $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$, требуется определить.

Будем искать такую матрицу $\mathbf{C}$, при которой логарифм определителя ковариационной матрицы оценки коэффициентов принимает минимальное значение и оценки коэффициентов несмещены. Математическое ожидание и ковариационную матрицу оценки (25) вычислим по всем возможным реализациям случайных величин $\boldsymbol{\xi}(k)$, $k = 1, 2, \ldots, h$. Для математического ожидания оценки (25) должно выполняться

$$E\{\mathbf{d}\} = E\{\mathbf{C}\,\mathbf{y}\} = E\{\mathbf{C}\,(\overset{\circ}{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\xi})\} = E\{\mathbf{C}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}\} + E\{\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}\} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}. \tag{26}$$

Справедливость (26) следует из условий

$$\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \mathbf{I}_M, \; E\{\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}\} = \mathbf{0}_M, \tag{27}$$

т. е. из несмещенности оценок и независимости элементов матрицы $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ от величин $\boldsymbol{\xi}(k)$, $k = 1, 2, \ldots, h$, с учетом (12).

Пусть $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}$ – ковариационная матрица введенного в (22) $(N \times 1)$-вектора $\boldsymbol{\xi}$. Тогда для ковариационной матрицы вектора оценок (25) выполняется

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\mathbf{d}) = E\{(\mathbf{d} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{d} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\} = E\{(\mathbf{C}\,\overset{\circ}{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{C}\,\overset{\circ}{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\xi} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}})^{\mathrm{T}}\} = \\ = E\{\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $E\{\cdot\}$ – операция математического ожидания, введенная в (26).

Запишем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{C}, \boldsymbol{\Lambda}) = \ln\,(\det\,[\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}]) + \mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)], \tag{29}$$

где $\mathbf{\Lambda}_L$ – диагональная $-(M \times M)$ матрица неопределенных множителей.

Тогда необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{C}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}\,(\ln(\det[\mathbf{C}\,\mathbf{\Sigma}_\xi \mathbf{C}^{\mathrm{T}}])) + \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{C}}\,(\operatorname{tr}[\mathbf{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)]) = \mathbf{O}_{M\times N}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{\Lambda}}\,(\operatorname{tr}[\mathbf{\Lambda}_L(\mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M)]) = \mathbf{C}\underline{\underline{\mathbf{R}}} - \mathbf{I}_M = \mathbf{O}_{M\times M}. \end{cases} \tag{30}$$

Применяя правила матричного дифференцирования, из (30) получаем

$$\mathbf{C} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}. \tag{31}$$

Для оценки (31) выполняется

$$E\{\mathbf{d}\} = E\{\mathbf{C}\mathbf{y}\} = E\{(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{R}}}\,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi})\} = \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}, \tag{32}$$

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{d}) = E\{(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}} (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}\} = (\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}. \tag{33}$$

Вычислим матрицу $\mathbf{\Sigma}_\xi$, т. е. дисперсии и ковариации случайных величин $\xi_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, h$. Учитывая (13)–(15), для $(n \times n)$-матрицы $[\mathbf{\Sigma}_\xi]_{kq} = \mathbf{\Sigma}_\xi(k,q)$ – (k,q)-блока матрицы $\mathbf{\Sigma}_\xi$ и для всей матрицы $\mathbf{\Sigma}_\xi$ получаем

$$[[\mathbf{\Sigma}_\xi]_{kq}]_{ii} = \overset{o}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_\eta(k,q)\,\overset{o}{\mathbf{x}}{}_i(q) + \sigma_\zeta(k,q) = [\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}_\eta(k,q)]_{ii} + \sigma_\zeta(k,q), \tag{34}$$

$$\mathbf{\Sigma}_\xi = E\{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} E\{\xi(1)\xi^{\mathrm{T}}(1)\} & E\{\xi(1)\xi^{\mathrm{T}}(2)\} & \cdots & E\{\xi(1)\xi^{\mathrm{T}}(h)\} \\ \hline E\{\xi(2)\xi^{\mathrm{T}}(1)\} & E\{\xi(2)\xi^{\mathrm{T}}(2)\} & \cdots & E\{\xi(2)\xi^{\mathrm{T}}(h)\} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline E\{\xi(h)\xi^{\mathrm{T}}(1)\} & E\{\xi(h)\xi^{\mathrm{T}}(2)\} & \cdots & E\{\xi(h)\xi^{\mathrm{T}}(h)\} \end{array}\right] = \overset{o}{\mathbf{\Lambda}}_\eta + \mathbf{\Sigma}_\zeta \otimes \mathbf{I}_n, \tag{35}$$

где $\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}_\eta$ – $(N \times N)$-матрица, состоящая из $(h \times h)$ блоков, а каждый (k,q)-блок $(k, q = 1, 2, \ldots, h)$ представляет собой диагональную $(n \times n)$-матрицу с элементами в (34); $\mathbf{\Sigma}_\zeta$ – ковариационная матрица, элементы которой введены в (7)–(8); $\mathbf{I}_n$ – единичная $(n \times n)$-матрица; $\mathbf{\Sigma}_\zeta \otimes \mathbf{I}_n$ – кронекеровское произведение матриц.

Из (22)–(35) следует, что для оценок коэффициентов выполняется

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}(k) &= \sum_{q=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]_{lq}\, \mathbf{R}(q)\,\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(q) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q) = \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq k}}^{h} \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lq}\, \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(q) + \\ &+ \sum_{l=1}^{h} [(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}})^{-1}]_{kl} [\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}_\xi^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{lk}\, \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q) = \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k) + \sum_{q=1}^{h} \mathbf{C}_{kq}\,\boldsymbol{\xi}(q), \end{aligned} \tag{36}$$

где использованы свойства обратной блочной матрицы, которые следуют из $\mathbf{H}\times\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{I}$: $\sum_{l=1}^{h}[\mathbf{H}]_{kl}\times[\mathbf{H}^{-1}]_{lq}=1$, если $k=q$, и $\sum_{l=1}^{h}[\mathbf{H}]_{kl}\times[\mathbf{H}^{-1}]_{lq}=0$, если $k\neq q$.

В выражение (35) для матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\xi}(k,q)$ входят неизвестные матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,q)$ и $\mathbf{\Sigma}_{\zeta}(k,q)$. Это обстоятельство использовано в [10] для построения итерационной процедуры вычисления неизвестных коэффициентов. Эффективность итерационной процедуры подтверждена методом статистических испытаний.

3. Системный критерий регулярности МГУА

Ранее предполагалось, что подмножества регрессоров, участвующих в формировании каждой из выходных переменных в (1), заданы. Далее будем предполагать, что они неизвестны, и их требуется определить.

Для описания структуры системы регрессионных уравнений введем структурные матрицы, смысл которых поясним на конкретном примере. Пусть X – заданное исходное множество регрессоров, а $\mathbf{X}$ – $(n\times m)$-матрица регрессоров множества X. Пусть на значение выходной переменной с номером k влияют первый, второй и четвертый регрессоры в исходном заданном множестве регрессоров X, число которых $m=5$. Тогда матрицу регрессоров $\mathbf{X}(k)$ в (1)–(36) можно записать виде произведения

$$\mathbf{X}(k)=\mathbf{X}\mathbf{S}(k)=$$

$$=\begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & x_1(3) & x_1(4) & x_1(5)\\ x_2(1) & x_2(2) & x_2(3) & x_2(4) & x_2(5)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_i(1) & x_i(2) & x_i(3) & x_i(4) & x_i(5)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n(1) & x_n(2) & x_n(3) & x_n(4) & x_n(5) \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & x_1(4)\\ x_2(1) & x_2(2) & x_2(4)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_i(1) & x_i(2) & x_i(4)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n(1) & x_n(2) & x_n(4) \end{bmatrix}, \qquad (37)$$

где (5×3)-матрица $\mathbf{S}(k)$ – структурная матрица, отражающая влияние первого, второго и четвертого регрессоров на выходную переменную с номером k.

Пусть информация о том, какие именно регрессоры определяют значения каждой выходной переменной, представлена набором структурных матриц

$$\overset{o}{S}=\{\overset{o}{\mathbf{S}}(1),\overset{o}{\mathbf{S}}(2),\ldots,\overset{o}{\mathbf{S}}(h)\}, \qquad (38)$$

которые могут быть различными для разных выходных переменных. С учетом введенных структурных матриц закон функционирования (10) можно записать

$$\mathbf{y}(k)=\overset{o}{\mathbf{y}}(k)+\boldsymbol{\xi}(k)=\mathbf{X}\overset{o}{\mathbf{S}}(k)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\boldsymbol{\xi}(k)=\mathbf{R}(\overset{o}{S},k)\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)+\boldsymbol{\xi}(k),\ k=1,2,\ldots,h, \qquad (39)$$

где $\mathbf{y}(k)$ – $(n\times 1)$-вектор наблюдаемых значений выходной переменной $y(k)$.

Далее предполагается, что множество X и матрица $\mathbf{X}$ заданы, а структурные матрицы $\overset{o}{\mathbf{S}}(k)$, $k=1,2,...,h$, неизвестны, их требуется определить.

Пусть

$$S=\{\mathbf{S}(1),\mathbf{S}(2),\dots,\mathbf{S}(h)\} \tag{40}$$

– набор структурных матриц, которые соответствуют текущей структуре модели – одной из структур, перебираемых по алгоритму полного перебора всех структур; $s(k)\le p$ – число регрессоров в k-ом регрессионном уравнении, $k=1,2,...,h$; p – заданное максимально возможное число регрессоров.

Пусть $\hat{\mathbf{d}}$ – оценка вектора коэффициентов $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}$, а $\hat{\mathbf{d}}(k)$ – оценка $\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k)$ в (36).

Тогда для системы регрессионных уравнений выполняется

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{X}(k)\hat{\mathbf{d}}(k)+\mathbf{u}(k)=\hat{\mathbf{y}}(k)+\mathbf{u}(k),\quad k=1,2,\dots,h, \tag{41}$$

где $\hat{\mathbf{y}}(k)$ – $(n\times 1)$-вектор выходов, а $\mathbf{u}(k)$ – $(n\times 1)$-вектор остатков k-й модели.

Введем матрицы выходов $\hat{\mathbf{Y}}$ и остатков $\mathbf{U}$ системы моделей (41):

$$\hat{\mathbf{Y}}=[\hat{\mathbf{y}}(1),\hat{\mathbf{y}}(2),\dots,\hat{\mathbf{y}}(h)], \tag{42}$$

$$\mathbf{U}=[\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2),\dots,\mathbf{u}(h)], \tag{43}$$

для которых выполняется

$$\mathbf{U}=\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}=[\mathbf{y}(1)-\hat{\mathbf{y}}(1),\mathbf{y}(2)-\hat{\mathbf{y}}(2),\dots,\mathbf{y}(h)-\hat{\mathbf{y}}(h)], \tag{44}$$

где $\mathbf{Y}$ – матрица наблюдений, введённая в (16).

Пусть имеются две выборки наблюдений m входных переменных и h выходных переменных: первую выборку (A) будем называть обучающей, а вторую (B) – проверочной. На обучающей выборке будем оценивать параметры системы регрессионных уравнений с текущей анализируемой структурой, а на проверочной – оценивать качество этой построенной модели. Введем для этих выборок обозначения

$$\mathbf{y}(A)=\begin{pmatrix}\mathbf{y}(A,1)\\ \hline \mathbf{y}(A,2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{y}(A,h)\end{pmatrix},\quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\mathbf{R}(A,S;1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{R}(A,S;2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{R}(A,S;h)\end{array}\right], \tag{45}$$

где $\mathbf{R}(A,S;k)=\mathbf{X}(A)\mathbf{S}(k)$, $k=1,2,\dots,h$;

$$\mathbf{y}(B)=\begin{pmatrix}\mathbf{y}(B,1)\\ \hline \mathbf{y}(B,2)\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{y}(B,h)\end{pmatrix},\quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)=\left[\begin{array}{c:c:c:c}\mathbf{R}(B,S;1) & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{R}(B,S;2) & \cdots & \mathbf{O}_{(n\times m(h))}\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hdashline \mathbf{O}_{(n\times m(1))} & \mathbf{O}_{(n\times m(2))} & \cdots & \mathbf{R}(B,S;h)\end{array}\right], \tag{46}$$

где $\mathbf{R}(B,S;k)=\mathbf{X}(B)\mathbf{S}(k)$, $k=1,2,\dots,h$.

Итак, на выборке A оцениваем коэффициенты (использовано (36)):

$$\hat{\mathbf{d}}(A,S;k)=\mathbf{C}_{k\bullet}(A,S)\mathbf{y}(A)=\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\mathbf{y}(A,q)=\mathring{\boldsymbol{\theta}}(k)+\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,q). \quad (47)$$

Для $(n(B)\times 1)$-вектора остатков на B выполняется (использовано (41)):

$$\mathbf{u}(B/A,S;k)=\mathbf{y}(B,k)-\hat{\mathbf{y}}(B/A,\mathrm{S};k)=\mathbf{y}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\hat{\mathbf{d}}(A,S;k), \quad (48)$$

где $\mathbf{y}(B,k)$ – $(n(B)\times 1)$-вектор наблюдений выходной переменной с номером k на проверочной выборке B; $n(B)$ – объем выборки B; $\hat{\mathbf{y}}(B/A,S;k)$ – $(n(B)\times 1)$-вектор выходов k-й модели на выборке B, рассчитанный по модели, оценки коэффициентов (47) которой получены на обучающей выборке A.

С учетом (47) для вектора остатков (48) выполняется

$$\mathbf{u}(B/A,S;k)=$$

$$=\mathring{\mathbf{y}}(B,k)+\boldsymbol{\xi}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\,\mathring{\mathbf{y}}(A,q)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,q)=$$

$$=\boldsymbol{\delta}(B/A,S;k)+\boldsymbol{\xi}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,q), \quad (49)$$

где $\boldsymbol{\delta}(B/A,S;k)$ – $(n\times 1)$-вектор отклонений (так называемое смещение, обусловленное выбором текущей структуры S вместо истинной $\mathring{S}$):

$$\boldsymbol{\delta}(B/A,S;k)=\mathring{\mathbf{y}}(B,k)-\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{q=1}^{h}\mathbf{C}_{kq}(A,S)\,\mathring{\mathbf{y}}(A,q). \quad (50)$$

Объединим $(n(B)\times 1)$-векторы остатков (49) в $(n(B)\times h)$-матрицу

$$\mathbf{U}(B/A,S)=\left[\,\mathbf{u}(B/A,S;1),\mathbf{u}(B/A,S;2),\dots,\mathbf{u}(B/A,S,h)\,\right]. \quad (51)$$

Введем матрицу ковариаций остатков (49)

$$\mathbf{W}(B/A,S)=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(B/A,S)\,\mathbf{U}(B/A,S). \quad (52)$$

Определение 1. Случайная величина

$$ARS(S)=\frac{1}{h}\ln\left(\det\left[\,\mathbf{W}(B/A,S)\right]\right) \quad (53)$$

называется системным критерием регулярности МГУА для системы регрессионных уравнений [11].

Определение 2. Оптимальным множеством регрессоров называется множество регрессоров, соответствующее набору структурных матриц S_0:

$$S_0=\arg\min_{S\subseteq S^{*}(m,p)} E\{ARS(S)\}, \quad (54)$$

где $S^*(m,p)$ – множество всевозможных наборов структурных матриц при заданном множестве m регрессоров X и заданном p.

Определение 3. Оптимальной по количеству и составу регрессоров называется система регрессионных уравнений, построенная на множестве регрессоров, которое соответствует набору структурных матриц S_0.

Вычислим математическое ожидание матрицы ковариаций остатков (52):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{kq}(B/A,S) &= [\,E\{\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(B/A,S)\mathbf{U}(B/A,S)\}\,]_{kq} = E\{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(B/A,S;k)\mathbf{u}(B/A,S;q)\} = \\ &= \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B/A,S;k)\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S;q) + E\{[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)\boldsymbol{\xi}(B,q)]\} - \\ &- E\{[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)(\mathbf{R}(B,S;q)\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,s))]\} - \\ &- E\{[(\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,r))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(B,q)]\} + \\ &+ E\{[(\mathbf{R}(B,S;k)\sum_{r=1}^{h}\mathbf{C}_{kr}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,r))^{\mathrm{T}}(\mathbf{R}(B,S;q)\sum_{s=1}^{h}\mathbf{C}_{qs}(A,S)\boldsymbol{\xi}(A,s))]\}. \end{aligned} \tag{55}$$

Для второго слагаемого в (55) аналогично (20), выполняется

$$E\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(B,k)\boldsymbol{\xi}(B,q)\} = \sum_{i=1}^{n(B)} \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(B,k)\,\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}_i(B,q) + n(B)\cdot\sigma_{\zeta}(k,q), \tag{56}$$

а третье и четвертое слагаемые равны нулю, поскольку $\boldsymbol{\xi}(A)$ и $\boldsymbol{\xi}(B)$ статистически независимы. Для пятого слагаемого в (55) выполняется

$$\begin{aligned} E\{[\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(A,r)[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\,\mathbf{R}(B,S;q)\mathbf{C}_{qs}(A,S)\,\boldsymbol{\xi}(A,s)\,]\} = \\ = \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h}\mathrm{tr}\,[\,[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\mathbf{R}(B,S;q)\mathbf{C}_{qs}(A,S)\,[\mathbf{\Sigma}_{\xi}]_{sr}\,]. \end{aligned} \tag{57}$$

Учитывая

$$\mathbf{C}_{kr}(A,S) = [\,(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,]_{kr}, \tag{58}$$

$$\mathbf{C}_{qs}(A,S) = [\,(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,]_{qs}, \tag{59}$$

используя $[\mathbf{C}_{kr}(A,S)]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(A,S)]_{rk}$ и симметричность матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\xi}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{h}\mathrm{tr}\left[\begin{array}{l}\left[\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\right]_{rk}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(B,S;k)\mathbf{R}(B,S;q)\times \\ \times\left[(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\right]_{qs}[\mathbf{\Sigma}_{\xi}]_{sr}\end{array}\right] = \\ = \mathrm{tr}\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)\right]_{kq}. \end{aligned} \tag{60}$$

Подставляя в (55) выражения (56) и (60), получаем

$$\mathbf{\Omega}_{kq}(B/A,S)=\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B/A,S;k)\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S;q)+\sum_{i=1}^{n(B)}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(B,k)\,\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(B,q)+$$

$$+\,n(B)\cdot\sigma_{\zeta}(k,q)+\mathrm{tr}[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(A,S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(B,S)\,]_{kq}\,. \qquad (61)$$

Далее будем предполагать, что мы находимся в условиях активного эксперимента и можем реализовать схему повторных наблюдений [12, 13]. Для заданных значений входных переменных проводится пара наблюдений выходных переменных, причем “первые” наблюдения каждой пары образуют выборку A, а “вторые” наблюдения – выборку B, т. е. выполняется:

$$n(A)=n(B)=n,\;\; \underline{\underline{\mathbf{R}}}(A,S)=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(B,S)=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\,, \qquad (62)$$

$$\mathbf{R}(A,S;k)=\mathbf{R}(B,S;k)=\mathbf{R}(S;k)=\mathbf{X}\mathbf{S}(k)\,,\quad k=1,2,\ldots,h\,. \qquad (63)$$

Учитывая (35) и (62)–(63), выражение (61) можно записать

$$\mathbf{\Omega}_{kq}(B/A,S)=\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B/A,S;k)\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S;q)+\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i^{\mathrm{T}}(k)\,\mathbf{\Sigma}_{\eta}(k,q)\,\overset{\circ}{\mathbf{x}}{}_i(q)+$$

$$+\,n\cdot\sigma_{\zeta}(k,q)+\mathrm{tr}[\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\,]_{kq}=$$

$$=[\mathbf{\Delta}]_{kq}(B/A,S)+\sum_{i=1}^{n}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(k,q)]_{ii}+n\cdot\sigma_{\zeta}(k,q)+\mathrm{tr}\big[\,\mathbf{P}(S)\,\big]_{kq}\,, \qquad (64)$$

где $\mathbf{\Delta}(B/A,S)$ – матрица отклонений, обусловленных выбором текущей анализируемой структуры S вместо истинной структуры $\overset{\circ}{S}$:

$$[\mathbf{\Delta}(B/A,S)]_{kq}=\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B/A,S;k)\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S;q)\,,\quad k,q=1,2,\ldots,h\,; \qquad (65)$$

$$\mathbf{P}(S)=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\,\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\,; \qquad (66)$$

$\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(k,q)$, $k,q=1,2,\ldots,h$ – матрицы, введённые в (34).

Введём обозначения

$$\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}})=\mathrm{tr}_{\otimes}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}]=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(1,1)] & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(1,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(1,h)]\\ \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(2,1)] & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(2,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(2,h)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(h,1)] & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(h,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_{\eta}(h,h)]\end{bmatrix}, \qquad (67)$$

$$\mathbf{T}_{P}(S)=\mathrm{tr}_{\otimes}[\mathbf{P}(S)]=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;1,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;1,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;1,h)]\\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;2,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;2,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;2,h)]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;h,1)] & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;h,2)] & \cdots & \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;h,h)]\end{bmatrix}, \qquad (68)$$

где $\mathrm{tr}_{\otimes}[\,\cdot\,]$ – обозначение операции “поблочного” взятия следа матрицы.

Тогда для ковариационной матрицы $\mathbf{\Omega}(B/A,S)$ окончательно получаем

$$\mathbf{\Omega}(B/A,S)=\mathbf{\Delta}(B/A,S)+\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}})+n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta+\mathbf{T}_P(S). \tag{69}$$

Для случая совпадения структуры S с $\overset{\circ}{S}$ получаем ($k,q=1,2,\dots,h$)

$$\mathbf{\Omega}_{kq}(B/A,\overset{\circ}{S})=\sum_{i=1}^{n}[\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}_\eta(k,q)]_{ii}+n\cdot\sigma_\zeta(k,q)+\mathrm{tr}[\mathbf{P}(\overset{\circ}{S})]_{kq}, \tag{70}$$

$$\mathbf{\Omega}(B/A,\overset{\circ}{S})=\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}})+n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta+\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S}), \tag{71}$$

где матрицы $\mathbf{P}(\overset{\circ}{S})$ и $\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})$ могут быть записаны аналогично (66) и (68).

4. Исследование системного критерия регулярности МГУА

Установим свойства системного критерия регулярности МГУА. С этой целью исследуем, как изменяется математическое ожидание критерия в зависимости от состава множества регрессоров. В случае истинной структуры для математического ожидания критерия регулярности в схеме повторных наблюдений, используя (71), получаем

$$E\{ARS(\overset{\circ}{S})\}=\frac{1}{h}E\{\ln(\det[\mathbf{W}(B/A,\overset{\circ}{S})])\}=$$
$$=\frac{1}{h}\ln(\det[E\{\mathbf{W}(B/A,\overset{\circ}{S})\}]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k))=\frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Omega}(B/A,\overset{\circ}{S})]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k))=$$
$$=\frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}})+n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta+\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k)). \tag{72}$$

Для математического ожидания критерия регулярности модели с текущей структурой S в схеме повторных наблюдений, используя (69), получаем

$$E\{ARS(S)\}=\frac{1}{h}E\{\ln(\det[\mathbf{W}(B/A,S)])\}=$$
$$=\frac{1}{h}\ln(\det[E\{\mathbf{W}(B/A,S)\}]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k))=\frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Omega}(B/A,S)]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k))=$$
$$=\frac{1}{h}\ln(\det[\mathbf{\Delta}(B/A,S)+\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}})+n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta+\mathbf{T}_P(S)]\cdot\prod_{k=1}^{h}(n-k)). \tag{73}$$

При расчёте математических ожиданий определителей матриц (72)– (73), имеющих распределение Уишарта, применены результаты [14, с. 236, 237].

Случай недостающего регрессора. Рассмотрим случай, когда в модель для переменной с номером h ошибочно не включен один регрессор, и для простоты будем считать, что это регрессор с номером m из множества X. Тогда для текущих и истинных структурных матриц выполняется соотношение

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}}(k)=\mathbf{S}(k),\ k=1,2,\dots,h-1;\quad \overset{\circ}{\mathbf{S}}(h)=[\,\mathbf{S}(h)\ \vdots\ \mathbf{s}\,], \tag{74}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{S}}(h)$ – структурная $(m\times\overset{\circ}{m}(h))$-матрица истинной модели (регрессионного уравнения) для переменной с номером h; $\mathbf{S}(h)$ – структурная $(m\times(\overset{\circ}{m}(h)-1))$-матрица текущей модели; $\mathbf{s}$ – $(m\times1)$-вектор, для которого выполняется

$$\mathbf{s}=(0,0,\dots,0,1)^{\mathrm{T}}. \tag{75}$$

Используя формулы (72)–(73), рассмотрим разность

$$\Delta_1(S,\overset{o}{S}) = E\{ARS(S)\} - E\{ARS(\overset{o}{S})\} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[\mathbf{\Omega}_1(B/A,S)]}{\det[\mathbf{\Omega}(B/A,\overset{o}{S})]}\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[[\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] + \mathbf{\Delta}(B/A,S)]}{\det[\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n\cdot\mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]}\right). \quad (76)$$

Вычислим $(h\times h)$-матрицу $\mathbf{\Delta}(B/A,S)$ в (76), для которой выполняется

$$\mathbf{\Delta}(B/A,S) = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{(h-1)\times(h-1)} & \mathbf{0}_{h-1} \\ \hdashline \mathbf{0}_{h-1}^{\mathrm{T}} & \Delta_{hh} \end{array}\right], \quad \Delta_{hh} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(B/A,S;h)\boldsymbol{\delta}(B/A,S;h), \quad (77)$$

где $\boldsymbol{\delta}(B/A,S;h)$ – так называемое смещение, введенное в (50).

В схеме повторных наблюдений для смещения $\boldsymbol{\delta}(B/A,S)$ выполняется

$$\boldsymbol{\delta}(B/A,S) = \overset{o}{\mathbf{y}}(B) - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{C}(S)\overset{o}{\mathbf{y}}(A) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{C}(S)\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}. \quad (78)$$

Для матриц регрессоров, соответствующих $\overset{o}{S}$ и S в (74), выполняется

$$\mathbf{R}(\overset{o}{S},k) = \mathbf{R}(S,k),\ k = 1,2,\dots,h-1, \quad (79)$$

$$\mathbf{R}(\overset{o}{S},h) = \mathbf{X}\overset{o}{\mathbf{S}}(h) = \mathbf{X}\left[\mathbf{S}(h) \,\vdots\, \mathbf{s}\right] = \left[\mathbf{X}\mathbf{S}(h) \,\vdots\, \mathbf{X}\mathbf{s}\right] = \left[\mathbf{R}(S,h) \,\vdots\, \mathbf{m}\right], \quad (80)$$

где $\mathbf{m}$ – $(n\times 1)$-вектор наблюдений пропущенного регрессора.

Для матриц $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})$ и $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)$, с учётом (79)–(80), получаем

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}) = \left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R\right], \quad \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}} = (\mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \dots, \mathbf{m}^{\mathrm{T}}). \quad (81)$$

Учитывая (81), (78) можно записать

$$\boldsymbol{\delta}(B/A,S) = \left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R\right]\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) \,\vdots\, \boldsymbol{\delta}_R\right]\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{N\times(\overset{o}{M}-1)} & \boldsymbol{\delta}_R - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\boldsymbol{\delta}_R \end{array}\right]\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O}_{N\times(\overset{o}{M}-1)} & \mathbf{M}(S)\,\boldsymbol{\delta}_R \end{array}\right]\overset{o}{\boldsymbol{\theta}}, \quad (82)$$

где $\mathbf{M}(S) = [\mathbf{I}_N - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\mathbf{\Sigma}_\xi^{-1}]$ – идемпотентная матрица.

Учитывая (74), (82) и соотношения

$$\overset{o}{\boldsymbol{\theta}} = \left(\begin{array}{c} \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(1) \\ \hdashline \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(2) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(h) \end{array}\right), \quad \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(h) = \left(\begin{array}{c} \overset{o}{\theta}_1(h) \\ \hdashline \overset{o}{\theta}_2(h) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h) \end{array}\right), \quad (83)$$

получаем

$$\Delta_{hh} = \boldsymbol{\delta}(B/A,S)^{\mathrm T}\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S) = \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm T}\left[\begin{array}{c}\mathbf{O}_{(\overset{\circ}{M}-1)\times N}\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm T}\;\mathbf{M}^{\mathrm T}(S)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\mathbf{O}_{N\times(\overset{\circ}{M}-1)} & \mathbf{M}(S)\,\boldsymbol{\delta}_R\end{array}\right]\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm T}\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\mathbf{O}_{(\overset{\circ}{M}-1)\times(\overset{\circ}{M}-1)} & \mathbf{0}_{\overset{\circ}{M}-1}\\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathrm T}_{\overset{\circ}{M}-1} & \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm T}\;\mathbf{M}^{\mathrm T}(S)\mathbf{M}(S)\,\boldsymbol{\delta}_R\end{array}\right]\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mathrm T}\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\mathbf{O}_{(\overset{\circ}{M}-1)\times(\overset{\circ}{M}-1)} & \mathbf{0}_{\overset{\circ}{M}-1}\\ \hdashline \mathbf{0}^{\mathrm T}_{\overset{\circ}{M}-1} & \mathbf{m}^{\mathrm T}\,[\mathbf{M}^{\mathrm T}(S)\mathbf{M}(S)]_{hh}\,\mathbf{m}\end{array}\right]\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2\cdot\mathbf{m}^{\mathrm T}\,\mathbf{H}_{hh}(S)\mathbf{m}, \qquad (84)$$

$$\mathbf{H}(S) = \mathbf{M}^{\mathrm T}(S)\mathbf{M}(S) = [\mathbf{I}_N - \boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)]\times$$
$$\times[\mathbf{I}_N - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}]. \qquad (85)$$

Итак, в (82)–(85) установлено

$$\Delta_{hh} = \boldsymbol{\delta}^{\mathrm T}(B/A,S;h)\,\boldsymbol{\delta}(B/A,S;h) = (\overset{\circ}{\theta}_{\overset{\circ}{m}(h)}(h))^2\cdot\mathbf{m}^{\mathrm T}\,\mathbf{H}_{hh}(S)\mathbf{m}\,. \qquad (86)$$

Введем $(h\times1)$-вектор $\mathbf{b} = (0,0,...,0,(\Delta_{hh})^{1/2})^{\mathrm T}$ такой, что выполняется $\mathbf{b}\,\mathbf{b}^{\mathrm T} = \boldsymbol{\Delta}(B/A,S)$, и вычислим определитель под знаком логарифма в числителе (76), применив правило $\det[\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm T}] = \det[\mathbf{A}]\cdot(1+\mathbf{b}^{\mathrm T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$:

$$c = \det[[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] + \boldsymbol{\Delta}(B/A,S)] =$$

$$= \det[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]\times\{1 + (0,0,...,0,(\Delta_{hh})^{1/2})\,\mathbf{A}^{-1}(0,0,...,0,(\Delta_{hh})^{1/2})^{\mathrm T}\} =$$

$$= \det[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]\cdot\{1 + (\Delta_{hh})^{1/2}[[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh}\,(\Delta_{hh})^{1/2}\}. \qquad (87)$$

Используя (87), для разности (76) получаем

$$\Delta_1(S,\overset{\circ}{S}) =$$
$$= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{\det[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]\cdot\{1 + (\Delta_{hh})^{1/2}[[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh}\,(\Delta_{hh})^{1/2}\}}{\det[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}) + n\cdot\boldsymbol{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})]}\right). \qquad (88)$$

Установим теперь соотношение $(h\times h)$-матриц $\mathbf{T}_P(S)$ и $\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})$ в (88). В соответствии с (68) для их разности выполняется $(k,q = 1,2,...,h)$

$$[\mathbf{T}_P(S) - \mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})]_{kq} = \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S;k,q) - \mathbf{P}(\overset{\circ}{S};k,q)] = \mathrm{tr}[\mathbf{P}(S) - \mathbf{P}(\overset{\circ}{S})]_{kq}\,. \qquad (89)$$

Учитывая (81), вычислим разность

$$\mathbf{P}(S) - \mathbf{P}(\overset{\circ}{S}) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)]^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S) -$$

$$-\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\;\vdots\;\boldsymbol{\delta}_R\right]\left[\left[\begin{array}{c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm T}\end{array}\right]\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\;\vdots\;\boldsymbol{\delta}_R]\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm T}\end{array}\right] =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)[\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S)\,\boldsymbol{\Sigma}_\xi^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)]^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm T}(S) -$$

$$-\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\ \vdots\ \boldsymbol{\delta}_R\right]\left[\begin{array}{c:c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) & \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R \\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) & \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S) \\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\end{array}\right]=a_1-a_2. \qquad (90)$$

Для вычисления члена a_2 в (90) применим формулу обращения блочной матрицы (она является частным случаем формулы [15, с. 302]):

$$\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B} & \mathbf{c} \\ \hdashline \mathbf{d}^{\mathrm{T}} & e\end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}\cdot f^{-1}\cdot\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}\cdot f^{-1} \\ \hdashline -f^{-1}\cdot\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} & f^{-1}\end{array}\right],\quad f=e-\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}. \quad (91)$$

В нашем случае выполняется

$$\mathbf{B}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S),\ \mathbf{c}=\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R,\ \mathbf{d}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S),\ e=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R, \qquad (92)$$

$$f=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R-\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R=\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\mathbf{M}(S)\,\boldsymbol{\delta}_R. (93)$$

Учитывая (91)–(93), получаем

$$a_2=\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\ \vdots\ \boldsymbol{\delta}_R\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{B}^{-1}+ & \\ +\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1} \\ \hdashline -f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1} & f^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S) \\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\end{array}\right]=$$

$$=\left[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\ \vdots\ \boldsymbol{\delta}_R\right]\times\left[\begin{array}{c}\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)+\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)- \\ -\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}} \\ \hdashline -f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)+f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\end{array}\right]=$$

$$=\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)+\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)-$$

$$-\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)+\boldsymbol{\delta}_R\cdot f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}. \quad (94)$$

Подставляя (94) в (90), получаем

$$\mathbf{P}(S)-\mathbf{P}(\overset{\mathrm{o}}{S})=-f^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\,\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)+$$

$$+f^{-1}\cdot\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R\,\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}+f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R\,\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)-f^{-1}\cdot\boldsymbol{\delta}_R\,\boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}. \quad (95)$$

Учитывая (81), для (k,q)-го элемента (95) получаем

$$[\mathbf{T}_P(S)-\mathbf{T}_P(\overset{\mathrm{o}}{S})]_{kq}=\mathrm{tr}[\mathbf{P}(S)-\mathbf{P}(\overset{\mathrm{o}}{S})]_{kq}=-f^{-1}\cdot\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{m}+$$

$$+f^{-1}\cdot\mathbf{m}^{\mathrm{T}}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\,\mathbf{m}+$$

$$+f^{-1}\cdot\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\ [\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)]_{hq}\ \mathbf{m}+$$

$$-f^{-1}\cdot\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\ [\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)]_{hq}[\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)\mathbf{B}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(S)\boldsymbol{\Sigma}_{\xi}^{-1}]_{kh}\ \mathbf{m}=$$

$$=-f^{-1}\cdot\mathbf{m}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{hq}[\mathbf{M}(S)]_{kh}\mathbf{m}, \qquad (96)$$

где $\mathbf{M}(S)$ $-(N\times N)$-матрица введена в (82).

Из (96), с учётом (68), следует (во второй строке (97) буква S опущена)

$$\mathbf{T}_P(S)-\mathbf{T}_P(\overset{\mathrm{o}}{S})=\mathrm{tr}_{\otimes}[\mathbf{P}(S)]-\mathrm{tr}_{\otimes}[\mathbf{P}(\overset{\mathrm{o}}{S})]=$$

$$= -f^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h1}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m} \\ \hline \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h2}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{1h}\,\mathbf{m} & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{2h}\,\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{hh}[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{hh}\,\mathbf{m} \end{array} \right] =$$

$$= -f^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(S)[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,, \tag{97}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{m}}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{m} & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_n & \mathbf{m} & \cdots & \mathbf{0}_n \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{m} \end{array} \right], \quad \mathbf{M}_{h\bullet}(S) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}_{h1}(S) \\ \hline \mathbf{M}_{h2}(S) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{M}_{hh}(S) \end{array} \right], \tag{98}$$

$$[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} = [\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{1h} \;\vdots\; [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{2h} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{hh}\,]. \tag{99}$$

Вычислим определитель в знаменателе (88), выполнив подстановку, которая следует из (97)

$$\mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S}) = \mathbf{T}_P(S) + f^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(S)\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,. \tag{100}$$

Применяя формулу для вычисления определителя матрицы $\det[\,\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,] = \det[\mathbf{A}] \cdot \det[\,\mathbf{I}_h + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\,]$ из [15, с. 302], получаем

$$\det[\,\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{\circ}{S})\,] =$$

$$= \det[\,\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S) + f^{-1} \cdot \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(S)\,[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,] =$$

$$= \det[\,\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] \times$$

$$\times \det[\,\mathbf{I}_h + f^{-1} \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,[\,\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}\, \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}\,]. \tag{101}$$

Подставляя (101) в (88), получаем

$$\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{1 + (\Delta_{hh})^{1/2} \cdot [[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh} \cdot (\Delta_{hh})^{1/2}}{\det[\mathbf{I}_h + f^{-1} \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]\, \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(S)]} \right). \tag{102}$$

Если $\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) > 0$, то структура $\overset{\circ}{S}$ лучше S; если $\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) < 0$, то структура S лучше $\overset{\circ}{S}$; если $\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) = 0$, то структура S лучше $\overset{\circ}{S}$ по принципу простоты.

Выполнение $\Delta_1(S, \overset{\circ}{S}) \le 0$ является условием так называемой редукции оптимальной по структуре модели. Из (102) для условия редукции получаем

$$\frac{1 + (\Delta_{hh})^{1/2} \cdot [[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh} \cdot (\Delta_{hh})^{1/2}}{\det[\mathbf{I}_h + f^{-1} \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\,[\mathbf{T}(\overset{\circ}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]\, \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(S)]} \le 1. \tag{103}$$

где Δ_{hh} и f – скалярные величины, определённые в (86) и (93) соответственно; $\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}})$ – $(h \times h)$-матрица, введённая в (67); $\mathbf{T}_P(S)$ – $(h \times h)$-матрица, введённая в (66, 68); матрица $\mathbf{M}(S)$ – идемпотентная $(N \times N)$-матрица, введённая в (82).

К сожалению, получить условие редукции (103) в простом виде удаётся только при выполнении дополнительных предположений, и это является предметом отдельного исследования.

Косвенное подтверждение истинности условия редукции. Установим здесь, какой вид принимает условие (103), если предположить, что коэффициенты в уравнении (1) являются детерминированными, а не случайными (для такого класса моделей задача структурной идентификации по принципам МГУА рассмотрена в [16]):

$$\boldsymbol{\theta}_i(k) = \overset{o}{\boldsymbol{\theta}}(k), \quad k = 1, 2, \ldots, h, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{104}$$

При выполнении (104) матрица $\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}_\eta$ в (103), введённая в (35), является нулевой $(N \times N)$-матрицей $\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}_\eta = \mathbf{O}_{N \times N}$, а матрица $\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}})$ из (67) – нулевой $(h \times h)$-матрицей $\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) = \mathbf{O}_{h \times h}$. Для $(h \times h)$-матрицы $\mathbf{T}_P(S)$ в (68) выполняется

$$\mathbf{T}_P(S) = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta(1,1)\, m(1) & \sigma_\zeta(1,2)\, m(1) & \cdots & \sigma_\zeta(1,h)\, m(1) \\ \sigma_\zeta(2,1)\, m(2) & \sigma_\zeta(2,2)\, m(2) & \cdots & \sigma_\zeta(2,h)\, m(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\zeta(h,1)\, m(h) & \sigma_\zeta(h,2)\, m(h) & \cdots & \sigma_\zeta(h,h)\, m(h) \end{bmatrix} \tag{105}$$

или

$$\mathbf{T}_P(S) = \mathrm{diag}\{m(1), m(2), \ldots, m(h)\} \times \mathbf{\Sigma}_\zeta, \tag{106}$$

а матрица $\mathbf{T}_P(\overset{o}{S})$ получается из $\mathbf{T}_P(S)$ заменой $m(k)$ на $\overset{o}{m}(k)$, $k = 1, 2, \ldots, h$.

Для знаменателя (103) в случае (104) выполняется

$$\det[\mathbf{I}_h + f^{-1} \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(S)]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}\, [n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\,\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h \bullet}(S)] = \frac{\det[n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]}{\det[n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]}. \tag{107}$$

Подставляя (107) в (103), получаем

$$\frac{\det[n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] \times \{1 + (\Delta_{hh})^{1/2} \cdot [[n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)]^{-1}]_{hh} \cdot (\Delta_{hh})^{1/2}\}}{\det[n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]} \le 1. \tag{108}$$

Вычисляя (108) аналогично [16], учитывая (86) для Δ_{hh} и вытекающие из (74) соотношения $m(k) = \overset{o}{m}(k)$, $k = 1, 2, \ldots, h-1$, и $m(h) = \overset{o}{m}(h) - 1$, получаем

$$= \frac{\det[\mathbf{\Sigma}_\zeta] \cdot \prod_{k=1}^{h} (n + m(k)) \times \{1 + (n + m(h))^{-1} \cdot (\Delta_{hh})^{1/2} [\mathbf{\Sigma}_\zeta^{-1}]_{hh} (\Delta_{hh})^{1/2}\}}{\det[\mathbf{\Sigma}_\zeta] \cdot \prod_{k=1}^{h} (n + \overset{o}{m}(k))} \le 1, \tag{109}$$

$$(\overset{o}{\theta}_{\overset{o}{m}(h)}(h))^2 \cdot \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_{hh}(S)\mathbf{m} \le ([\mathbf{\Sigma}_{\zeta}^{-1}]_{hh})^{-1}. \qquad (110)$$

Совпадение (110) с результатом (95) работы [16] и служит косвенным подтверждением истинности условия редукции (103).

Случай избыточного регрессора. Рассмотрим случай, когда в текущую структуру включен излишний регрессор. Предположим для простоты, что этот регрессор является последним регрессором в исходном множестве входных переменных X: он включен в модель для переменной с номером h, хотя не участвует в формировании ее значения. Тогда для выполняется

$$\mathbf{S}(k) = \overset{o}{\mathbf{S}}(k),\ k = 1, 2, \dots, h-1; \quad \mathbf{S}(h) = [\overset{o}{\mathbf{S}}(h) \mid \mathbf{s}\,], \qquad (111)$$

где $\overset{o}{\mathbf{S}}(h)$ – $(m \times \overset{o}{m}(h))$-матрица истинной структуры регрессионного уравнения для переменной с номером h; $\mathbf{S}(h)$ – $(m \times (\overset{o}{m}(h)+1))$-матрица текущей структуры; $\mathbf{s}$ – $(m \times 1)$-вектор, для которого выполняется

$$\mathbf{s} = (0, 0, \dots, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \qquad (112)$$

В этом случае $(h \times h)$-матрица $\mathbf{\Delta}(B/A, S)$ в (65) – так называемое смещение, обусловленное выбором ошибочной структуры S вместо истинной структуры $\overset{o}{S}$, является нулевой матрицей. Доказательство этого утверждения проводится аналогично (77)–(82).

Из различия $\overset{o}{\mathbf{S}}(h)$ и $\mathbf{S}(h)$ в (111)–(112) следует

$$\mathbf{R}(S, k) = \mathbf{R}(\overset{o}{S}, k),\ \ k = 1, 2, \dots, h-1, \qquad (113)$$

$$\mathbf{R}(S, h) = \mathbf{X}\mathbf{S}(h) = \mathbf{X}[\overset{o}{\mathbf{S}}(h) \mid \mathbf{s}\,] = [\,\mathbf{X}\overset{o}{\mathbf{S}}(h) \mid \mathbf{X}\mathbf{s}\,] = [\,\mathbf{R}(\overset{o}{S}, h) \mid \mathbf{r}\,], \qquad (114)$$

где $\mathbf{r}$ – $(n \times 1)$-вектор наблюдений избыточного регрессора.

Для матриц $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S)$ и $\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})$, с учётом (113)–(114), получаем

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(S) = [\,\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}) \mid \boldsymbol{\delta}_R\,], \quad \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}} = (\mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_n^{\mathrm{T}}, \dots, \mathbf{r}^{\mathrm{T}}). \qquad (115)$$

Для случая избыточного регрессора, аналогично результатам (97)–(100), получаем соотношение

$$\mathbf{T}_P(S) = \mathbf{T}_P(\overset{o}{S}) + f^{-1}(\overset{o}{S}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{h\bullet}(\overset{o}{S})[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})]_{\bullet h}\overline{\overline{\mathbf{m}}}, \qquad (116)$$

$$\mathbf{M}(\overset{o}{S}) = [\,\mathbf{I}_N - \underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}], \qquad (117)$$

– идемпотентная матрица;

$$f(\overset{o}{S}) = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R - \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S})(\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(\overset{o}{S}))^{-1}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_R = \boldsymbol{\delta}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}\mathbf{M}(\overset{o}{S})\,\boldsymbol{\delta}_R \qquad (118)$$

– положительная величина, поскольку матрицы $\mathbf{\Sigma}_{\xi}^{-1}$ и $\mathbf{M}(\overset{o}{S})$ положительно определены; $\boldsymbol{\delta}_R$ – $(N \times 1)$-вектор, определённый в (115).

Теперь рассмотрим разность

$$\Delta_2(S, \overset{o}{S}) = E\{ARS(S)\} - E\{ARS(\overset{o}{S})\} =$$

$$= \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\det \left[\mathbf{\Omega}_2 (B/A, S) \right]}{\det \left[\mathbf{\Omega}(B/A, \overset{o}{S}) \right]} \right) = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\det \left[[\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] \right]}{\det [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]} \right). \qquad (119)$$

Учитывая (116) и применяя формулу для вычисления определителя матрицы $\det [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}] = \det [\mathbf{A}] \cdot \det [\mathbf{I}_h + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]$ из [15, с. 302], получаем

$$\det [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(S)] =$$

$$= \det [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S}) + f^{-1}(\overset{o}{S}) \cdot \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(\overset{o}{S}) [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}}] =$$

$$= \det [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})] \times$$

$$\times \det [\mathbf{I}_h + f^{-1}(\overset{o}{S}) \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}} [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(\overset{o}{S})]. \qquad (120)$$

Подставляя (120) в (119), получаем

$$\Delta_2(S, \overset{o}{S}) =$$

$$= \frac{1}{h} \ln \left(\det [\mathbf{I}_h + f^{-1}(\overset{o}{S}) \cdot [\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}} [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(\overset{o}{S})] \right) > 0. \qquad (121)$$

Величина (121) положительна, поскольку положительна величина $f^{-1}(\overset{o}{S})$, а $[\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\overset{o}{S})]_{\bullet h} \overline{\overline{\mathbf{m}}} [\mathbf{T}(\overset{o}{\mathbf{\Lambda}}) + n \cdot \mathbf{\Sigma}_\zeta + \mathbf{T}_P(\overset{o}{S})]^{-1} \overline{\overline{\mathbf{m}}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{h\bullet}(\overset{o}{S})]$ – положительно определенная матрица.

Из (121) следует, что в случае избыточного регрессора истинная структура $\overset{o}{S}$ всегда лучше структуры S, а регрессор $\mathbf{r}$ действительно не следует включать в модель.

Заключение

По принципам метода группового учета аргументов построен и исследован критерий структурной идентификации для моделирования в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами. В схеме повторных наблюдений получены условия редукции (упрощения) систем регрессионных уравнений, оптимальных по составу регрессоров. Эти результаты обобщают результаты автора [11], где при исследовании критерия дополнительно предполагалась ортогональность пропущенного (избыточного) регрессора истинному множеству регрессоров.

Разработанный критерий является системным критерием структурной идентификации, при построении которого предполагается совместное оценивание коэффициентов регрессионных уравнений системы. В частном случае независимого оценивания коэффициентов в разных регрессионных уравнениях предложенный критерий представляет собой сумму критериев регулярности отдельных регрессионных уравнений, т. е. он является обобщением системного критерия регулярности, традиционно применяемого в МГУА.

Литература.

1. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.

2. Self-organizing methods in modelling: GMDH type algorithms / Ed. By S. J. Farlow. – New York, Basel : Marcel Decker Inc., 1984. – P. 350.

3. Ивахненко А. Г. Помехоустойчивость моделирования / А.Г. Ивахненко, В. С. Степашко. – Киев : Наукова думка, 1985. – 216 с.

4. Ивахненко А. Г. Самоорганизация прогнозирующих моделей / А. Г. Ивахненко, Й. А. Мюллер. – К. : Техніка, 1985. – 223 с.

5. Ивахненко А. Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным / А. Г. Ивахненко, Ю. П. Юрачковский. – М. : Радио и связь, 1987. – 120 с.

6. Madala H. R. Inductive Learning Algorithms for Complex System Modeling / H. R. Madala, A. G. Ivakhnenko. – London, Tokyo : CRC Press Inc., 1994. – 370 p.

7. Muller J.-A. Self-organizing Data Mining. Extracting Knowledge from Data / J.-A. Muller, F. Lemke. – Hamburg : Libri, 2000. – 250 p.

8. Сарычев А. П. Идентификация состояний структурно-неопределенных систем / А. П. Сарычев. – Днепропетровск : НАН Украины и НКА Украины, Институт технической механики, 2008. – 268 с.

9. Современные методы идентификации систем / Эйкхофф П., Ванечек А., Савараги Е., Соэда Т., Наказимо Т., Акаике Х., Райбман Н., Петерка В. / Под ред. П. Эйкхоффа ; пер. с англ. – М. : Мир, 1983. – 400 с.

10. Сарычев А. П. Итерационная процедура оценивания параметров системы регрессионных уравнений со случайными коэффициентами / А. П. Сарычев // Системні технології. – Випуск 4 (87). – 2013. – С. 99–110.

11. Сарычев А. П. Моделирование в классе систем регрессионных уравнений со случайными коэффициентами в условиях структурной неопределенности / А. П. Сарычев // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 2. – С. 27–41.

12. Сарычев А. П. Решение проблемы разбиения в МГУА при расчете критерия регулярности в условиях активного эксперимента / А. П. Сарычев // Автоматика. – 1989. – № 4. – С. 19–27.

13. Сарычев А. П. Определение J-оптимального множества регрессоров по повторным выборкам наблюдений / А. П. Сарычев // Автоматика. – 1993. – № 3. – С. 58–66.

14. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т Андерсон. ; пер. с англ. – М. : Физматгиз. – 1963. – 500 с.

15. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – 320 с.

16. Сарычев А. П. Моделирование в классе систем регрессионных уравнений на основе метода группового учета аргументов / А. П. Сарычев // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. – 2013. – № 2. – С. 8–24.