УДК 517.51+519.651.2

Л.П. ВАКАЛ, А.О. КАЛЕНЧУК-ПОРХАНОВА

АНАЛІТИЧНА ОБРОБКА ДАНИХ НА ОСНОВІ ЧЕБИШОВСЬКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Abstract: *In the paper we discuss methods and algorithms for Chebyshev approximation which can be used with success to solve main problems of analytical processing numerical data arrays. Algorithms based on the second method of Remez are proposed for the best uniform approximation of functions by linear and nonlinear expressions. For some algorithms estimates for all kinds of errors are given. Algorithms for the uniform piecewise polynomial approximation and for the best Chebyshev approximation of many-variables functions by sums of basic functions are also proposed. Some examples of application of elaborated algorithms for analytical data processing are given.*

Key words: *analytical data processing, compression of data arrays, data recovery, Chebyshev approximation, Remez methods, algorithms for best uniform approximations.*

Анотація: *У статті розглядаються методи й алгоритми чебишовської апроксимації функцій, які доцільно застосовувати для розв'язання основних задач аналітичної обробки масивів числових даних. Для побудови найкращих рівномірних наближень функцій однієї змінної лінійними і нелінійними виразами пропонуються алгоритми, які ґрунтуються на методі послідовних чебишовських інтерполяцій Є.Я. Ремеза. Для деяких алгоритмів наводяться оцінки усіх типів похибок. Пропонуються також алгоритми найкращого чебишовського наближення функцій багатьох змінних сумою базисних функцій та кускового рівномірного наближення поліномами. Наводяться приклади практичного застосування розроблених алгоритмів для аналітичної обробки даних.*

***Ключові слова*:** *аналітична обробка даних, стиснення масивів, відновлення інформації, чебишовська апроксимація, методи Ремеза, алгоритми побудови найкращих рівномірних наближень.*

Аннотация: *В статье рассматриваются методы и алгоритмы чебышевской аппроксимации функций, которые целесообразно применять для решения основных задач аналитической обработки массивов числовых данных. Для построения наилучших равномерных приближений функций одной переменной линейными и нелинейными выражениями предлагаются алгоритмы, основанные на методе последовательных чебышевских интерполяций Е.Я. Ремеза. Для некоторых алгоритмов приводятся оценки всех видов погрешностей. Предлагаются также алгоритмы наилучшего чебышевского приближения функций многих переменных суммой базисных функций и кусочного равномерного приближения полиномами. Приводятся примеры практического применения разработанных алгоритмов для аналитической обработки данных.*

***Ключевые слова*:** *аналитическая обработка данных, сжатие массивов, восстановление информации, чебышевская аппроксимация, методы Ремеза, алгоритмы построения наилучших равномерных приближений.*

1. Вступ

На сучасному етапі розвитку рівень інформаційного забезпечення став визначальним фактором розвитку економіки, науки, техніки і можна стверджувати, що від кількості та якості отриманої інформації суттєво залежить ефективність діяльності суспільства.

Одним із шляхів одержання інформації є дані про стан досліджуваних об'єктів і процесів різної природи як результати проведення вимірювань. Ці дані є, як правило, *дискретним представленням* у вигляді масивів числових даних *функціональних залежностей*, що характеризують відповідні об'єкти і процеси. Робота з масивами даних пов'язана з рядом серйозних труднощів, які виникають при необхідності:

– визначення функціональної закономірності природи процесу, що досліджується (наприклад, у вигляді емпіричної формули);

– їх використання для розв'язання прикладних проблем, наприклад, в задачах математичного моделювання і прогнозування;

– економного зберігання великих за обсягом масивів даних або їх швидкісної передачі по каналах зв'язку;

– відтворення значень відповідної функціональної залежності на «неосвітлених» вимірами ділянках.

Для подолання перелічених труднощів застосовується *аналітична обробка даних* із застосуванням методів і алгоритмів апроксимації (наближення) функцій. Дана стаття присвячена вирішенню основних задач аналітичної обробки даних із забезпеченням високої точності наближення і з використанням апроксимуючих аналітичних виразів різних типів.

2. Основні задачі аналітичної обробки даних

В залежності від мети обробки даних можна виділити такі основні задачі аналітичної обробки масивів числових даних, для розв'язання яких використовуються методи теорії апроксимації функцій.

Задача аналітичного представлення числових даних. Ця задача полягає в наближенні дискретно заданої функціональної залежності f аналітичним виразом F (апроксимантом). Наприклад, при математичному моделюванні виникає необхідність наближення дискретно заданих залежностей достатньо простими аналітичними виразами.

Задача пошуку емпіричних закономірностей за експериментальними даними (*побудова емпіричних формул*). Ця задача полягає у припущенні на основі практичного досвіду, що отримана таблиця значень x_i і y_i ($i=\overline{1,N}$) вимірюваних величин x і y є наближеним представленням деякого емпіричного закону $F(x;A)$ з невеликою кількістю параметрів $A=\{a_0, a_{1,\ldots,} a_n\}$, та у визначенні цих параметрів за певним способом наближення.

Задача стиснення числової інформації. Під стисненням великих за обсягом числових масивів даних розуміємо наближену заміну функції f, що дискретно задана на одновимірній чи багатовимірній сітці з великою кількістю точок, деяким аналітичним виразом F з невеликим числом параметрів. Ця задача характеризується коефіцієнтом стиснення C, який визначається за формулою

$$C=b(f)/b(F),$$

де $b(f)$, $b(F)$ – число біт, необхідних для зберігання відповідно дискретно заданої функції f і апроксиманта F [1].

Прикладом може бути отримання метеорологічної інформації у вигляді таблиць значень відповідних характеристик (температури, тиску повітря, швидкості вітру та ін.) на густій двовимірній (x,y) чи тривимірній (x,y,h) сітці, де x і y – географічні широта і довгота, h – висота над рівнем моря, які в залежності від розміру регіону і густини сітки можуть містити до сотень тисяч точок.

Задача наближеного відтворення значень дискретно заданої функції на "неосвітлених" вимірами ділянках. Такі задачі виникають, коли значення функції f відомі тільки у точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$ з області визначення S, яких недостатньо для проведення певних досліджень, і необхідно знайти спосіб наближеного обчислення значень функції f в інших точках з S.

На практиці вирішення цих задач необхідно, коли при дослідженні відповідних процесів і об'єктів отримання додаткових даних утруднено або взагалі неможливо, особливо при дослідженні природних процесів. Також часто виникає необхідність відтворення функції при переході від нерегулярної сітки до регулярної та при обробці цифрових моделей для картографо-математичного моделювання в географічних інформаційних системах (ГІСах).

Задача згладжування експериментальних даних. Ця задача виникає у випадках, коли функція f задана на густій сітці S своїми значеннями, які в результаті вимірювань можуть мати значні випадкові похибки. При цьому крива, що проходить через виміряні значення, має характер, який в цілому не властивий реальній функції f. З метою зменшення вказаних похибок застосовується згладжування експериментальних даних.

З точки зору теорії апроксимації, сформульовані вище задачі тісно пов'язані між собою і тому розв'язок однієї з задач часто застосовується для розв'язання інших.

3. Застосування чебишовського способу апроксимації в задачах аналітичної обробки даних

Для аналітичної обробки даних можуть використовуватися методи та алгоритми наближення функцій, що базуються на різних способах апроксимації. Найбільш поширеними на практиці є методи інтерполяційного, середньоквадратичного та рівномірного (чебишовського) способів апроксимації.

Чебишовський спосіб апроксимації має суттєву перевагу перед іншими способами по точності наближення. Головною ж перевагою цього способу є *забезпечення* апроксимантом *бажаної гарантованої точності наближення* функції в *усій* області наближення S, у тому числі і на "неосвітлених" вимірами ділянках.

Характеристикою точності чебишовської апроксимації служить величина відстані $L[F(x;A)]$ між функцією $f(x)$ і апроксимантом $F(x;A)$, яка у випадку наближення на множині точок $S=\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ визначається як

$$L[F(x;A)]=\|w(x)(f(x)-F(x;A))\|_C \equiv \max_{1\le i\le N}\left|w(x_i)(f(x_i)-F(x_i;A))\right|, \qquad (1)$$

де A – вектор параметрів $A=\{a_0,a_{1,\dots,}a_n\}$, $w(x)$ – деяка вагова функція ($w(x)\ne 0$).

Найбільш ефективний підхід до наближення функцій на основі способу рівномірної апроксимації – це знаходження апроксиманта найкращого наближення.

Для заданої функції $f(x)$ *найкращим зважено рівномірним наближенням* з вагою $w(x)$ в області $S=\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ називається такий апроксимант $F^*(x;A)$ з деякого класу функцій $\{F\}$, для якої величина $L[F]$ з (1) набуває свого найменшого можливого значення:

$$\min_{F\in\{F\}} L\left[F(x;A)\right]=L\left[F^*(x;A)\right]\equiv \max_{1\le i\le N}\left|w(x_i)\left(f(x_i)-F^*(x_i;A)\right)\right|. \qquad (2)$$

У свою чергу, величина $\rho=L\left[F^*(x;A)\right]$ називається *величиною найкращого зважено рівномірного наближення*. При ваговій функції $w(x)=1$ маємо найкраще абсолютне наближення, а при $w(x)=1/f(x)$ – найкраще відносне наближення.

При порівнянні різних способів апроксимації практичний інтерес становить питання про співвідношення між похибками найкращого рівномірного і найкращого середньоквадратичного наближень. Нехай апроксимуючі вирази $\breve{F}(x)$ і $F^*(x)$, що належать до одного класу $\{F\}$, здійснюють в області S найкраще середньоквадратичне і найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$. Відповідні функції похибок позначимо через $\breve{\varepsilon}(x) = f(x) - \breve{F}(x)$ і $\varepsilon^*(x) = f(x) - F^*(x)$. Тоді для максимум-норм (1) зазначених похибок справедлива нерівність

$$\left\| \varepsilon^* \right\|_C \le \left\| \breve{\varepsilon} \right\|_C .$$

Отже, найкраще рівномірне наближення в усій області наближення S дає меншу похибку, тобто кращу точність, ніж середньоквадратичне наближення апроксимантом того ж класу. При цьому середньоквадратичні похибки наближення апроксимантами $F^*(x)$ і $\breve{F}(x)$ є приблизно рівними [2].

Але інколи для певних класів $\{F\}$ апроксимуючих виразів і деяких областей наближення S може бути вказана стала переоцінки K, для якої

$$\left\| \breve{\varepsilon} \right\|_C \le K \left\| \varepsilon^* \right\|_C ,$$

коли f пробігає множину всіх функцій, неперервних на S. Так, для випадку наближення на скінченних дійсних інтервалах функцій однієї змінної алгебричними поліномами степеня $\le n$ існують сталі K_n, і при $n \to \infty$ K_n теж прямують до нескінченності, хоча й повільно (наприклад, $K_1 = 2{,}4$, $K_{10} = 3$) [3]. При наближенні функцій декількох змінних ситуація інша. Показано [4], що у цьому випадку при середньоквадратичній апроксимації порівняно з рівномірною можна отримати як завгодно велику у процентному відношенні похибку вже у найпростіших випадках. Так, навіть при наближенні функцій двох змінних многочленами першого степеня не можна задати ніякої верхньої границі для сталої переоцінки K.

Враховуючи сказане вище, при аналітичній обробці числових масивів даних для забезпечення високої точності їх заміни аналітичними виразами в усій області наближення слід застосовувати такі методи та алгоритми наближення функцій, що базуються на чебишовському способі апроксимації. Це особливо важливо в задачах наближеного відтворення значень дискретно заданої функції на "неосвітлених" вимірами ділянках.

4. Алгоритми і оцінки похибок найкращих рівномірних наближень різних типів

Слід зазначити, що довгий час широке застосування найкращих чебишовських наближень на практиці було дуже обмеженим через відсутність ефективних підходів до їх побудови. Вирішальний крок для розв'язання цієї проблеми було зроблено роботами видатного вітчизняного математика Є.Я. Ремеза, який запропонував ітераційні методи (перший і другий) побудови чебишовських наближень [5]. Перевагами вказаних методів є порівняно висока швидкість їх збіжності (у деяких випадках квадратична) і можливість стандартизації обчислень. Методи Є.Я. Ремеза створили підґрунтя для розробки конкретних алгоритмів знаходження на практиці найкращих чебишовських наближень різних типів (поліноміальних, дробово-раціональних, логарифмічних та ін.), у тому числі і для дискретно заданих функцій.

В основі методів Є.Я. Ремеза лежить теорема Чебишова, згідно з якою поліном $P_n^*(x)$ найкращого рівномірного наближення степеня n характеризується такою необхідною і достатньою умовою «чебишовського альтернансу»: на множині точок S повинні знайтися щонайменше $(n+2)$-і точки, в яких функція відхилення $w(x)(f(x)-P_n(x))$ досягає свого модуль-максимуму $L\left[P_n^*(x)\right]$ з чергуванням знаку.

Важливо зазначити, що теорема Чебишова про альтернанс справедлива і для наближень узагальненими поліномами, що є лінійною комбінацією функцій, які належать до систем Хаара, наприклад, для наближень експоненціальними сумами $E_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i e^{\alpha_i x}$ з фіксованими множниками α_i, тригонометричними поліномами $U_n(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i \cos\frac{\pi i}{l}x+b_i \sin\frac{\pi i}{l}x\right)$ та ін. [6]. Це означає, що для знаходження наближень такими узагальненими поліномами можна застосовувати методи Є.Я.Ремеза та алгоритми на їх основі.

Найбільшого поширення набули алгоритми, що ґрунтуються на другому методі Є.Я. Ремеза - *методі послідовних чебишовських інтерполяцій* (п.ч.і.). Цей метод є ітераційним і полягає у побудові послідовності наборів $(n+2)$-х точок валле-пуссенівського альтернансу (V – альтернансу), яка збігається до чебишовського альтернансу. Властивість V –альтернансу передбачає тільки чергування знаків функції відхилення $w(x)(f(x)-F(x;A))$ у точках набору. При цьому на кожній ітерації методу параметри поточного апроксиманта і відповідна величина наближення знаходяться в результаті розв'язку системи $(n+2)$-х алгебричних рівнянь, яка у залежності від типу апроксиманта є лінійною або нелінійною.

В алгоритмах, що базуються на методі п. ч. і. Є. Я. Ремеза, можна виділити такі основні блоки: вибір початкового V –альтернансного набору точок; розв'язання системи алгебричних рівнянь; заміна точок V –альтернансу на основі аналізу поведінки функції відхилення на усій множині точок S і перевірка критерію закінчення алгоритму.

Слід зазначити, що алгоритмічна реалізація методу п.ч.і. передбачає *три можливі варіанти* заміни точок при переході до наступного, покращеного V –альтернансного набору, а саме, *припустимий*, *напівоптимальний* і *оптимальний*. Причому практична реалізація оптимального варіанта заміни пов'язана зі значно більшими труднощами, ніж напівоптимального, і, особливо, припустимого варіантів. Слід зазначити, що більшість відомих алгоритмів п.ч.і., як правило, реалізують припустимий варіант заміни точок V – альтернансу [7-9].

Протягом багатьох років авторами в Інституті кібернетики НАН України ведуться роботи по алгоритмізації методів Є.Я. Ремеза, оцінці усіх видів похибок цих алгоритмів та по створенню відповідних програмних засобів [10–16]. При побудові чебишовських наближень різних типів у розроблених алгоритмах заміна точок V –альтернансних наборів відбувається за запропонованою А.О. Каленчук-Порхановою процедурою [10, 13], що реалізує *посилений напівоптимальний варіант* заміни, який на практиці співпадає з оптимальним і забезпечує *квадратичну швидкість збіжності* ітераційного процесу методу послідовних чебишовських інтерполяцій.

Чисельна реалізація розроблених алгоритмів також має ряд додаткових переваг, пов'язаних з оптимізацією цих алгоритмів за точністю та швидкодією [12]. Так, алгоритми можуть знаходити або апроксимант заданого фіксованого степеня (вхід за степенем) або такий апроксимант, який забезпечує задану точність наближення (вхід за точністю), яку не повинна перевищувати апостеріорна оцінка повної похибки апроксимації за відповідним алгоритмом. При цьому при дослідженні поведінки функції відхилення $w(x)(f(x)-F(x;A))$ в усіх точках множини S на кожному кроці чебишовських інтерполяцій враховується як *верхня*, так і *нижня* границі величини найкращого наближення, що дозволяє отримати більш точну оцінку повної похибки алгоритмів.

При аналізі *повної похибки* реалізації розроблених алгоритмів, а саме, *похибки постановки задачі*, *неусувної* та *обчислювальної*, використовувалися *дві схеми* оцінки похибки.

Згідно з *першою* з них, широко розповсюдженою на практиці, зазначена абсолютна похибка Δ не перевищує суми трьох основних видів похибок, а саме:

$$\Delta \le \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \tag{3}$$

де Δ_1 – похибка за рахунок дискретизації задачі; Δ_2 – похибка за рахунок неточності значень функції на сітці $S=\{x_1,\dots,x_N\}$; Δ_3 – обчислювальна похибка при реалізації алгоритму на ЕОМ.

Згідно з *другою* схемою [17], для оцінки повної похибки наближення вводиться процедура «попередньої апроксимації» функції $f(x)$ достатньо гладкою функцією $\tilde{f}(x)$, яка уточнює задані значення $\{f_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^N$ на сітці, при цьому $\tilde{f}(x)$ будується як чебишовський центр області допустимих функцій. Слід зазначити, що таке уточнення можливе тільки за наявності апріорної інформації про властивості гладкості функції $f(x)$. Цей підхід дозволяє в деяких випадках значно знизити спадкову похибку усієї задачі апроксимації. Досягається це за рахунок того, що:

– при такому підході за величину неточності вхідних даних приймається не похибка завдання функції $f(x)$, а похибка округлення при обчисленні функції $\tilde{f}(x)$ в точках сітки, що може бути в деяких випадках значно менше;

– уточнюються задані на сітці значення в тому випадку, коли через похибки завдання вектор значень $\{f_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^N$ не може відповідати жодній функції з заданого класу.

За другою схемою повна абсолютна похибка чебишовського наближення не буде перевищувати суми

$$\Delta \le \tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_2 + \tilde{\Delta}'_2 + \tilde{\Delta}_3, \tag{4}$$

де $\tilde{\Delta}_2$, $\tilde{\Delta}'_2$ і $\tilde{\Delta}_3$ аналогічні Δ_1, Δ_2 і Δ_3 з формули (3), а $\tilde{\Delta}_1 \le \max_{x\in S}\left|f(x)-\tilde{f}(x)\right|$. Наприклад, коли функція $f(x)$ задовольняє умові Ліпшиця з константою *L* для $\tilde{\Delta}_1$, було отримано оцінку

$$0 \le \tilde{\Delta}_1 \le \varepsilon_f + L\frac{h}{2}, \qquad (5)$$

де ε_f – точність завдання функції f на сітці, $h = \max\limits_{2 \le i \le N} |x_i - x_{i-1}|$, причому у вказаних межах $\tilde{\Delta}_1$ може набути будь-яке значення в залежності від значень $f(x)$ на сітці.

За першою схемою авторами були отримані *апріорні* та *апостеріорні мажорантні детерміновані* оцінки повної похибки, причому *непокращувані* для деяких класів функцій.

Наведемо деякі з них для випадків наближення функцій алгебричними поліномами $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ (алгоритм «А») і лінійною комбінацією $\sum\limits_{i=0}^{n} c_i T_i(x)$ поліномів Чебишова $T_i(x) = cos(i\, arccos\, x)$ (алгоритм «Б») [18].

Для повної похибки розв’язання на ЕОМ задачі найкращого абсолютного рівномірного наближення алгебричними поліномами справедливі (з точністю до головних членів) такі оцінки: *апріорна:*

$$\Delta = 4\varepsilon_f + \frac{h^2}{8}\left(M + n^4 M_2\right) + \eta_\tau + 5\rho \qquad (6)$$

і *апостеріорна:*

$$\Delta = 4\varepsilon_f + \frac{h^2}{8}\left(M + n^4 M_2\right) + 5\rho\ , \qquad (7)$$

де $M = \max\limits_{1 \le i \le N} \left| f\ (x_i) \right|$;

$M_2 = \max\limits_{2 \le i \le N-1} \left| \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}x_i + x_i^2} \right|$;

η_τ – заданий параметр критерію кінця алгоритму;

τ – розрядність мантиси чисел;

ρ – величина найкращого наближення, обчислена на ЕОМ за алгоритмом «А» або за алгоритмом «Б»;

ε_f і h – ті ж, що й у формулі (5).

На відміну від поліноміального випадку при найкращому рівномірному наближенні раціональними дробами $R_{m,k}(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \Big/ \sum\limits_{j=0}^{k} b_j x^j$ збіжність чебишовських інтерполяцій теоретично доведена тільки за умови близькості початкового наближення до шуканого найкращого апроксиманта [19]. Тому для практичної побудови дробово-раціональних наближень було застосовано підхід, що поєднує переваги методу послідовних чебишовських інтерполяцій, зокрема, високу швидкість збіжності, і методу Вернера [20], який збігається з *довільного* початкового наближення [19]. Цей підхід було реалізовано у *комбінованому алгоритмі* [13].

Ідея цього алгоритму полягає в тому, що для одержання апроксиманта спочатку застосовується другий метод Є.Я. Ремеза з обов'язковою перевіркою його збіжності на кожному кроці чебишовських інтерполяцій. У випадках, коли збіжність не порушується, метод п.ч.і. працює до кінця, тобто до отримання найкращого дробово-раціонального апроксиманта. Якщо ж на якомусь кроці п.ч.і. збіжність порушується (наприклад, кількість точок V –альтернансу менше $m+k+2$), то вступає в роботу алгоритм Вернера для одержання початкового наближення, що має V – альтернансний набір, який містить не менше ($m+k+2$) точок. Після цього працює метод п.ч.і. з використанням одержаного початкового наближення, збіжність якого буде забезпечена (за виключенням рідких випадків виродження).

Для оцінок повних похибок розв'язання на ЕОМ задачі найкращого рівномірного дробово-раціонального наближення за розробленим алгоритмом з використанням схеми (3) були отримані аналоги оцінок для поліноміального випадку [17].

Слід додати, що використання описаних вище алгоритмів поліноміального наближення дозволяє знаходити також найкращі рівномірні наближення деякими нелінійними виразами, наприклад, експоненціальними $a_0\,exp\left(a_1x+\ldots+a_nx^n\right)$, логарифмічними $ln\left[a_n\left(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\right)\right]$ та ін., для яких доведені відповідні обмінні теореми і отримані формули для перерахунку параметрів наближення [21].

Для побудови найкращого рівномірного наближення функції багатьох (k) змінних $f(X)=f(x_1,\ldots,x_k)$, що задана на множині N точок $\left\{X^{(1)},\ldots,X^{(N)}\right\}$, узагальненими поліномами $F_n(X)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(X)$ застосовується метод, який є аналогом методу п.ч.і. Є.Я. Ремеза вирішення задачі найкращого чебишовського наближення шляхом зведення цієї задачі до *задачі лінійного програмування* з невід'ємними коефіцієнтами [22]. У відповідному алгоритмі реалізуються *пряма* і *двоїста задачі* лінійного програмування. При цьому головна задача – двоїста, яка розв'язується модифікованим симплекс-методом з урахуванням того, що на практиці кількість рівнянь N значно більша числа невідомих n, і таблиця ″розширеного базису″ розміру $(n+2,n+4)$ при *модифікованому симплекс-методі* суттєво менша за опорну таблицю $(n+2,N)$ прямого симплекс-методу. Для більшого підвищення ефективності алгоритму та його оптимізації за точністю і швидкодією симплекс-таблиця замінюється *стисненою* (більш, ніж удвічі), але рівноцінною за поданою інформацією таблицею, яка вже містить допустимий базисний розв'язок. Крім того, в процесі розв'язання двоїстої задачі реалізується напівоптимальний варіант переходу від одного допустимого базисного розв'язку до наступного [13, 16].

У ряді випадків, особливо при наближенні на великих відрізках, доцільно застосовувати кускові наближення. При такому наближенні, завдяки розбиттю усього відрізку апроксимації $[\alpha,\beta]$

на сегменти $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = \overline{1,r}$, $\alpha \le t_0 < t_1 < \ldots < t_r \le \beta$) та наближенні окремо на кожному з них заданої функції f найкращим рівномірним апроксимантом F^*, бажана точність наближення може бути забезпечена при менших значеннях степеня цього апроксиманта.

З точки зору точності апроксимації, найбільший інтерес представляє наближення з оптимальними вузлами t_0, $t_1, \ldots, t_r$ розбиття, оскільки похибка рівномірного кускового наближення у цьому випадку буде найменшою. Авторами розроблено достатньо *простий* і *ефективний* алгоритм, який дозволяє для рівномірної кускової апроксимації функцій поліномами знаходити вузли розбиття, що практично співпадають з оптимальними [23]. Цей алгоритм складається з двох етапів. На першому – визначається мінімальне число вузлів, необхідне для наближення із заданою похибкою, а на другому – знаходяться оптимальні вузли і відповідне рівномірне кусково-поліноміальне наближення. На кожному з етапів застосовується однотипна процедура обчислення довжини і вузлів поточного сегмента. При цьому принципово новий підхід полягає у визначенні коефіцієнта зменшення довжини сегмента на основі оцінки похибки кусково-поліноміальної апроксимації з урахуванням її послідовного зменшення на кожному кроці алгоритму.

З метою підвищення ефективності застосування вказаних вище алгоритмів побудови найкращих чебишовських наближень для аналітичної обробки масивів числових даних було розроблено ряд допоміжних заходів. Так, для зменшення похибки Δ_2 (похибки вхідних даних) за рахунок неточності значень дискретної функції $f(x)$ створено алгоритм *локалізації* і *корекції* помилкових значень, який базується на аналізі скінченних різниць цієї функції [24]. Крім того, для підвищення точності наближення експериментальних даних емпіричними формулами розроблено алгоритм визначення найбільш підходящого типу цієї формули [25].

5. Висновки

Розроблені авторами алгоритми і відповідні комплекси програм побудови найкращих чебишовських наближень функцій однієї та декількох змінних застосовувалися протягом багатьох років для аналітичної обробки масивів числових даних у різних областях науки і техніки [14]. Наприклад, вони використовувалися для стиснення великих масивів інформації при розрахунку характеристик динамічних систем (у тому числі, для оборонних цілей), профілів автомобільних і залізних доріг, сейсмостійкості балок і перекриттів; для відновлення початкових аерологічних полів над «неосвітленими» вимірами територіями; для аналітичного представлення даних геофізичних спостережень і прогнозу (відновлення) цифрових характеристик оптико-фізичного стану атмосфери й океану; для наближеного відтворення значень концентрацій радіонуклідів при побудові карт забруднень проммайданчику комплексу “Вектор” у зоні відчуження ЧАЕС; для аналітичного представлення профілів деяких хімічних елементів з метою узгодження їх з профілями швидкостей течії при розрахунку динамічних складових відповідних потоків.

Описаний у статті апарат побудови найкращих рівномірних наближень може ефективно використовуватись для розв’язання актуальної проблеми обробки екологічної інформації при математичному моделюванні з метою отримання довготермінових екологічних прогнозів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 297 с.
2. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. – М.: Связь, 1969. – 293 с.
3. Powell M. I. D. On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria // Computer J. – 1967. – Vol. 9, №4. – P. 404–407.
4. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. – К.: Наук. думка, 1969. – 623 с.
6. Бердышев В.И., Субботин Ю.Н. Численные методы приближения функций. – Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. – 120 с.
7. Stiefel E. Numerical methods of Tchebysheff approximation // Proc. Symposium Univ. of Wisconsin. April 1958. – Madison: Univ. Press. – 1959. – P. 217–232.
8. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
9. Монцибович Б.Р., Попов Б.А. Наилучшие приближения табличных функций (алгоритмы и программы): В 2 ч. – К.: Ин-т кибернетики, 1973. – Ч. 1: Алгоритмы для малых ЦВМ. – 214 с.
10. Олександренко В.Л., Порханова А.О. Побудова чебишовського поліноміального наближення функції однієї змінної за методом підвищуючої дії // Автоматика. – 1967. – № 4. – С. 87–94.
11. Порханова А.А. К вопросу об исследовании полной погрешности полиномиальной чебышевской аппроксимации // Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов.– Киев: Ин-т кибернетики. – 1969. – Вып. 5. – С. 127–137.
12. Каленчук-Порханова А.А. Об одном алгоритме полиномиальной чебышевской аппроксимации // Оптимизация вычислительных методов. – К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1974. – С. 45–51.
13. Каленчук-Порханова А.А. Аппроксимация функций одной и многих переменных // Численные методы для многопроцессорного вычислительного комплекса ЕС. – М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1987. – С. 366–395.
14. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Об одном способе преобразования экологической информации // Технические и программные средства систем экологического мониторинга. – Киев: Ин-т кибернетики, 1994. – С. 76–80.
15. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Комплекс эффективных алгоритмов и программ обработки информации // Праці 3-ї укр. конф. з автоматич. керування. (Автоматика-96). – Т. 1. – Севастополь: СевГТУ. – 1995. – С. 201.
16. Каленчук-Порханова Ж., Вакал Л. Найкраще рівномірне наближення функцій багатьох змінних // Тези доповідей Міжнарод. математ. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. – Дрогобич-Львів: ІППММ НАНУ. – 2004. – С. 94.
17. Каленчук-Порханова А.А. Алгоритмы и анализ погрешности наилучшей чебышевской аппроксимации одной переменной // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. теории приближения функций (Калуга, 1975). – М. – 1977. – С. 213–218.
18. Иванов В.В., Каленчук А.А. Об эффективности алгоритмов полиномиальных и дробно-рациональных чебышевских приближений // Конструктивная теория функций. – София, 1983. – С. 72–77.
19. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remez algorithm // Numerische Mathematik. – 1965. – Vol. 7, № 4. – P. 322–330.
20. Werner H. Tschebysceff Approximation im Berich der Rationalen Funktionen bei Verliegen einer Guten Ausgansnäherung // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1962. – Vol. 10, № 3. – P. 205–219.
21. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наукова думка, 1980. – 352 с.
22. Александренко В.Л. Алгоритм построения приближённого равномерно-наилучшего решения системы несовместных линейных уравнений // Алгоритмы и алгоритмические языки. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – Вып. 3. – С. 57–74.
23. Вакал Л.П. Рівномірне кусково-поліноміальне наближення // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. – 2006. – №5. (У друці).
24. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Підвищення точності алгоритмів чебишовського наближення // Журнал обчисл. та прикл. математики. – 2004. – №2(91). – С. 93.
25. Вакал Л.П. Про один підхід до автоматизації процесу вибору типу емпіричної формули // Интеллектуальные информационно-аналитические системы и комплексы. – Киев: Ин-т кибернетики, 2000. – С. 53–62.