УДК 519.1

З.М. АСЕЛЬДЕРОВ, А.Г. ДОНЕЦ, Л.З. ФРОЛОВА

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА-ПОЛЛАКА

1. Введение

Существуют задачи, постановки которых естественным путем связаны между собой, так как одна из них является частным случаем другой.

Задача 1. Минимальное остовное дерево

На плоскости задано n точек. Необходимо построить дерево, вершинами которого являются эти точки, с минимальной суммарной длиной рёбер.

Решением данной задачи является список, содержащий $n-1$ пару точек. Каждая пара представляет ребро такого дерева. Задача построения евклидова минимального остовного дерева (МОД) возникает в приложениях, касающихся различного рода сетей. Однако МОД не всегда соответствует наикратчайшей из возможных сетей, соединяющих заданные точки, при условии, что к исходному множеству не запрещено добавлять новые точки. Если такое ограничение действительно отсутствует, то дерево, имеющее наикратчайшую длину, называется деревом Штейнера по имени соответствующей задачи.

К задаче Штейнера должным образом привлечено внимание исследователей лишь за последние десятилетия, и число публикаций на эту тему растет с каждым годом. Формулировка задачи за это время претерпела много изменений. Воспользуемся формальной постановкой задачи, предложенной в [1].

Задача 2. Минимальное дерево Штейнера

Задано множество n точек на плоскости и положительное число K. Существует ли такое конечное подмножество Q точек плоскости, что для множества вершин $P \bigcup Q$ существует остовное дерево с весом не более K, где вес ребра $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ равен евклидову расстоянию $\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{1/2}$ между вершинами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Дерево Штейнера на множестве вершин A называется полным, если в нем степени всех дополнительных вершин равны 3, а вершины из A имеют степень 1.

В 1977 году Гэри, Грэхем и Джонсон в [2] доказали принадлежность данной задачи классу NP-полных задач. Это послужило дополнительным стимулом для поиска эвристических алгоритмов решения задачи минимального дерева Штейнера (МДШ). Так как задача МОД имеет полиномиальное решение, то она естественным образом послужила начальным приближением в этих поисках.

2. Проблема Гильберта-Поллака

Пусть на плоскости задано произвольное множество из n точек. Обозначим L_M длину минимального остовного дерева, которое стягивает эти точки, и L_S – длину минимального дерева Штейнера. В 1968 году Гильберт и Поллак в [3] высказали гипотезу, которая носит их имя и которая до сих пор не доказана и не опровергнута.

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2004, № 1

Гипотеза Гильберта-Поллака

Для любого конечного множества точек на плоскости

$$\sqrt{3}/2 \le L_S / L_M \le 1. \tag{1}$$

Как известно, минимальное дерево Штейнера состоит из набора полных деревьев Штейнера на подмножествах $A_i\,(i=1,2,...,k)$, где $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = P$. Пусть σ_i обозначает длину соответствующего полного дерева Штейнера, то есть $L_S(P)=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k$. Обозначим μ_i длину минимального остовного дерева на множестве вершин A_i. Объединение всех этих остовных деревьев не обязательно составляют МОД на всем множестве P, поэтому $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k \ge L_M(P)$. Но гипотеза Гильберта-Поллака утверждает, что для каждого $1 \le i \le k$ справедливо $\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sigma_i / \mu_i \le 1$.

Легко привести примеры, когда левая и правая границы (1) достигаются. В указанной статье Гильберт и Поллак доказали справедливость гипотезы для числа точек $n=3$. Затем Поллак в 1978 г. доказал ее в [4] для $n=4$, а в 1981 г. Ду и Хванг в [5] упростили последнее доказательство. В 1985 году в [6] те же Ду, Яо и Хванг доказывают справедливость гипотезы для $n=5$.

Предпринимались попытки приблизиться в общем доказательстве гипотезы к нижней границе (1), которая приближенно равна 0,86603. Грехэм и Хванг [7] в 1976 году доказали, что $L_S(P)/L_M(P) \ge 0{,}69984$. Затем Чанг и Хванг [8] в 1978 году доводят это число до 0,74309. А в 1985 году Чанг и Грехэм [9] достигли левой границы 0,82416. Были и другие попытки улучшить левую границу этого соотношения [10, 11, 12, 13].

3. Параметрическое представление дерева Штейнера

Данная работа представляет собой развитие [14], в которой предлагался новый подход к этой проблеме, позволяющий свести ее к решению задачи нелинейного программирования.

Рассмотрим решение задачи Штейнера для $n=4$. В отличие от обычного, традиционного представления в виде графа будем рассматривать все решения задачи (известно, что их два) в параметрическом виде, где параметрами являются длины участков (отрезков) дерева Штейнера. Кроме того, преобразуем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы первая точка P_1 совпадала с началом координат, а инцидентный ей отрезок l_1 был направлен вверх вдоль оси OY (рис. 1,а). Это ведет к тому, что отрезок l_2 будет иметь угол наклона 150^0, а отрезок l_3 – соответственно $+30^0$, а все остальные отрезки – параллельны этим трем. Координаты заданных точек легко вычисляются через параметры вектора $L=(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$.

$$\mathrm{P}_2\left(-\frac{\mathrm{l}_2\sqrt{3}}{2};\ \mathrm{l}_1+\frac{\mathrm{l}_2}{2}\right);\ \mathrm{P}_3\left(\frac{\mathrm{l}_3\sqrt{3}}{2};\ \mathrm{l}_1+\frac{\mathrm{l}_3}{2}+\mathrm{l}_4\right);$$
$$\mathrm{P}_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{l}_3+\mathrm{l}_5);\ \mathrm{l}_1+\frac{\mathrm{l}_3}{2}-\frac{\mathrm{l}_5}{2}\right).$$

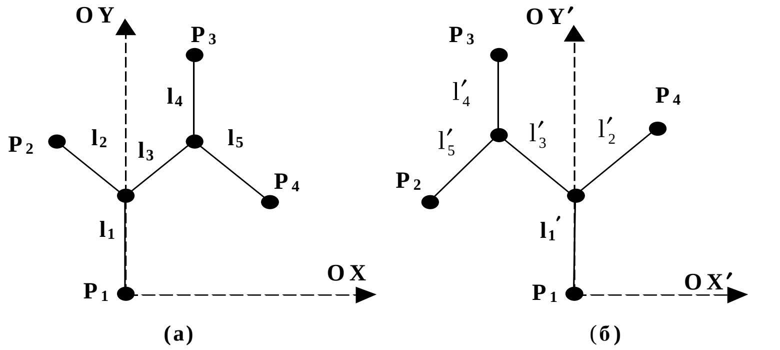

Рис. 1. Параметрическое представление дерева Штейнера

Каждое расстояние между заданными точками (вершинами) можно представить в виде длины некоторого вектора пространственной декартовой системы координат.

$$|P_1P_2| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_1; l_2; l_1 + l_2)\right|;$$

$$|P_1P_3| = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_1 l_3 + l_3 l_4 + 2 l_1 l_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_1 + l_3; l_3 + l_4; l_1 + l_4)\right|;$$

$$|P_1P_4| = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + l_5^2 + l_1 l_3 + l_3 l_5 - l_1 l_5} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_1 + l_3; l_3 + l_5; l_1 - l_5)\right|;$$

$$|P_2P_3| = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_2 l_3 + l_3 l_4 - l_2 l_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_2 + l_3; l_3 + l_4; l_2 - l_4)\right|;$$

$$|P_2P_4| = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + l_5^2 + l_2 l_3 + l_3 l_5 + 2 l_2 l_5} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_2 + l_3; l_3 + l_5; l_2 + l_5)\right|;$$

$$|P_3P_4| = \sqrt{l_4^2 + l_5^2 + l_4 l_5} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(l_4; l_5; l_4 + l_5)\right|.$$

Параметрическое представление минимального дерева Штейнера позволяет для небольших значений числа заданных точек решить вопрос о справедливости гипотезы Гильберта-Поллака. Число всех возможных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}, а для $n = 4$ оно равно 16. Попытаемся отобрать те деревья, которые могут быть МОД. Из всего числа можно отбросить 4 дерева, в которых пересекаются 2 диагонали P_1P_3 и P_2P_4, так как они заведомо не могут быть минимальными. Для дальнейшего отбора сделаем предположения, которые не нарушат общности: ввиду того, что для $n = 4$ дерево Штейнера имеет две оси симметрии, его можно расположить так, чтобы выполнялись два неравенства, которые назовем базовыми.

$$|P_1P_4| \ge |P_2P_3|, \text{ или } l_1^2 - l_2^2 - l_4^2 + l_5^2 - l_2l_3 + l_2l_4 + l_1l_3 - l_1l_5 - l_3l_4 + l_3l_5 \ge 0; \quad (2)$$

$$|P_3P_4| \ge |P_1P_2|, \text{ или } l_4^2 + l_5^2 - l_1^2 - l_2^2 + l_4l_5 - l_1l_2 \ge 0.$$

Рассмотрим оставшиеся 12 видов остовных деревьев (рис. 2).

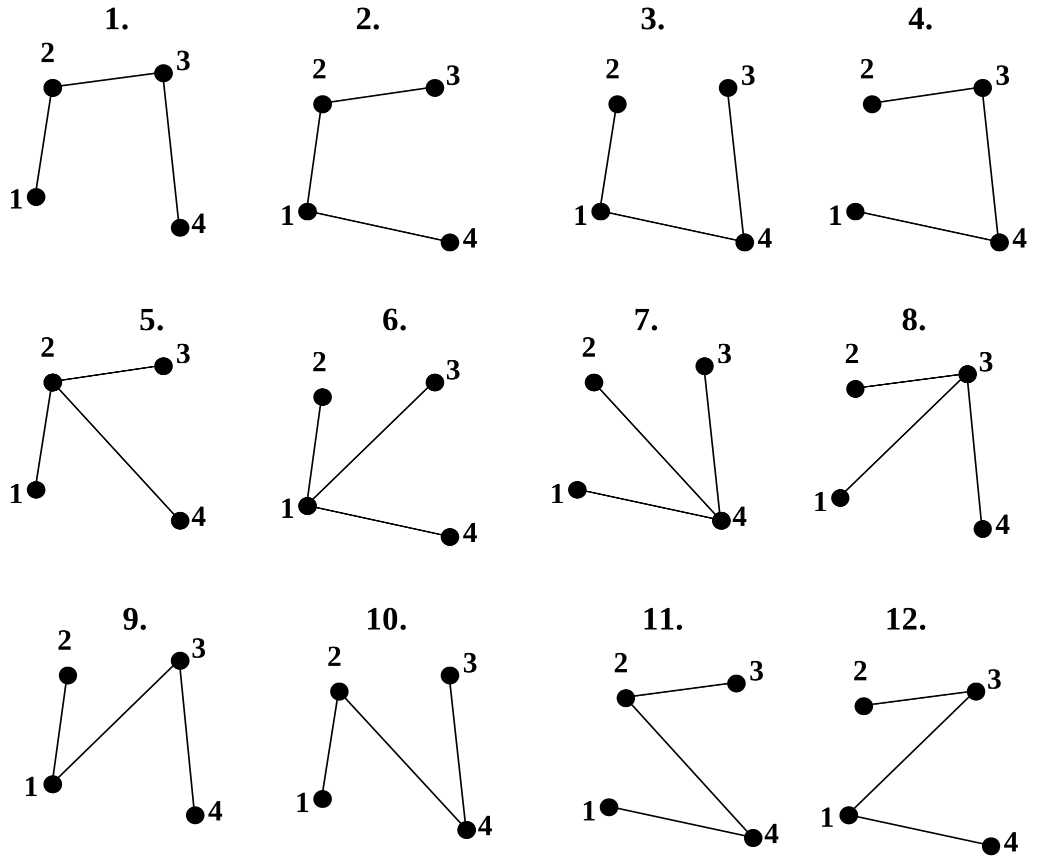

Рис. 2. Допустимые остовные деревья для n = 4

Напомним, что в [14] было найдено условие того, что вариант (а) на рис. 1 является оптимальным:

$$2l_3^2 + l_3(s_1 + s_2) - s_1s_2 > 0, \; s_1 = l_1 + l_4, \text{ а } s_2 = l_2 + l_5. \quad (3)$$

Из оставшихся 12 случаев остовных деревьев следует исключить случай 3, так как в нем можно заменить отрезок P_1P_4 на меньший отрезок P_2P_3, а также случай 4, так как в нем можно заменить отрезок P_3P_4 на меньший отрезок P_1P_2. Случай 7 ввиду условий (2) хуже случая 5, поэтому его также можно исключить. Рассмотрим теперь случай 11. Если его выбрать в качестве МОД, то должны выполняться неравенства

$$|P_1P_2| \ge |P_1P_4|, \text{ или } l_1l_2 + l_2^2 \ge l_3^2 + l_5^2 + l_1l_3 + l_3l_5 - l_1l_5; \quad (4)$$

$$|P_3P_4| \ge |P_2P_3|, \text{ или } l_4l_5 + l_5^2 \ge l_2^2 + l_3^2 + l_2l_3 + l_3l_4 - l_2l_4.$$

Если сложить эти неравенства, получим новое:

$$2l_3^2 + l_3(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - (l_1 + l_4)(l_2 + l_5) \le 0 .$$

Но это неравенство противоречит (2), а это может быть, если построение дерева Штейнера не оптимально, что не соответствует начальным установкам. Это значит, что случай 11 можно исключить. В случае 12 также: если использовать неравенства $|P_1P_2| \ge |P_2P_3|$ и $|P_3P_4| \ge |P_1P_4|$, то придем к тому же противоречию, то есть случай 12 также можно исключить.

В результате остается семь возможных остовных деревьев, которые перечислены ниже:

$$\begin{aligned}&M_1(P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4);\ M_2(P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_1P_4);\ M_3(P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_2P_4);\\ &M_4(P_1P_2,\ P_2P_4,\ P_3P_4);\ M_5(P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_3P_4);\ M_6(P_1P_2,\ P_1P_3,\ P_1P_4);\\ &M_7(P_2P_3,\ P_1P_3,\ P_3P_4).\end{aligned} \tag{5}$$

4. Постановка задачи и перспективы ее решения

Рассмотрим дерево M_1. Для того, чтобы доказать неравенство (1), необходимо решить следующую задачу:

Минимизировать $$f(L) = \sum_{i=1}^{5} l_i - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(|P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_4|\right) \tag{6}$$

при базовых ограничениях и следующих:

$$\begin{aligned}
&|P_1P_3| \ge |P_1P_2| \quad \text{или} \quad -l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - l_1l_2 + l_1l_3 + 2l_1l_4 + l_3l_4 \ge 0;\\
&|P_1P_3| \ge |P_2P_3| \quad \text{или} \quad l_1^2 - l_2^2 + l_1l_3 + 2l_1l_4 - l_2l_3 + l_2l_4 \ge 0;\\
&|P_1P_4| \ge |P_3P_4| \quad \text{или} \quad l_1^2 + l_3^2 - l_4^2 + l_1l_3 - l_1l_5 + l_3l_5 - l_4l_5 \ge 0;\\
&|P_2P_4| \ge |P_2P_3| \quad \text{или} \quad -l_4^2 + l_5^2 + l_3l_5 + 2l_2l_5 - l_3l_4 + l_2l_4 \ge 0;\\
&|P_2P_4| \ge |P_3P_4| \quad \text{или} \quad l_2^2 + l_3^2 - l_4^2 + l_2l_3 + 2l_2l_5 + l_3l_5 - l_4l_5 \ge 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Существуют вычислительные методы, решающие подобные задачи. Напомним, что функция, которую необходимо минимизировать, есть $f(L) = \sum_{i=1}^{2n-3} l_i - \sqrt{3}\big/2\, L_M(P)$. Если выбрано дерево, претендующее на МОД, то ограничения состоят из трех типов. Первый тип ограничений представляет условия, которые уменьшают перебор МОД (симметрия, фиксированные отношения ребер и т.д.). Второй тип обеспечивает условия минимальности выбранного дерева Штейнера (для $n = 4$ это (3)). Третий тип – это условие того, что любое, не включенное в МОД ребро, больше всех ребер, с которыми оно составляет цикл.

Для решения вопроса о справедливости гипотезы для $n = 4$ этим способом необходимо решить 7 задач, в которых три ограничения (2 – 3) будут присутствовать во всех задачах, а остальные семь типа (7) будут меняться в каждой задаче в зависимости от выбранного МОД.

Для $n = 5$ число остовных деревьев равно $5^{5-2} = 125$. Однако не все они могут претендовать на МОД. Так как рассматриваются только полные деревья Штейнера, то в МОД не могут быть вершины со степенью 4, так как тогда угол выпуклого пятиугольника будет больше 180^0, что невозможно. Точно так же, как и для случая четырех вершин, отбрасываются деревья с пересекающимися ребрами. В результате останутся только 49 деревьев, которые перечислены на рис. 3.

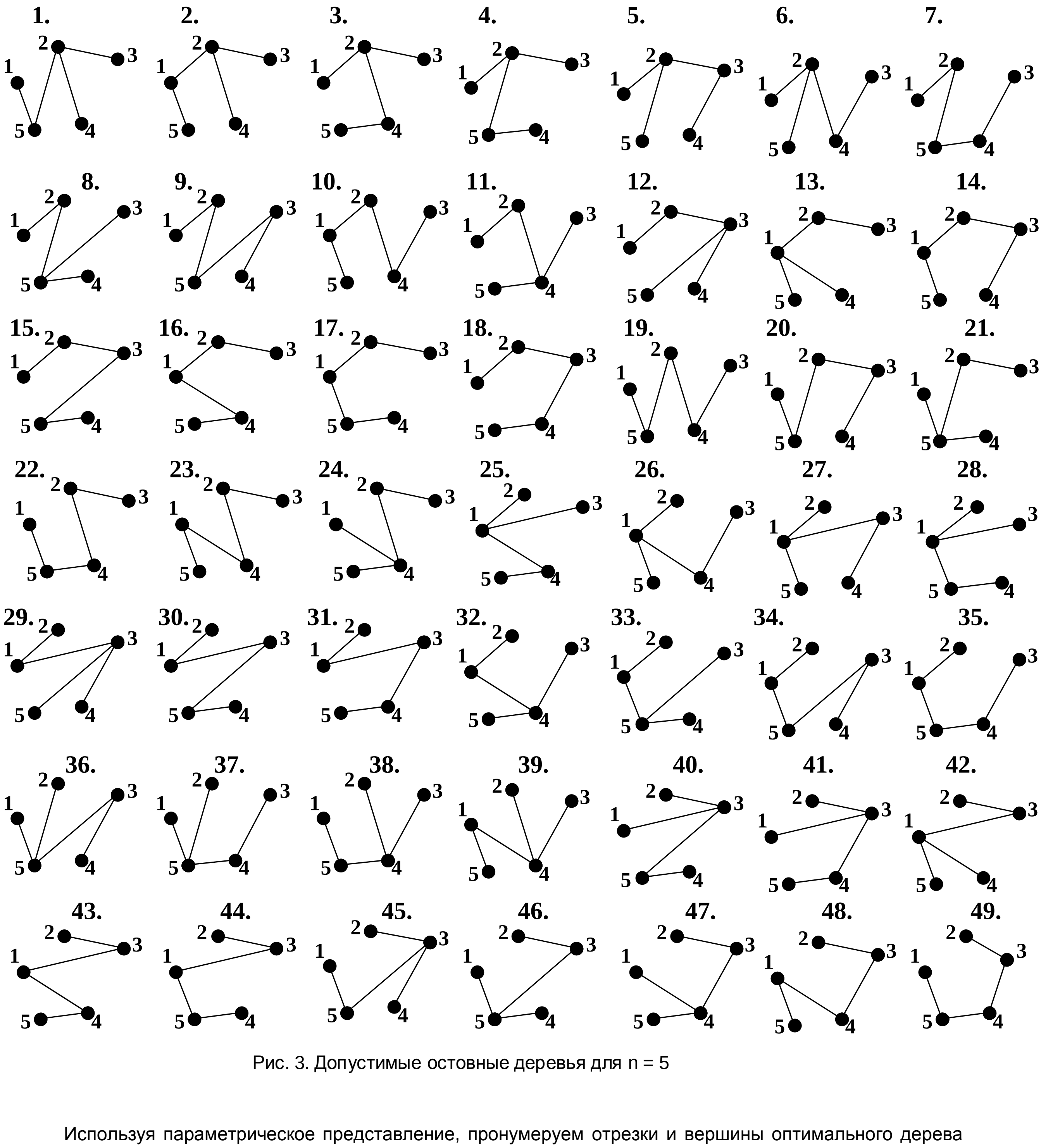

Рис. 3. Допустимые остовные деревья для n = 5

Используя параметрическое представление, пронумеруем отрезки и вершины оптимального дерева Штейнера, как на рис. 4.

В качестве первого типа ограничений можно выбрать $|P_1P_2| \geq |P_1P_5|$. Если это не так, то этого можно добиться, повернув рисунок на 180^0 вокруг оси OY и поменяв нумерацию на обратную. Если теперь это неравенство применить к рис. 3, то можно еще отсеять 11 вариантов с номерами 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, так как в них можно добиться улучшения МОД за счет замены ребра 12 на меньшее 15. Пользуясь рис. 4, легко выразить координаты точек $P_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$ через параметры вектора $L=\left(l_1,l_2,...,l_7\right)$. После этого можно построить еще 4 дерева Штейнера и найти их длину, которую обозначим $S_i\left(i=1,2,3,4\right)$.

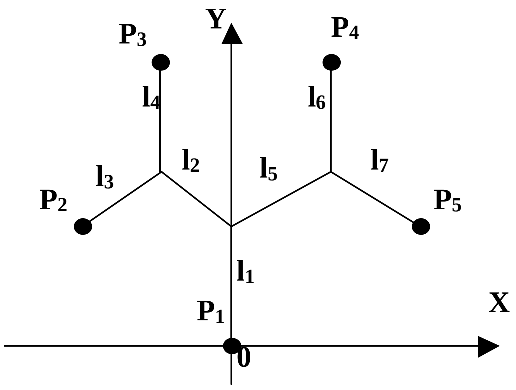

Рис. 4. Дерево Штейнера для n = 5

Для решения задачи получим еще четыре ограничения типа $\sum_{i=1}^{7} l_i \le S_i$. Первые пять ограничений позволят отсеять некоторые из остовных деревьев на рис. 3. Затем для каждого оставшегося дерева можно решать задачу минимизации функции при всех ограничениях, включая и ограничения третьего типа.

5. Выводы

Для больших значений n можно разработать комплекс программ, состоящих из трех алгоритмов.

$A1$ – алгоритм, перебирающий все возможные остовные деревья и отсеивающий те, которые заведомо не могут быть минимальными. При этом используются только геометрические свойства плоскости.

$A2$ – алгоритм, выбирающий топологию дерева Штейнера и составляющий для каждого остовного дерева задачу нелинейного программирования. При этом отсеиваются те остовные деревья, которые не соответствуют оптимальному дереву Штейнера.

$A3$ – алгоритм, решающий задачу нелинейного программирования.

Если решения всех задач дают всем функционалам неотрицательное значение, то тем самым будет выполняться неравенство (3). Использование информационных технологий позволит решить проблему Гильберта-Поллака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 415 с.
2. Garey M.R.,Graham R. L.,Johnson D. S.The complexity of computing Steiner minimal trees// SIAM J. Appl. Math. – 1977. – Vol. 32, № 4. – P. 835 – 859.
3.Gilbert E.N. and Pollak H.O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – Vol. 16. – P. 1 – 29.
4. Pollak H.O. Some remarks on the Steiner problem // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1978. – Vol. 24. – P. 278 – 295.
5. Du D.Z.,Yao E.Y., Hwang F K. A short proof of a result of Pollak on Steiner minimal trees // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1982. – Vol. 32. – P. 396 – 400.
6. Du D.Z., Hwang F. K., Yao E. Y. The Steiner ratio conjecture is true for five points // J. Combin.Theory. – 1985. – Vol. 38, № 2. – P. 230 – 240.
7. Graham R. L., Hwang F. K. Remarks on Steiner minimal trees // I.Bull.Inst.Math.Acad.Sinica. – 1976. – Vol. 4. – P. 177 – 182.
8. Chang F. R. K., Hwang F. K. A lower bound for the Steiner tree problem // SIAM J.Appl.Math. – 1978. – Vol. 34, № 1. – P. 27 – 36.
9. Chang F. R. K., Graham R. L. A new bound for Euclidean Steiner minimal trees // Ann. N.Y. Acad. Sci. – New York. – 1985. – Vol. 440. – P. 328 – 346.
10. Du D. Z., Hwang F. K. A new bound for the Steiner ratio // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 278. – P. 137 – 148.
11. Du D. Z. On Steiner ratio conjectures // Ann. Oper. Res. – 1991. – Vol. 33. – P. 437 – 449.
12. Du D. Z., Hwang F. K. A proof of the Gilbert-Pollak conjecture on the Steiner ratio // Algorithmica. – 1992. – № 7. – P. 121 – 135.

13. Trietsch D., Kellogg J. L., Handler G. Y. The Gilbert and Pollak conjecture – a generalization // Networks. – 1985. – Vol. 15, № 3. – P. 365 – 380.
14. Донец А. Г. О гипотезе Гильберта-Поллака для оптимальных деревьев // Теория оптимальных решений: Сб. научных трудов. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2001. – С. 72 – 76.