УДК 355.45

Л.О. КОМАРОВА, А.І. НЕВОЛЬНІЧЕНКО

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ УРАЖЕННЯ ОБ'ЄКТІВ РІЗНИХ КЛАСІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЦІЛЕРОЗПОДІЛУ

Анотація. *У статті представлені результати функціонального аналізу залежностей «бойовий ефект – витрати засобів» для об'єктів вогневого ураження різних класів і рекомендації щодо їх використання для формалізації типової задачі оптимального цілерозподілу та її вирішення в АСУ військами (силами).*
Ключові слова: *бойовий ефект, засоби ураження, функція ураження, задача цілерозподілу, бойова ефективність.*

Аннотация. *В статье представлены результаты функционального анализа зависимостей «боевой эффект – затраты средств» для объектов огневого поражения различных классов и рекомендации по их использованию для формализации типовой задачи оптимального целераспределения и её решения в АСУ войсками (силами).*
Ключевые слова: *боевой эффект, средства поражения, функция поражения, задача целераспределения, боевая эффективность.*

Abstract. *The results of the functional dependency analysis "combat effects – the cost of funds" for fire damage objects of different classes and use recommendations for the typical mission formalization of optimal target assignment and its solution by automated troop and command system are given in the article.*
Keywords: *combat effect, means of destruction, damage function, target assignment problem, combat effectiveness.*

1. Вступ

Коректне визначення функціональної залежності рівня бойового ефекту від витрат засобів для його досягнення для об'єктів застосування різних класів є умовою формальної постановки й точного вирішення задач оптимального розподілу засобів по об'єктах застосування при плануванні операцій військ (сил) [1]. Даній проблемі присвячений зміст статті.

Для бойової системи (БС) війська (сили) залежність очікуваного бойового ефекту (БЕ) при виконанні вогневого завдання від кількості ресурсу (сил і засобів) у загальному випадку визначається такими міркуваннями.

Бойовим ефектом вогневого ураження (ВУ) вважається рівень нанесеного (об'єкту ураження противника) чи відверненого (об'єкту захисту від противника) збитку ресурсом сил і засобів, що призначені на даний об'єкт застосування. Бойовий ефект, як зміну оперативно-тактичної важливості (ОТВ) об'єкта, безпосередньо утворюють засоби, які застосовують сили. Тому розрахунковою одиницею (РО) ресурсу засобів будемо вважати боєкомплект, який застосовує відповідна до нього РО ресурсу сил – залп РО сил ствольної, реактивної чи корабельної артилерії; бойова зарядка одного літака бомбардувальної (БА), пари літаків штурмової (ША), винищувальної (ВА) і пари ударних вертольотів армійської авіації (АА); бойова частина балістичної чи крилатої оперативно-тактичної ракети, боєкомплект РО сил сухопутних військ (СВ), РО сил ППО тощо. Будемо розрахунковою одиницею сил, яка застосовує відповідну одиницю засобів, вважати екіпаж літака БА, екіпажні пари ША, ВА і АА, бойовий розрахунок РВіА, бойову групу СВ, батарею ППО, команду ВМС тощо. Очевидно, що потрібна кількість РО сил YS для застосування XS РО засобів, в залежності від нормативного часу застосування 1 РО засобів $\tau(1)$ (з перезарядкою) та встановленого часу TS виконання вогневого завдання, практично визначається із співвідношення

$$(YS/XS)=\{\tau(1)/TS\}=\{1,(1/2),(1/3)...\}.$$

Сумарний бойовий ефект ws, що утворюється засобами xs, які застосовують сили БС за час $(0\le t\le TS)$ у процесі дій по n призначених «різнорідних» об’єктах за планом розподілу однорідних засобів (що мають спеціалізацію по даних об’єктах),

$$\left\langle x_j, j=\overline{1,n}\right\rangle,\ xs=(x_1+...+x_n),\ ws=\{w_1(x_1)+...+w_n(x_n)\}, \tag{1}$$

є зростаючою функцією часу $\{0\le ws(t)\le ws(TS)\}$, тому що бойовий ефект $ws(t)$ в залежності від кількості засобів $xs(t)$, які застосували сили у часі, є функціоналом $ws\{xs(t)\}$. Темп зростання поточного бойового ефекту за часом (так звана бойова могутність БС) при послідовному у часі (згідно з планом дій) застосуванні силами витратних засобів $xs(t)$ формально задається складною похідною від функціоналу:

$$\frac{d}{dt}ws\{xs(t)\}=\frac{\partial(ws)}{\partial(xs)}\times\frac{d(xs)}{dt}=b(xs)\times a(t), \tag{2}$$

де b – продуктивність засобів по створенню бойового ефекту (могутність засобів);
a – продуктивність сил по застосуванню засобів (темп витрачання силами засобів).

Накопичений на момент часу застосування t бойовий ефект складе:

$$ws(t)=\int_0^t\{bs(xs)\times as(t)\}\times dt. \tag{3}$$

Питома продуктивність засобів $b(1)$ є нормативною для кожного класу об’єктів застосування, але групова продуктивність засобів БС $bs(xs)$ є вже оперативною для фактичного плану їх розподілу між різнорідними об’єктами застосування і дорівнює не очікуваному добутку $\{b(1)\times xs\}$, а, згідно з (2), співвідношенню $\{ws/xs\}$ на момент $t=TS$. У свою чергу, продуктивність сил а є функцією часу, яка відповідає як плану (сценарію) дій сил, так і дії зовнішніх факторів (бойові втрати сил, зброї і військової техніки; виснаження особового складу сил; порушення темпу постачання засобів у процесі дій сил тощо). При наявній продуктивності сил по застосуванню засобів xs їх кількість на момент t складе:

$$xs(t)=\int_0^t as(t)\times dt, \tag{4}$$

і бойовий ефект можна розглядати як функцію лише кількості ресурсу засобів $ws(xs)$, які застосовують сили згідно з планом дій. Тепер достатньо з’ясувати залежність поточної продуктивності засобів, що є функцією як їх кількості, так і нормативних характеристик об’єкта застосування, для формалізації задачі оптимального цілерозподілу як задачі максимізації групової продуктивності засобів.

Бойова система є фізичною системою [2], яка в операції застосування витрачає поточний ресурс засобів x по даному об’єкту з ОТВ c для її «зміни» на величину бойового ефекту $w(x)$. Для визначення системної функції $w(x)$ вважаємо коректною евристику, що продуктивність ресурсу засобів x по створенню системного (бойового) ефекту w пропорційна статку (поточній) ОТВ об’єкта $\{c-w(x)\}=v(x)$, тобто

$$b(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \gamma \times v(x)\}. \tag{5}$$

Дане неоднорідне диференційне рівняння, таким чином, належить до класу рівнянь математичної фізики і є фундаментальним для БС. Інтегрування даного диференційного рівняння для характеристик об'єктів різних класів визначає системну функцію $w(x)$ БС.

2. Групові цілі

Клас групових цілей складають об'єкти, ураження яких досягається застосуванням у взаємодії усіх призначених на даний об'єкт РО засобів БС (особливості – синергетичний бойовий ефект та групова продуктивність засобів). Бойовий ефект для ресурсу засобів x вимірюється частиною $w(x)$ усуненої оперативно-тактичної важливості (ОТВ) c об'єкта; частина $v(x)$ збереженої ОТВ є її статком. Дані частини разом складають ОТВ даного об'єкта:

$$w(x) + v(x) = c, \tag{6}$$

причому, очевидно, що

$$w(x) = c - v(x); \; v(x) = c - w(x). \tag{7}$$

Вважається, згідно з (5), що групова продуктивність засобів ураження по ефекту (dw/dx) пропорційна статку (збереженій) оперативно-тактичній важливості об'єкта:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \gamma_г \times v(x). \tag{8}$$

Тут $\gamma_г$ – коефіцієнт впливу ресурсу dx на статок ОТВ $v(x)$ для даної групової цілі, що має розмірність [1/РО засобів]. Дане неоднорідне диференційне рівняння приводиться до однорідного очевидною, згідно з (7), заміною в лівій частині:

$$\frac{d}{dx} w(x) = \frac{d}{dx}\{c - v(x)\} = -\frac{dv(x)}{dx} = \gamma_г \times v(x). \tag{9}$$

Після розділення значень функції та її аргументу по різних частинах (9) одержимо диференційне рівняння:

$$-\frac{dv(x)}{v(x)} = \gamma_г \times dx. \tag{10}$$

Інтегруємо дане диференційне рівняння по частинах. Для кількості засобів (x) нижній край інтервалу інтегрування дорівнює 0, а верхній край – поточному значенню x; для статку (збереженої) ОТВ нижній край інтервалу інтегрування відповідно (при кількості засобів 0) дорівнює початковому рівню c, а верхній край (при кількості засобів x) – поточному рівню $v(x)$. Тому маємо

$$\int_c^{v(x)} \frac{dv}{v} = -\int_0^x \gamma_г \times dx \; . \tag{11}$$

З урахуванням (7), одержимо алгебраїчне (саме логарифмічне) рівняння:

$$ln(v(x)) - ln(c) = ln\left(\frac{c - w(x)}{c}\right) = -\gamma_г x. \qquad (12)$$

Потенціювання обох частин даного рівняння дає

$$\left(1 - \frac{w(x)}{c}\right) = exp(-\gamma_г x). \qquad (13)$$

Звідси остаточно функція (закон) залежності бойового ефекту від витрат засобів для групової цілі:

$$w(x) = c \times \{1 - \exp(-\gamma_г x)\}. \qquad (14)$$

Константа $\gamma_г$ знаходиться з рівняння (14) за умови, що відомий питомий ефект, який для даної групової цілі c утворює розрахункова одиниця засобів $w(x=1)$,

$$-\gamma_г = ln(1 - w(1)/c). \qquad (15)$$

3. Поодинокі цілі

Клас поодиноких цілей складають об'єкти, ураження яких досягається влученням хоча б однієї РО засобів БС з усіх призначених на даний об'єкт.

Бойовий ефект для ресурсу x також вимірюється частиною $w(x)$ усуненої оперативно-тактичної важливості (ОТВ) c об'єкта; частина $v(x)$ збереженої ОТВ є її статком. Дані частини разом і складають ОТВ даного об'єкта:

$$w(x) + v(x) = c. \qquad (16)$$

Причому, очевидно, що

$$w(x) = c - v(x); \; v(x) = c - w(x). \qquad (17)$$

Оскільки ураження та неураження об'єкта як результат застосування засобів x силами складають саме повну групу випадкових подій, то сума ймовірності настання відповідних подій дорівнюватиме:

$$p(x) + q(x) = 1, \qquad (18)$$

де $p(x)$ – ймовірність ураження об'єкта ресурсом засобів x (РО);

$q(x)$ – ймовірність неураження об'єкта ресурсом засобів x (РО).

Із (18) прямує:

$$p(x) = 1 - q(x), \; q(x) = 1 - p(x). \qquad (19)$$

Позначимо вказані рівні бойового ефекту ураження та неураження як математичні сподівання рівнів усуненої та збереженої оперативно-тактичної важливості об'єкта відповідно:

$$w(x) = c \times p(x) + 0 \times q(x) = c \times p(x); \qquad (20)$$

$$v(x) = 0 \times p(x) + c \times q(x) = c \times q(x). \qquad (21)$$

Математичне сподівання рівня бойового ефекту w (одиниць БЕ) при оперативно-тактичній важливості c (одиниць ОТВ) об'єкта, що утворений силами у складі x бойових груп (РО), є добутком ОТВ c та ймовірності $p(x)$ її досягнення чи оберненої ймовірності $q(x)$ недосягнення згідно з (19):

$$w(x)=c\times p(x)=c\times\{1-q(x)\}. \qquad (22)$$

Вважаємо, що поточна групова продуктивність засобів ураження по ефекту (dw/dx) пропорційна статку (збереженій) оперативно-тактичній важливості об’єкта:

$$\frac{dw(x)}{dx}=\gamma_o\times v(x). \qquad (23)$$

Тут $\gamma_г$ – коефіцієнт впливу ресурсу dx на статок ОТВ $v(x)$ для даної поодинокої цілі, що має розмірність [1/РО засобів]. З урахуванням (20), (21), дане рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{d\{c\cdot p(x)\}}{dx}=\gamma_o\{c\cdot q(x)\}, \qquad (24)$$

тобто, після скорочення на c

$$\frac{dp(x)}{dx}=\gamma_o\times q(x). \qquad (25)$$

Рівняння (25) можна привести до однорідного заміною, згідно з (19), у лівій частині:

$$\frac{d}{dx}p(x)=\frac{d}{dx}\{1-q(x)\}=-\frac{dq(x)}{dx}=\gamma_o\times q(x). \qquad (26)$$

Після розділення в (26) $q(x)$ та x по різних частинах рівняння одержимо остаточне диференційне рівняння:

$$-\frac{dq(x)}{q(x)}=\gamma_o\times dx, \qquad (27)$$

яке інтегруємо по частинах. Згідно з фізичним змістом, нижньому краю інтервалу інтегрування для ресурсу $x=0$ (відсутність ресурсу) буде відповідати нижній край інтервалу інтегрування для ймовірності $q=1$ (вірогідне недосягнення c), а верхньому краю інтервалу інтегрування для ресурсу x буде відповідати верхній край інтервалу інтегрування для ймовірності $q(x)$. Тоді маємо

$$\int_1^{q(x)}\frac{dq}{q}=-\int_0^x\gamma_o\times dx. \qquad (28)$$

Для обраних значень інтервалів інтегрування одержимо

$$ln\{q(x)\}-ln(1)=-\gamma_o x. \qquad (29)$$

Потенціювання обох частин рівняння (29) дає аналітичний вираз для ймовірності недосягнення рівня ОТВ:

$$q(x)=exp(-\gamma_o x)=1-p(x). \qquad (30)$$

Таким чином, відповідна до (21) функція (закон) залежності бойовий ефект – витрати з урахуванням (29) має такий аналітичний вигляд:

$$w(x) = c \times \{1 - \exp(-\gamma_o x)\}. \tag{31}$$

Коефіцієнт впливу γ_o визначається таким чином. Якщо при важливості c об'єкта відомий рівень бойового ефекту $w(x=1)$ для одиниці ресурсу, то із рівняння (31) маємо

$$-\gamma_o = ln(1 - w(1)/c) = ln\{q(1)\}. \tag{32}$$

З теорії ймовірності та алгебри подій відомо, що для поодиноких цілей складна подія, пов'язана з неураженням цілі, є добутком простих подій неураження цілі, а ні однією РО однорідних засобів з усіх x. Тому ймовірність даної події дорівнює

$$q(x) = \{q(1)\}^x, \tag{33}$$

де $q(1)$ – нормативна ймовірність неураження цілі розрахунковою одиницею засобів, і тому функція бойового ефекту для поодинокої цілі є добре відомою:

$$w(x) = c \times p(x) = c \times \{1 - q(x)\} = c \times \{1 - (q(1))^x\}. \tag{34}$$

Функція ймовірності неураження $q(x)$ належить до класу експоненціальних (expo лат. – показ), коли аргумент (x) є показником ступеня основи (q). Формально функція (34) може бути тотожньо надана експоненціальною функцією іншої основи – константи Ейлера $e = 2,728$ з показником ступеня, пропорційним даному аргументу x, тобто

$$\{q(1)\}^x = e^{-\gamma_o x}, \tag{35}$$

де γ_o – коефіцієнт пропорційності, який знаходиться логарифмуванням (по основі e) обох частин даного рівняння (34):

$$-\gamma_o = ln\{q(1)\}. \tag{36}$$

За фізичним змістом $(0 < q < 1)$ коефіцієнт γ_o завжди від'ємний. Таким чином, дана функція ураження поодинокої цілі (34) тотожна до (31):

$$w(x) = c \times \{1 - (q(1))^x\} = c \times \{1 - exp(-\gamma_o x)\}, \tag{37}$$

що є взаємним доказом їх коректності.

4. Площинні цілі

Клас площинних цілей складають об'єкти, ураження яких досягається застосуванням у взаємодії усіх призначених на даний об'єкт РО площинних засобів ураження (синергетичний бойовий ефект групи засобів).

Бойовий ефект для об'єкта площею s, як мірою його оперативно-тактичної важливості та ресурсу x, вимірюється частиною $w(x)$ ураженої площі об'єкта при частини $v(x)$ неураженої (статку) площі об'єкта. Ці частини разом складають ОТВ площинного об'єкта:

$$w(x) + v(x) = s, \tag{38}$$

причому, очевидно, що

$$w(x) = s - v(x), \; v(x) = s - w(x). \tag{39}$$

Вважаємо, що поточна групова продуктивність засобів по створенню ефекту пропорційна статку оперативно-тактичній важливості об'єкта; тому виникає диференційне рівняння:

$$\frac{dw(x)}{dx}=\gamma_n\times v(x), \qquad (40)$$

де γ_n – коефіцієнт впливу ресурсу dx на статок ОТВ $v(x)$ для даної площинної цілі, яка має розмірність [1/РО засобів]. Дане неоднорідне диференційне рівняння (40) приводиться до однорідного заміною, згідно з (39), у лівій частині:

$$\frac{d}{dx}w(x)=\frac{d}{dx}\{s-v(x)\}=-\frac{dv(x)}{dx}=\gamma_n\times v(x). \qquad (41)$$

Після розділення значень функції v та її аргументу x по різних частинах одержимо диференційне рівняння:

$$\frac{dv(x)}{v(x)}=-\gamma_n\times dx. \qquad (42)$$

Інтегруємо дане диференційне рівняння по частинах. Для кількості засобів нижній край інтервалу інтегрування дорівнює 0, а верхній край – поточному значенню x; для збереженої ОТВ нижній край інтервалу інтегрування відповідно (при кількості засобів 0) дорівнює початковому рівню s, а верхній край (при кількості засобів x) – поточному рівню $v(x)$. Тому

$$\int_s^{v(x)}\frac{dv}{v}=-\int_0^x\gamma_n\times dx. \qquad (43)$$

З урахуванням (39), маємо алгебраїчне (саме логарифмічне) рівняння:

$$ln(v(x))-ln(s)=ln\left(\frac{s-w(x)}{s}\right)=-\gamma_n x. \qquad (44)$$

Потенціювання обох частин даного рівняння дає

$$\left(1-\frac{w(x)}{s}\right)=exp(-\gamma_n x). \qquad (45)$$

Остаточно функція (закон) залежності бойового ефекту від витрат засобів для площинної цілі:

$$w(x)=s\times\{1-\exp(-\gamma_n x)\}. \qquad (46)$$

Коефіцієнт впливу γ_n визначається таким чином. Якщо при відомій площі s об'єкта оцінений рівень бойового ефекту для одиниці ресурсу $w(1)$, то із рівняння (46) маємо

$$-\gamma_n=ln(1-w(1)/s). \qquad (47)$$

Оскільки оперативно-тактична важливість площинних цілей може мати іншу модальність, а ніж просто її «площа» s, то бойовий ефект слід обчислювати для добутку питомої модальності a (одиниця ОТВ/одиниця площі) та площі цілі s; тоді остаточно:

$$w(x)=(a\times s)\times\{1-\exp(-\gamma_n x)\}. \qquad (48)$$

5. Цілі високої живучості

Клас цілей високої живучості (ВЖ) складають об’єкти, для ураження яких потрібне влучення не менш нормативної кількості $(z > 1)$ засобів (захищені командні пункти угруповань військ, важкі кораблі, авіаносці, шахтні пускові установки балістичних ракет, інженерно укріплені об’єкти – військові, повітряні та морські бази, арсенали тощо).

Нехай відомі ОТВ a цілі – об’єкта ВЖ, нормативна кількість засобів ураження z та нормативна ймовірність влучення p одиниці засобу у ціль. Якщо встановлений ступінь ураження цілі (потрібний рівень бойового ефекту), то виникає задача визначення такої кількості x засобів, застосування яких задовольняє критерій достатності – умову

$$w(x) = a \times p(x) \geq w^{потр}. \tag{49}$$

Бойовим ефектом $w(x)$ вважається математичне сподівання рівня усуненої ОТВ об’єкта застосуванням $(x \geq z)$ РО засобів, причому

$$w(x) = 0, \text{ якщо } x < z; \tag{50}$$

$$w(x) = a \times p(x), \text{ якщо } x \geq z. \tag{51}$$

Відомо, що ймовірність влучення рівно k засобів з x визначається біноміальним законом розподілу ймовірностей:

$$p(k/x) = C_x^k p^k (1-p)^{x-k}. \tag{52}$$

Тоді ймовірність влучення не менш z засобів з x буде, очевидно, дорівнювати

$$p(x \geq z) = \sum_{k=z}^{x} C_x^k p^k (1-p)^{x-k}, \tag{53}$$

і функція ураження цілі ВЖ як залежність бойового ефекту від витрат засобів буде решітчастою через дискретність (цілочисельність) аргументу, а її огинаюча буде суто не опуклою:

$$w(x) = 0, \text{ якщо } x < z; \tag{54}$$

$$w(x) = a \times \sum_{k=z}^{x} C_x^k p^k (1-p)^{x-k}, \text{ якщо } x < z. \tag{55}$$

Інтерполяція значущої частини даної залежності (55) експонентою дає найбільш вірогідну (з відносною до a середньоквадратичною похибкою менш 3%) аналітичну форму функції регресії як закону для даної залежності. Таким чином, аналітична залежність бойовий ефект – витрати засобів для цілей ВЖ може бути надана експоненціальною функцією для значущої частини залежності:

$$w(x) = 0, \text{ якщо } x < z;$$

$$w(x) = a \times \left\{1 - \exp\left(-\gamma_{ж} \times \left(x - (z-1)\right)\right)\right\}, \text{ якщо } x \geq z. \tag{56}$$

Тут корекція аргументу x враховує те, що нульове значення експоненти $w(0) = 0$ повинне починатися саме з аргументу $(x = z - 1)$, який передує аргументу першого ненульового значення ефекту $w(x = z)$. Якщо для цілі ВЖ з ОТВ a відомий «нормативний» (при $x = z$) рівень бойового ефекту $w^{н} = w(z)$, то константа $(-\gamma_{ж})$ знаходиться із рівняння (56)

$$-\gamma_{ж} = ln\{1-(w(z)/a)\}. \qquad (57)$$

6. Постановка типової задачі оптимального цілерозподілу засобів

Таким чином, стало можливим знайти універсальну аналітичну залежність (закон) для функцій бойовий ефект – витрати засобів різних класів цілей:

$$w(x) = c \times \{1 - \exp(-\gamma x)\}, \qquad (58)$$

що дозволяє використовувати єдину процедуру оптимального цілерозподілу засобів ВУ по об'єктах застосування для комп'ютерних засобів АСУ(в).

Завдяки асимптотичному значенню с (оперативно-тактична важливість), існує таке (крайнє) значення аргументу надураження (кількості РО засобів $x\max$), при якому ефект $w(x\max)$ практично досягає асимптотичного значення, і подальше його нарощування недоцільне, бо продуктивність засобів (dw/dx) швидко зменшується. Якщо припустима різниця між максимальним значенням функції і асимптотою дорівнює δ, то аргумент надураження визначається рівнянням (58) для c, δ та $x\max$:

$$w(x max) = c \times \{1 - exp(-\gamma \times x max)\} = (c - \delta), \qquad (59)$$

з якого прямує

$$x max = -\{ln(\delta / c)\} / \gamma. \qquad (60)$$

Знайдена аналітична форма функцій ураження об'єктів дозволяє зробити формальну постановку типової задачі оптимального цілерозподілу.

Зробимо деякі попередні припущення [1].

Бойовий (системний) ефект для системи n об'єктів, заданих вектором значень їх оперативно-тактичної важливості,

$$A = \left\langle a_j, j = \overline{1,n} \right\rangle, \qquad (61)$$

при плані розподілу засобів по об'єктах (цілях):

$$X = \left\langle x_j, j = \overline{1,n} \right\rangle \qquad (62)$$

вважається адитивною формою сепарабельної функції:

$$WS(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j(x_j). \qquad (63)$$

Очевидно, загальна кількість засобів, призначених для ураження системи цілей, визначається з плану їх цілерозподілу:

$$NS(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j. \qquad (64)$$

Для різнорідних (m типів) засобів, коли коефіцієнти впливу задаються матрицею

$$\Gamma^{o}_{m\times n} = \left\| -\gamma^{o}_{ij} \right\|_{m\times n}, \qquad (65)$$

при плані розподілу засобів по об'єктах системи

$$X = \left\| x_{ij} \right\|_{m\times n}, \qquad (66)$$

де x_{ij} – кількість одиниць засобів i-го типу $(i=\overline{1,m})$, що призначена на j-й об'єкт, бойовий ефект для кожного j-го об'єкта є

$$w_j(x_{ij}, i=\overline{1,m}) =$$

$$= a_j \times \left\{1 - \prod_{i=1}^{m} exp(-\gamma_{ij}^{o} x_{ij})\right\} = a_j \times \left\{1 - exp\left(-\sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}^{o} x_{ij}\right)\right\}, j=\overline{1,n}\ , \tag{67}$$

і системний бойовий ефект відповідно

$$WS(X_{m\times n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j(x_{ij}, i=\overline{1,m}). \tag{68}$$

Кількість різнорідних засобів по видах, призначених для ураження системи цілей, також визначається з плану цілерозподілу (64):

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i=\overline{1,m}. \tag{69}$$

Якщо система прикриття кожного j-го об'єкта-цілі має можливість активно протидіяти застосуванню по ньому певної кількості різнорідних засобів вогневого ураження (ВУ)

$$Y = \left\| y_{ij} \right\|_{m\times n}, \tag{70}$$

то така можливість протидії потребує врахування зниження, в порівнянні з (65), спроможності її подолання кожною одиницею різнорідних засобів із y_{ij}:

$$B = \left\| \beta_{ij} \right\|_{m\times n}. \tag{71}$$

Таким чином, зі складу x_{ij}, що призначені на даний об'єкт ВУ, y_{ij} одиниць повинні долати протидію, а решта $(x_{ij} - y_{ij})$ буде вражати об'єкт без протидії. Це дає таку залежність бойового ефекту від кількості різнорідних засобів ВУ:

$$w_j(x_{ij}, y_{ij}, i=\overline{1,m}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a_j \times (1 - exp(-\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} x_{ij})), \text{ якщо } x_{ij} < y_{ij}; \\ a_j \times (1 - exp(-\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} y_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij}(x_{ij} - y_{ij})), \text{ якщо } x_{ij} \ge y_{ij} \end{array} \right\}, j=\overline{1,n}. \tag{72}$$

Застосування силами засобів по об'єктах пов'язане з певними витратами запасу боєздатності – трудовитратами сил (од.сил×од.часу), які задаються:

для однорідних засобів – вектором питомих витрат

$$RS(X) = \left\langle r_j(x_j), j=\overline{1,n} \right\rangle, \tag{73}$$

де r_j – трудовитрати сил по застосуванню 1 РО засобів по j-му об'єкту;

для різнорідних засобів – матрицею питомих витрат

$$RS(X_{m\times n}) = \left\| r_{ij}(x_{ij}) \right\|_{m\times n}, \tag{74}$$

де r_{ij} – трудовитрати сил по застосуванню 1 РО засобів i-го типу по j-му об'єкту.

Питомі витрати доцільно вважати вартістю d трудовитрат сил на застосування 1 РО засобів по даному об'єкту призначення (включаючи вартість засобу). Тоді загальна вартість витрат запасу боєздатності сил по застосуванню засобів згідно з планом їх розподілу по об'єктах складе відповідно:

для однорідних засобів:

$$DS(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j ; \tag{75}$$

для різнорідних засобів:

$$DS(X_{m\times n}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} . \tag{76}$$

Основна (обернена) задача оптимального розподілу засобів по об'єктах застосування має таку формальну постановку: на множині $\{X\}$ планів розподілу, кожний з яких X задовольняє обмеження на потрібний (заданий) рівень бойового ефекту (критерій придатності планів):

$$WS(X) \geq WS^{потр}, \tag{77}$$

знайти план $X^o \subset \{ X \}$, який мінімізує витрати (чи їх вартість) запасу боєздатності (трудовитрати) сил по застосуванню засобів для створення потрібного рівня бойового ефекту (критерій оптимальності плану):

$$RS(X^o) = \min_{\{ X \}} RS(X) \text{ чи } DS(X^o) = \min_{\{ X \}} DS(X). \tag{78}$$

При цьому групова продуктивність бойових трудовитрат сил по застосуванню засобів для створення бойового ефекту (а тому і функціональна ефективність їх застосування) буде, очевидно, максимальною [1]:

$$ES(X^o) = \frac{WS(X^o)}{RS(X^o)} = \frac{WS^{потр}}{\min\limits_{\{X\}} RS(X)} = \max_{\{ X \}} ES(X). \tag{79}$$

Те ж саме справедливе і для економічної ефективності застосування БС (продуктивність вартості бойових трудовитрат).

Універсальна функція (закон) залежності часткового бойового ефекту від витрат засобів, аналітичний вигляд якої був знайдений

$$w(x) = c \times \{1 - \exp(-\gamma x)\} \tag{80}$$

на інтервалі практичних значень аргументу $(0 \leq x \leq x\,max)$, як свідчить її функціональний аналіз, задовольняє умову опуклості, адитивна сепарабельна функція-обмеження $WS(X)$ тому також є опуклою, цільова функція $RS(X)$ є лінійною формою (крайній випадок опуклості). Таким чином, дана задача належить до класу задач нелінійного програмування і ефективно вирішується спеціальними методами опуклого програмування.

На жаль, аналітичний метод невизначених множників Лагранжа дає нецілочисельне рішення для компонент оптимального плану, і його округлення є додатковою нетривіальною задачею. По-друге, деякі компоненти формально оптимального рішення при наявних обмеженнях можуть статися від'ємними, що не відповідає їх фізичному змісту (розрахункова одиниця матеріальних ресурсів – засобів), і приведення рішення до невід'ємного є також додатковою нетривіальною задачею. Тому доцільно застосовувати найбільш придатний ітераційний метод опуклого програмування, адаптований до динамічної ефективності поточного рішення [1] – дискретний метод кінцевих різниць – як для векторного, так і для матричного аргументу.

Для об'єктів з протидією функція часткового бойового ефекту (63) не відповідає умові «опуклості» і тому доцільно використовувати метод динамічного програмування для задач «розподілення» (засобів). Обидва методи адаптовані і реалізовані науковцями ЗС при алгоритмізації процедур для комп'ютерних засобів автоматизації організаційного управління військами і зброєю.

7. Висновки

Таким чином, проведений функціональний аналіз залежностей бойовий ефект – витрати засобів для об'єктів вогневого ураження різних класів дозволив визначити універсальну функцію (закон) ураження та розробити рекомендації щодо використання результатів для формалізації типової задачі оптимального цілерозподілу та її вирішення в АСУ військами (силами).

Результати можуть бути використані при розробці автоматизації систем управління військами (силами) та зброєю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Педченко Г.М. Воєнно-наукове забезпечення операцій військ (сил) / Педченко Г.М., Шарий В.І., Невольніченко А.І. – К.: ВІ КНУ ім. Тараса Шевченка, 2011. – 228 с.
2. Венцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Венцель Е.С. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

Стаття надійшла до редакції 10.04.2012