УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, **О.П. НЕЧУЙВІТЕР**

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ 3D КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є НА КЛАСІ ГЬОЛЬДЕРА З ВИКОРИСТАННЯМ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ

Анотація. *У статті пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації на класі Гьольдера. Інформація про функцію задана її слідами на взаємоперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції у вузлових точках. Отримані оцінки похибки кубатурних формул.*
Ключові слова: *кубатурна формула, 3D коефіцієнти Фур'є, клас Гьольдера, кусково-стала сплайн-інтерфлетація.*

Аннотация. *В статье рассматриваются и исследуются кубатурные формулы вычисления 3D коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на классе Гельдера. Информация о функции задана её следами на взаимоперпендикулярных плоскостях, линиях и значениями функции в узловых точках. Получены оценки погрешности кубатурных формул.*
Ключевые слова: *кубатурная формула, 3D коэффициенты Фурье, класс Гельдера, кусочно-постоянная сплайн-интерфлетация.*

Abstract. *Cubature formulas for computing 3D Fourier coefficients using piecewise-constant spline interflation operators on the Gelder's class are proposed and investigated in the article. Information about the function is set by its traces on mutually perpendicular planes, lines and function values in the knots. The error estimates of cubature formulas are received.*
Keywords: *cubature formula, 3D Fourier's coefficients, Gelder's class, piecewise-constat spline interflation.*

1. Вступ

При розв'язанні задач цифрової обробки багатовимірних сигналів, математичного моделювання неперервних виробничих процесів, комп'ютерної томографії, картографії поверхні за даними її радіолокації, неруйнівного контролю на митницях, захисту інформації (підвищення продуктивності систем двоключової криптографії та комп'ютерної стеганографії) тощо, широко застосовують перетворення Фур'є, інтеграли від швидкоосцилюючих функцій, швидкі ортогональні перетворення. Тому однією з актуальних проблем є побудова кубатурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на різних класах при використанні різних інформаційних операторів про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Як дані можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на системі ліній або площин, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт.

Задачу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій багатьох змінних з використанням різних інформаційних операторів дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1]. Зокрема, в [2, 3] представлені розв'язки задачі наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли початкова інформація задається як значеннями функції в точках, так і її слідами на системі взаємоперпендикулярних прямих на різних класах функцій. У [4, 5] викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення неосцилюючого множника підінтегральної функції у вузлах. Побудова кубатурної формули на основі кусково-сталої інтерфлетації на класі

Ліпшиця при даних – слідах функції на площинах, розглядається в [6]. Однією з недосліджених задач є обчислення 3D – коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації різними інформаційними операторами на класі Гьольдера.

Постановка задачі: для обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є виду

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz$$

побудувати кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на класі Гьольдера $C^3_{\alpha,L,\bar{L},\tilde{L}}$, $0<\alpha\le 1$ – класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$, і таких, що

$$\left|f(x_1,y,z)-f(x_2,y,z)\right|\le L|x_1-x_2|^\alpha,\quad \left|f(x,y_1,z)-f(x,y_2,z)\right|\le L|y_1-y_2|^\alpha,$$

$$\left|f(x,y,z_1)-f(x,y,z_2)\right|\le L|z_1-z_2|^\alpha,$$

$$\left|f(x_1,y_1,z)-f(x_2,y_1,z)-f(x_1,y_2,z)+f(x_2,y_2,z)\right|\le \bar{L}|x_1-x_2|^\alpha|y_1-y_2|^\alpha,$$

$$\left|f(x_1,y,z_1)-f(x_2,y,z_1)-f(x_1,y,z_2)+f(x_2,y,z_2)\right|\le \bar{L}|x_1-x_2|^\alpha|z_1-z_2|^\alpha,$$

$$\left|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_2,z_1)-f(x,y_1,z_2)+f(x,y_2,z_2)\right|\le \bar{L}|y_1-y_2|^\alpha|z_1-z_2|^\alpha,$$

$$\Big|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_1,z_1)-f(x_1,y_2,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)+$$

$$+f(x_2,y_2,z_1)+f(x_2,y_1,z_2)+f(x_1,y_2,z_2)-f(x_2,y_2,z_2)\Big|\le$$

$$\le\tilde{L}|x_1-x_2|^\alpha|y_1-y_2|^\alpha|z_1-z_2|^\alpha$$

у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємоперпендикулярних площин, слідами на системі взаємоперпендикулярних ліній та значеннями функції у вузлових точках. Отримати оцінки похибки кубатурних формул.

2. Кусково-сталі оператори інтерполяції, інтерлінації та інтерфлетації

Введемо такі позначення:

$$X_k=[x_{k-1/2},x_{k+1/2}],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],\quad Z_s=[z_{s-1/2},z_{s+1/2}],$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}}=\left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2},\tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}}=\left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2},\tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],\quad \tilde{Z}_{\tilde{s}}=[\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2},\tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}],$$

$$\bar{X}_{\bar{k}}=\left[\bar{x}_{\bar{k}-1/2},\bar{x}_{\bar{k}+1/2}\right],\ \bar{Y}_{\bar{j}}=\left[\bar{y}_{\bar{j}-1/2},\bar{y}_{\bar{j}+1/2}\right],\quad \bar{Z}_{\bar{s}}=[\bar{z}_{\bar{s}-1/2},\bar{z}_{\bar{s}+1/2}],$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\0, x\notin X_k,\end{cases}\quad h_{2j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad h_{3s}(z)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\0, z\notin Z_s,\end{cases},$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)=\begin{cases}1, z\in \tilde{Z}_{\tilde{s}},\\0, z\notin \tilde{Z}_{\tilde{s}},\end{cases},$$

$$\bar{h}_{1\bar{k}}(x)=\begin{cases}1, x\in \bar{X}_{\bar{k}},\\0, x\notin \bar{X}_{\bar{k}},\end{cases}\quad \bar{h}_{2\bar{j}}(y)=\begin{cases}1, y\in \bar{Y}_{\bar{j}},\\0, y\notin \bar{Y}_{\bar{j}},\end{cases}\quad \bar{h}_{3\bar{s}}(z)=\begin{cases}1, z\in \bar{Z}_{\bar{s}},\\0, z\notin \bar{Z}_{\bar{s}},\end{cases}$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\quad z_s=s\Delta-\frac{\Delta}{2},\quad \Delta=\frac{1}{\ell},\ k,j,s=\overline{1,\ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}}=\tilde{k}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}}=\tilde{j}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{z}_{\tilde{s}}=\tilde{s}\Delta_1-\frac{\Delta_1}{2},\quad \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},\quad \tilde{k},\tilde{j},\tilde{s}=\overline{1,\ell^{3/2}},$$

$$\bar{x}_{\bar{k}}=\bar{k}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\ \bar{y}_{\bar{j}}=\bar{j}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\quad \bar{z}_{\bar{s}}=\bar{s}\Delta_2-\frac{\Delta_2}{2},\quad \Delta_2=\frac{1}{\ell^3},\quad \bar{k},\bar{j},\bar{s}=\overline{1,\ell^3}.$$

Розглянемо оператори:

$$O_1 f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x),\ O_2 f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y),$$

$$O_3 f(x,y,z)=\sum_{s=1}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z),$$

$$\tilde{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z)\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x),\ \tilde{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}},z)\tilde{h}_{2\tilde{j}}(y),$$

$$\tilde{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x,y,\tilde{z}_{\tilde{s}})\tilde{h}_{3\tilde{s}}(z),$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3} f(\bar{x}_{\bar{k}},y,z)h_{1\bar{k}}(x),\ \bar{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3} f(x,\bar{y}_{\bar{j}},z)\bar{h}_{2\bar{j}}(y),$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3} f(x,y,\bar{z}_{\bar{s}})\bar{h}_{3\bar{s}}(z).$$

Означення 1. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях $\{(x,y,z):\ x=x_k,\ y=y_j,$ $k,j=\overline{1,\ell},\quad 0\le z\le 1\}$ розуміємо $f(x_k,y_j,z),\quad 0\le z\le 1$.

Означення 2. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на площинах $\{(x,y,z):\ x=x_k, 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$ розуміємо $f(x_k,y,z),\quad 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

Сліди функції на інших лініях та площинах визначаються аналогічно.

Лема 1. Оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Of(x,y,z)=O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3\alpha}}\right)$.

Лема 2. Оператор кусково-сталої інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)++O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z),$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3\alpha}}\right)$.

Лема 3. Оператор кусково-сталої інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації

$$\bar{O}f(x,y,z)=O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-$$
$$-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$
$$-O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z),$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3\alpha}}\right)$.

Леми 1–3 доводяться безпосередньою перевіркою.

3. Кубатурна формула обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p),\quad \mu=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz\,dxdydz\,,$$

$$\Phi_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz\,dxdydz\,,$$

$$\Phi_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz\,.$$

Теорема 1. Для кубатурної формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка: $\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Доведення. Маємо таку оцінку:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right| = \left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right| dxdydz =$$

$$\le \tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|x-x_k\right|^{\alpha}\left|y-y_j\right|^{\alpha}\left|z-z_s\right|^{\alpha} dxdydz =$$

$$= \tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(-\frac{(x_k-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k}+\frac{(x-x_k)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{(y_j-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j}+\frac{(y-y_j)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\right)\left(-\frac{(z_s-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_s}+\frac{(z-z_s)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_{z_s}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$= \tilde{L}\ell^3\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}} = \frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Теорема доведена.

4. Кубатурна формула обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_{\mu}^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz} dxdydz.$$

Теорема 2. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка: $\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{3\overline{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pzdxdydz\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y,z)-Of(x,y,z)+Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pzdxdydz\right|\le$$

$$\le\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\,.$$

За теоремою 1, $\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|\le\dfrac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3\,2^{3\alpha}}\dfrac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Знайдемо оцінку $\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|Of(x,y,y)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2f(x,y,z)-O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_3f(x,y,z)+O_1O_2O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)+$$

$$+O_1O_2f(x,y,z)+O_1O_3f(x,y,z)+O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_2O_3f(x,y,z)\Big|dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)\Big|dxdydz=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)+\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)+$$

$$+\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\Big|dxdydz\le$$

$$\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2 - O_2\tilde{O}_1 - O_2\tilde{O}_3 + O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3 - O_3\tilde{O}_1 - O_3\tilde{O}_2 + O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|\left(O_1 - O_1\tilde{O}_2 - O_1\tilde{O}_3 + O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|\left(O_2 - O_2\tilde{O}_1 - O_2\tilde{O}_3 + O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|\left(O_3 - O_3\tilde{O}_1 - O_3\tilde{O}_2 + O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz \le$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k, y, z) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) - f(x_k, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) + f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, \tilde{z}_{\tilde{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left| f(x, y_j, z) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, z) - f(x, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}}) + f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left| f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z_s) - f(x, \tilde{x}_{\tilde{k}}, z_s) - f(x, y, z_s) + f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, \tilde{x}_{\tilde{k}}, z_s)\right| dxdydz \le$$

$$\le L^2 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|y - \tilde{y}_{\tilde{j}}\right|^{\alpha} \left|z - \tilde{z}_{\tilde{s}}\right|^{\alpha} dxdydz +$$

$$+L^2 \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left|x - \tilde{x}_{\tilde{k}}\right|^{\alpha} \left|z - \tilde{z}_{\tilde{s}}\right|^{\alpha} dxdydz +$$

$$+L^2 \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left|x - \tilde{x}_{\tilde{k}}\right|^{\alpha} \left|y - \tilde{y}_{\tilde{j}}\right|^{\alpha} dxdydz =$$

$$=3\bar{L}\ell\ell^{3/2}\ell^{3/2}\Delta\frac{\Delta_1^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\frac{\Delta_1^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}=\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\Delta_1^{2\alpha}=\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}$. Теорема доведена.

5. Кубатурна формула обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерполяції, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p),\quad \mu=1,2,3$ пропонуються формули:

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Теорема 3. Для кубатурної формули $\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива така оцінка: $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{9}{(\alpha+1)2^{\alpha}}L\frac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Доведення. Оцінимо похибку наближення $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$\le\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|+\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\tilde{O}f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz.$$

За теоремою 1 та за теоремою 2, маємо:

$$\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3(m,n,p)\right|+\left|I_1^3(m,n,p)-\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{3L^2}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Знайдемо оцінку $\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$:

$$\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\tilde{O}(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\tilde{O}f(x,y,y)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+\right.$$

$$+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+$$

$$\left.+O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-O_1O_2O_3 f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+\right.$$

$$+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z)-$$

$$-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z)+$$

$$\left.+O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z)+O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z)+O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_3-O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_1 - O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_2 - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1O_2 - O_1O_2\bar{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1O_3 - O_1O_3\bar{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2O_3 - O_2O_3\bar{O}_1\right) f(x,y,z)\right| dxdydz =$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},z) - f(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\bar{z}_{\bar{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k,y,\tilde{z}_{\tilde{s}}) - f(x_k,\bar{y}_{\bar{j}},\tilde{z}_{\tilde{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}} \left| f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,z) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\bar{z}_{\bar{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| f(x,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}}) - f(\bar{x}_{\bar{k}},y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z_s) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}},\bar{y}_{\bar{j}},z_s)\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s) - f(\bar{x}_{\bar{k}},\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s)\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k,y_j,z) - f(x_k,y_j,\bar{z}_{\bar{s}})\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}} \left| f(x_k,y,z_s) - f(x_k,\bar{y}_{\bar{j}},z_s)\right| dxdydz +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|f(x,y_j,z_s)-f(\bar{x}_{\bar{k}},y_j,z_s)\right|dxdydz\le$$

$$\le L\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|z-\bar{z}_{\bar{s}}\right|^{\alpha}dxdydz+L\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\left|y-\bar{y}_{\bar{j}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+L\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|z-\bar{z}_{\bar{s}}\right|^{\alpha}dxdydz+L\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|x-\bar{x}_{\bar{k}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+L\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\left|y-\bar{y}_{\bar{j}}\right|^{\alpha}dxdydz+L\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|x-\bar{x}_{\bar{k}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+L\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}-\frac{1}{2}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+\frac{1}{2}}}\left|z-\bar{z}_{\bar{s}}\right|^{\alpha}dxdydz+L\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}-\frac{1}{2}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+\frac{1}{2}}}\left|y-\bar{y}_{\bar{j}}\right|^{\alpha}dxdydz+$$

$$+L\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}-\frac{1}{2}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|x-\bar{x}_{\bar{k}}\right|^{\alpha}dxdydz\le$$

$$\le 6L\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{\Delta_2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}+3L\ell\Delta\ell\ \Delta\ \ell^3\frac{\Delta_2^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}=9L\frac{\Delta_2^{\alpha}}{(\alpha+1)2^{\alpha}}=\frac{9}{(\alpha+1)2^{\alpha}}L\frac{1}{\ell^{3\alpha}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{\tilde{L}}{(\alpha+1)^3 2^{3\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{3\bar{L}}{(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}\frac{1}{\ell^{3\alpha}}+\frac{9}{(\alpha+1)2^{\alpha}}L\frac{1}{\ell^{3\alpha}}$.

Теорема доведена.

6. Чисельний експеримент

У [7] показано, що для функції $g(u)=\arccos u$ виконується така нерівність:

$$\left|\arccos u_1-\arccos u_2\right|\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left|u_1-u_2\right|^{1/2},\quad \forall u_1,u_2\in[-1,1].$$

У випадку функцій трьох змінних розглянемо функцію $f(x,y,z)\in C^3_{2,L,L,L}$:

$$f(x,y,z)=\arccos^2\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\arccos z\,.$$

Метою експерименту є показати, що

$$\varepsilon = \left| I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| \le$$

$$\le \left| I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p) \right| + \left| \Phi_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| + \left| \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| =$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \tilde{\varepsilon} .$$

Наведемо точні значення інтегралів:

$$I_1^3(2,2,2) = \text{-}0{,}002335925334219 ;$$

$$I_1^3(3,4,5) = \text{-}0{,}000362439817297 .$$

Таблиця 1. Похибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

m	n	p	ℓ	ε_1	ε_2	ε_3
2	2	2	4	0,000000015074464	0,000000077901728	0,000001515398551
			9	0,000000000094878	0,000000006339464	0,000000011519461
			16	0,000000000020418	0,0000000003243	0,000000002870743
3	4	5	4	0,000004694196629	0,000000141145485	0,000000476127751
			9	0,000000000498321	0,000000001707565	0,000000004843324
			16	0,000000000548796	0,000000001046461	0,000000001020178

Таблиця 2. Похибки ε, $\tilde{\varepsilon}$

m	n	p	ℓ	ε	$\tilde{\varepsilon}$
2	2	2	4	0,00000142242236	0,000001608374742
			9	0,000000005274875	0,000000017953802
			16	0,000000003174624	0,000000003215461
3	4	5	4	0,000004359214362	0,000005311469864
			9	0,000000002637438	0,000000007049209
			16	0,000000000522513	0,000000002615435

7. Висновки

У статті пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації на деякому класі Гьольдера, визначених на $G = [0,1]^3$. Подається інформація про неосцилюючий множник підінтегральної функції, заданий слідами на системі взаємоперпендикулярних площин, слідами на системі взаємоперпендикулярних ліній та значеннями функції у вузлових точках. У всіх випадках отримана оцінка похибки наближення 3D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами.

Питання щодо якості кубатурних формул, тобто, чи є побудовані кубатурні формули оптимальними або близькими до них, буде наступним етапом досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / Литвин О.М. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
2. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми / [І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин та ін.]. – К.: Наукова думка, 2011. – 447 с.

3. Lytvyn O.N. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation / O.N. Lytvyn, O.P. Nechuyviter // Proc. of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010), (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk, 2010. – P. 90 – 96.
4. Литвин О.М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є / О.М. Литвин, В.М. Удовиченко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4 (29). – С. 130 – 133.
5. Литвин О.М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій / О.М. Литвин, В.М. Удовиченко // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Харьков, 2005. – Т. 38. – С. 90 – 130.
6. Литвин О.М. Потрійні інтеграли від щвидкоосцилюючих функцій на класі $C^3_{2,L,L,L}$ та інтерфлетація функцій / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукр. конф. 18–20 березня 2010 р. / Під ред. д.ф.-м.н., проф. О.О. Ємця. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 108 – 110.
7. Gal S.G. On the preservation of global smoothness by some interpolation operators / S.G. Gal, J. Szabados // Studio, Scientiarum Mathematicarum Hungarica 35. – 1999. – N 391'1,14. – P. 397 – 414.

Стаття надійшла до редакції 26.03.2012