



УДК 621.3.019.3

А.В. ФЕДУХИН, Н.В. СЕСПЕДЕС ГАРСИЯ

**ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ  
DN -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ СТАТИСТИКИ ОТКАЗОВ**

---

«Факты в тысячу раз важнее слов»

И. Павлов

***Анотація.** Запропоновано графо-аналітичний метод оцінки параметрів DN -розподілу в умовах обмеженої статистики відмов. Метод може використовуватися як своєрідний критерій згоди досліджуваного емпіричного розподілу відмов обраної теоретичної моделі надійності.*

***Ключеві слова:** графо-аналітичний метод, метод квантилів, параметри DN -розподілу.*

***Аннотация.** Предложен графо-аналитический метод оценки параметров DN -распределения в условиях ограниченной статистики отказов. Метод может использоваться в качестве своеобразного критерия согласия исследуемого эмпирического распределения отказов выбранной теоретической модели надежности.*

***Ключевые слова:** графо-аналитический метод, метод квантилей, параметры DN -распределения.*

***Abstract.** The grapho-analytical method for estimating the DN -distribution parameters in reduced failure statistics is proposed. The method can be used as a kind of goodness-of-fit test of investigated empirical distribution of the failures of the chosen theoretical reliability model.*

***Keywords:** grapho-analytical method, method of quantiles, the DN -distribution parameters.*

## 1. Введение

В условиях ограниченной статистики отказов оценка параметров теоретического распределения является сложной задачей, успешное решение которой обеспечивает в дальнейшем наиболее точное прогнозирование количественных показателей надежности объекта исследований. В условиях малой статистики отказов, когда имеются сильно цензурированные выборки, традиционные статистические методы оценки параметров теоретического распределения не работают. В этих случаях прибегают к использованию методов оценки параметров с привлечением дополнительной априорной информации о значениях параметров распределения [1–3] и метода квантилей [4].

В работе проанализирована эффективность метода квантилей по оценке параметра формы DN -распределения в условиях ограниченной статистики отказов и на его основе предложен новый, более эффективный, графо-аналитический метод.

## 2. Метод квантилей

Если известно априорное значение параметра формы  $\nu$ , состоятельной оценкой которого является коэффициент вариации процесса деградации  $V$ , то параметр масштаба DN -распределения – среднюю скорость деградации  $a$  можно определить в результате решения уравнения [4]:

$$\Phi\left(\frac{at_\gamma - 1}{\nu\sqrt{at_\gamma}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{at_\gamma + 1}{\nu\sqrt{at_\gamma}}\right) = \hat{\gamma}, \quad (1)$$

где  $\hat{\gamma} = r / N$  – квантиль, вычисляемая через отношение количества отказов  $r$  к объему выборки  $N$ , поставленной на испытания;  $t_\gamma$  – время появления  $r$ -го отказа.

Решение ряда задач по надежности с учетом различных распределений отказов значительно упрощается, если функции этих распределений табулированы. Впервые эффективное решение задач по надежности с использованием таблиц функции  $DN$ -распределения предложено в [5], где функция  $DN$ -распределения была параметризована и табулирована в параметрах  $x$  и  $\nu$ . Использование в качестве параметра распределения относительной наработки  $at = x$  позволило уйти при табулировании от реального масштаба времени, упростить табулирование функции и ее использование при решении ряда задач по надежности методом квантилей.

$$\Phi\left(\frac{x_\gamma - 1}{\nu\sqrt{x_\gamma}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{x_\gamma + 1}{\nu\sqrt{x_\gamma}}\right) = \hat{\gamma}, \quad (2)$$

где  $x_\gamma = at_\gamma$ .

С использованием таблиц  $DN$ -распределения [4] по исходным данным о  $\hat{\gamma}$  и  $\nu$  определяется значение  $x_\gamma$ , и далее по формуле  $a = \frac{x_\gamma}{t_\gamma}$  вычисляется значение средней скорости деградации  $a$ .

Если в процессе оценки параметра масштаба  $DN$ -распределения  $a$  методом квантилей выбрано (исходя из самых общих рассуждений в области физики отказов [6]) априорное значение параметра формы  $\nu$ , заведомо превышающее действительное значение  $V$ , то это приводит к заниженным результатам прогноза средней скорости деградации. Если априорное значение параметра формы  $\nu$  заведомо меньше действительного значения  $V$ , то, наоборот, это приводит к завышенным результатам прогноза. И только если выбранная априорная оценка параметра формы близка к действительному значению коэффициента вариации генеральной совокупности  $\hat{V}$ , то оценки  $a_i$ , полученные методом квантилей, располагаются вокруг средней оценки  $\hat{a}$  с минимальной дисперсией и представляют собой график зависимости  $a_i = f(t)$ , максимально приближающийся к горизонтальной прямой вокруг истинного среднего значения.

Оценки  $a_i$ , полученные методом квантилей, рекомендуется усреднять, отбросив первые отказы и взяв для усреднения конечный, наиболее линеаризованный, участок зависимости  $a_i = f(t)$ , или воспользоваться формулой для взвешенного среднего, предложенной в [4]. Необходимо иметь в виду, что использование статистической информации о первых отказах приводит к достаточно большим погрешностям в оценке параметра масштаба  $DN$ -распределения. Устойчивой закономерности в этом не обнаружено, так что оценки  $a_i$ , полученные по первым отказам, могут быть как завышенными, так и заниженными по отношению к  $\hat{a}$ , полученной для генеральной совокупности.

Используя закономерности, описанные выше, можно сформулировать следующий графо-аналитический метод оценки параметров  $DN$ -распределения.

### 3. Графо-аналитический метод

Процесс деградации изделий электронной техники, наряду с монотонными реализациями (механические разрушения при термоэлектроциклировании) вследствие электрических явлений, имеет и немонотонные реализации, поэтому в общем случае принято рассматривать деградацию этих изделий как процесс с немонотонными реализациями (рис. 1). При этом тангенс угла наклона среднего значения определяющих параметров процессов деградации (наклонная сплошная линия на графике), протекающих в изделии, представляет собой постоянную величину, равную средней скорости обобщенного процесса деградации.

$$\operatorname{tg} \alpha = \hat{a} = \text{const}. \quad (3)$$

При формализации  $DN$ -распределения процесс деградации для совокупности однотипных изделий предполагается однородным, то есть с постоянной средней скоростью, постоянным средним квадратическим отклонением скорости и, как следствие, постоянным коэффициентом вариации скорости (рис. 2).

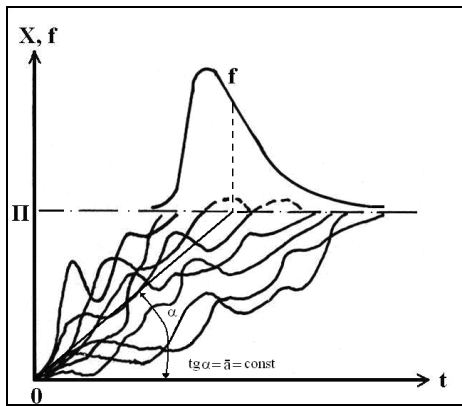


Рис. 1. График формирования плотности  $DN$ -распределения для изделия

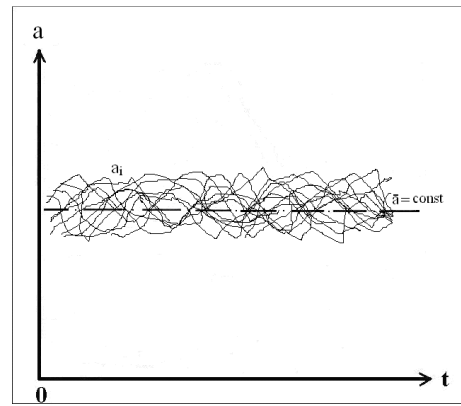


Рис. 2. График теоретической зависимости  $a_i = f(t)$  для совокупности изделий

Графо-аналитический метод оценки параметров  $DN$ -распределения опирается на анализ поведения графиков зависимости  $a_i = f(t)$ , полученной методом квантилей. Наилучшим выбором априорного значения  $\nu$  считается такой выбор, при котором график зависимости  $a_i = f(t)$  наиболее точно описывается прямой горизонтальной линией, что согласуется с гипотезой о постоянстве скорости деградации, принятой при формализации  $DN$ -распределения [4, 5] (рис. 2).

В тех случаях, когда по графику зависимости  $a_i = f(t)$  трудно сделать вывод о наилучшем варианте выбора априорного значения  $\nu$  (особенно сложно сделать выбор по статистике первых отказов), можно воспользоваться следующим формальным критерием.

**Критерий подбора априорного значения параметра формы.** Наиболее приемлемое априорное значение параметра формы  $\nu$  лежит в области значений, при которых происходит смена знака тренда средней скорости деградации ( $h$ ) на графике  $a_i = f(t)$ .

$$h = \frac{a_n - a_1}{\bar{a}_i}, \quad (4)$$

где  $a_1, a_n$  – оценки скорости деградации изделия, полученные по квантилям, соответственно, минимального и максимального уровней;  $\bar{a}_i$  – среднее значение оценок скоростей деградации, полученных методом квантилей.

$$\bar{a}_i = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \quad (5)$$

Проиллюстрируем эффективность работы данного критерия на примере натуральных испытаний на долговечность образцов изделий, статистика отказов которых хорошо описывается  $DN$ -распределением.

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера испытания образцов изделий из алюминиевого сплава В-95 на усталостную долговечность [6]. Необходимо оценить параметры  $DN$ -распределения графо-аналитическим методом.

Первые элементы выборки объемом  $N=463$  с соответствующими квантилями в диапазоне от 0,0021 до 0,3131 приведены в табл. 1. В таблице введены следующие обозначения:  $r$  – накопленное количество отказов на момент времени  $t_\gamma$ ;  $t_\gamma$  – время испытаний, соответствующее накопленному количеству отказов;  $\gamma$  – эмпирическая вероятность отказа.

Таблица 1. Таблица данных

$r$	$\gamma$	$t_\gamma, 10^3$ цикл
1	0,0021	44
5	0,0107	49
10	0,0215	57
15	0,0323	59
20	0,0431	63
25	0,0539	66
30	0,0647	68
35	0,0755	73
40	0,0863	75
45	0,0971	78
50	0,1079	79
55	0,1187	82
60	0,1295	84
65	0,1403	86
70	0,1511	89

Продолж. табл. 1

$r$	$\gamma$	$t_\gamma, 10^3$ цикл
75	0,1619	91
80	0,1727	93
85	0,1835	95
90	0,1943	97
95	0,2051	99
100	0,2159	102
105	0,2267	102
110	0,2375	105
115	0,2483	106
120	0,2591	107
125	0,2699	108
130	0,2807	109
135	0,2915	111
140	0,3023	113
145	0,3131	114

Проверим работу графо-аналитического метода на квантилях сверх малого уровня. В качестве исходных данных возьмем квантили уровня от 0,0021 до 0,0215. Для различных значений параметра  $\nu$  определим методом квантилей значения  $a_i$  по данным о  $\gamma$  и  $r$  и вычислим значение критерия  $h$  по формуле (4). Данные приведены в табл. 2.

Таблица 2. Таблица данных

$r$	$\gamma$	$t_\gamma, 10^3$ цикл	$\nu = 0,6$		$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$		$\nu = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6}$ цикл <sup>-1</sup>	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл <sup>-1</sup>	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл <sup>-1</sup>	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл <sup>-1</sup>	$h$
1	0,0021	44	4,545	0,1106	5,681	0,1503	7,272	0,0358	9,318	-0,0397
5	0,0108	49	5,102		6,327		7,959		9,796	
10	0,0215	57	5,088		6,614		7,544		8,947	

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,0215 приведен на рис. 3.

**Выводы по оценкам параметров.** Смена знака тренда  $h$  произошла при  $0,3 < \nu < 0,4$ , поэтому  $\nu = \frac{0,3+0,4}{2} = 0,35$ ;  $\bar{a}_i = 8,473 \cdot 10^{-6}$  цикл $^{-1}$ ,  $\delta_\nu = \frac{0,56-0,35}{0,56} = 0,375$ ,  
 $\delta_a = \frac{8,473 \cdot 10^{-6} - 5,9 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,436$ .

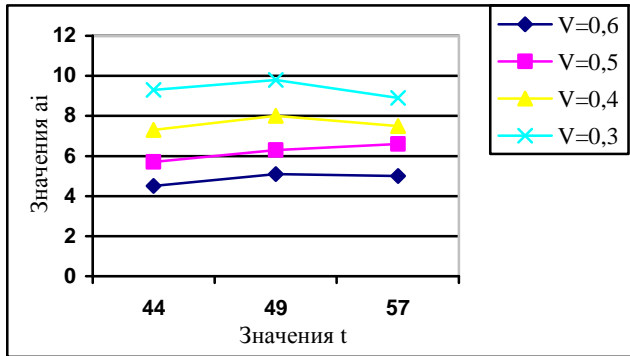


Рис. 3. График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,0215

эффективности графо-аналитического метода на статистических данных, соответствующих квантилям уровня от 0,0323 до 0,0539. Данные значений  $a_i$  и  $h$  приведены в табл. 3.

Таблица 3. Таблица данных

$r$	$\gamma$	$t_\gamma, 10^3$ цикл	$\nu = 0,6$		$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$		$\nu = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$
15	0,0323	59	5,254	0,0092	6,44	-0,0119	7,797	-0,0288	8,915	-0,0143
20	0,0431	63	5,397		6,349		7,619		8,889	
25	0,0539	66	5,303		6,364		7,576		8,788	

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0539 приведен на рис. 4.

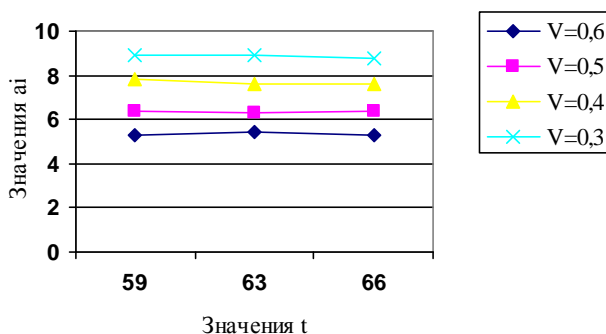


Рис. 4. График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0539

Увеличим количество статистической информации об отказах до квантилей уровня 0,0863. Данные значений  $a_i$  и  $h$  приведены в табл. 4.

Ошибки в оценке как параметра формы, так и параметра масштаба, по первым отказам довольно значительные. Известно, что при обработке результатов испытаний на надежность считается, что первые отказы в выборке имеют наименьший вес, так как их появление вызвано серьезными дефектами, не обнаруженными в процессе выходного контроля качества продукции. Первые отказы, как правило, «выпадают» из общей статистической закономерности, поэтому для дальнейшего анализа мы их отбросим и продолжим исследование эф-

**Выводы по оценкам параметров.** Последняя смена знака тренда  $h$  произошла при  $0,5 < \nu < 0,6$ , поэтому

$$\nu = \frac{0,5+0,6}{2} = 0,55, \quad \bar{a}_i = 5,851 \cdot 10^{-6} \text{ цикл}^{-1},$$

$$\delta_\nu = \frac{0,56-0,55}{0,56} = 0,018,$$

$$\delta_a = \frac{5,9 \cdot 10^{-6} - 5,851 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,008.$$

Анализируя абсолютные значения трендов 0,0092 и 0,0119, можно сделать еще и дополнительный вывод о том, что истинное значение параметра формы  $\nu$  находится ближе к значению 0,6.

Таблица 4. Таблица данных

$r$	$\gamma$	$t_\gamma, 10^3$ цикл	$\nu = 0,6$		$\nu = 0,5$		$\nu = 0,4$		$\nu = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6}$ цикл $^{-1}$	$h$
15	0,0323	59	5,254	0,0148	6,44	-0,0273	7,797	-0,0615	8,915	-0,0747
20	0,0431	63	5,397		6,349		7,619		8,889	
25	0,0539	66	5,303		6,364		7,576		8,788	
30	0,0647	68	5,441		6,47		7,647		8,823	
35	0,0755	73	5,342		6,164		7,260		8,356	
40	0,0863	75	5,333		6,267		7,333		8,267	

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0863 приведен на рис. 5.

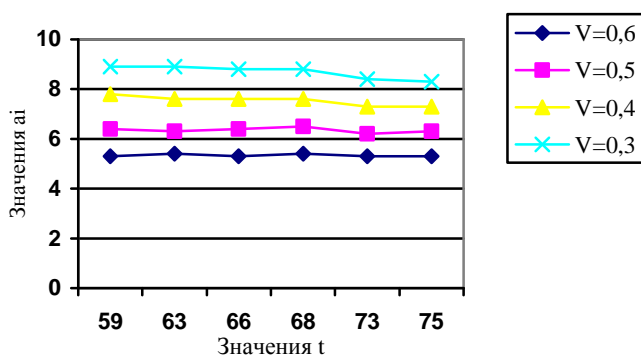


Рис. 5. График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0864

равной 0,1, дальнейшее увеличение статистики отказов не приводит к уточнению оценки параметра формы. Если принять дискретность равной 0,05, то значение  $\nu$  можно было бы оценить еще более точно. Важно отметить, что описанный процесс нахождения наиболее истинного значения выборочной оценки параметра формы  $\nu$  с помощью формального критерия согласия достаточно алгоритмичен и может с успехом выполняться на ЭВМ.

Посмотрим, какой график изменения средней скорости деградации получается при увеличении статистической информации до квантилей малого уровня 0,3131.

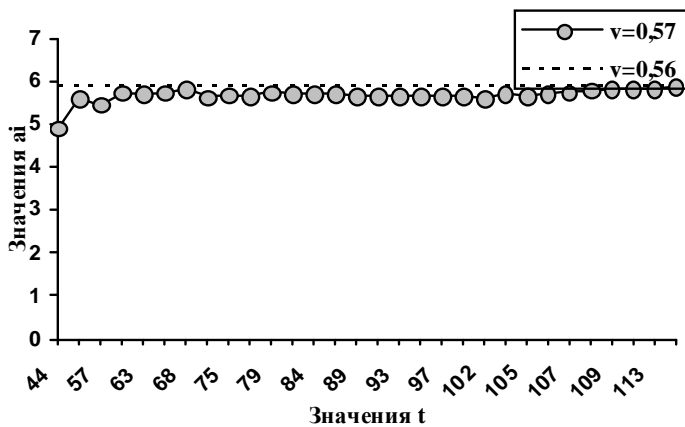


Рис. 6. График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,3131

**Выводы по оценкам параметров.** Смена знака тренда  $h$  не изменилась при увеличении статистики отказов и вновь произошла при  $0,5 < \nu < 0,6$ . Поэтому

$$\nu = \frac{0,5 + 0,6}{2} = 0,55, \quad \bar{a}_i = 5,844 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{цикл}^{-1}, \quad \delta_\nu = \frac{0,56 - 0,55}{0,56} = 0,018,$$

$$\delta_a = \frac{5,9 \cdot 10^{-6} - 5,844 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,009.$$

При имеющейся дискретности изменения априорного значения  $\nu$ , изменения апостериорного значения  $\nu$ , полученные в результате обработки полной выборки образцов изделий В-95:  $N = 463$ ,  $\hat{\nu} = 0,56$ ,  $\hat{S} = 169 \cdot 10^3$  цикл,  $\hat{a} = 5,9 \cdot 10^{-6}$  цикл $^{-1}$ .

Оценки параметров  $DN$ -распределения, полученные графоаналитическим методом с использованием предложенного формального критерия согласия, очень близки ( $\nu = 0,55$ ,  $\bar{a}_i = 5,844 \cdot 10^{-6}$  цикл $^{-1}$ ) к оценкам, полученным экспериментальным путем по полной выборке.

На рис. 6 изображен график зависимости оценки параметра масштаба  $DN$ -распределения, полученной по квантилям от 0,0021 до 0,3131 для  $\nu = 0,57$ .

Нетрудно видеть, что почти при полном совпадении априорного значения параметра формы  $\nu = 0,57$  с выборочной оценкой коэффициента вариации  $\hat{V} = 0,56$  график зависимости  $a_i = f(t)$  представляет собой довольно ровную прямую линию, расположенную чуть ниже оценки  $\hat{a} = 5,9 \cdot 10^{-6}$  цикл<sup>-1</sup>, полученной по полной выборке. Исключением, как и предполагалось, являются первые отказы, которые дают несколько заниженную оценку средней скорости деградации и выпадают из общей тенденции.

#### 4. Выводы

Предложенный в работе графо-аналитический метод позволяет в условиях ограниченной статистики отказов по квантилям сверх малого уровня довольно точно определять не только параметры  $DN$ -распределения, но и делать выводы о возможности и правомерности выравнивания (описания) исследуемой выборки с помощью данного диффузионного распределения, т.е. может использоваться в качестве своеобразного критерия согласия исследуемого эмпирического распределения отказов выбранной теоретической модели надежности. Описанный процесс нахождения наиболее истинных значений параметров  $DN$ -распределения с помощью формального критерия согласия достаточно алгоритмичен и может выполняться на ЭВМ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания надёжности технических объектов / Савчук В.П. – М.: Наука, 1989. – 303 с.
2. Прохоренко В.Д. Учёт априорной информации при оценке надёжности / В.Д. Прохоренко, В.Ф. Голиков. – М.: Наука и техника, 1978. – 255 с.
3. ГОСТ 27.201-81. Надёжность в технике. Оценка надёжности при малом числе наблюдений с использованием дополнительной информации. – Введ. 01.07.1981. – Москва: Издательство стандартов, 1981. – 136 с.
4. Стрельников В.П. Оценка и прогнозирование надёжности электронных элементов и систем / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. – К.: Логос, 2002. – 486 с.
5. Погребинский С.Б. Проектирование и надёжность многопроцессорных ЭВМ / С.Б. Погребинский, В.П. Стрельников. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.
6. ГОСТ 27.005-97. Надёжность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 05.12.1997. – Киев: Госстандарт Украины, 1997. – 45 с.

*Стаття надійшла до редакції 25.04.2012*