

УДК 624.041

В.П. ВОЛОБОЕВ, В.П. КЛИМЕНКО

МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Анотація. Запропоновано метод коректного формулювання математичної моделі стрижневої системи. Метод передбачає застосування графа для представлення розрахункової схеми стрижневої системи. Запропоновано еквівалентні схеми заміщення об'єктів, що задовольняють вимогам зображення топології об'єктів у вигляді графів. Для запису основної системи рівнянь будівельної механіки в матричному вигляді запропоновано використати матриці контурів і перерізів. Сформульовано методіку цілеспрямованого вибору перемінних при коректному формулюванні математичної моделі. Наведено приклад розрахунку стрижневої системи.

Ключові слова: стрижнева система, елемент стрижневої системи, еквівалентна схема заміщення, некоректне завдання, граф розрахункової схеми стрижневої системи, матриця контурів, матриця перерізів, математична модель, погана обумовленість, коректне формулювання математичної моделі.

Аннотация. Предложен метод корректной формулировки математической модели стержневой системы. Метод предполагает применение графа для представления расчетной схемы стержневой системы. Предложены эквивалентные схемы замещения объектов, удовлетворяющие требованиям представления топологии объектов в виде графов. Для записи основной системы уравнений строительной механики в матричном виде предложено использовать матрицы контуров и сечений. Сформулирована методика целенаправленного выбора переменных при корректной формулировке математической модели. Приведен пример расчета стержневой системы.

Ключевые слова: стержневая система, элемент стержневой системы, эквивалентная схема замещения, некорректная задача, граф расчетной схемы стержневой системы, матрица контуров, матрица сечений, математическая модель, плохая обусловленность, корректная формулировка математической модели.

Abstract. The method of the correct formulation of mathematical model of the framework is offered. The method assumes application of the graph for representation of the design diagram of framework. Equivalent circuits of objects which meet requirements of representation of topology objects in the form of graph are offered. It is offered to use matrixes of circuits and cutsets for record of the basic equations system of structural mechanics in a matrix kind. The technique of a purposeful choice of variables at the correct formulation of mathematical model is formulated. Example of framework calculation is given.

Keywords: framework, an element of the framework, an equivalent circuit, an incorrect problem, the graph of the design model of framework, circuit matrix, cutset matrix, mathematical model, ill-conditioning, the correct formulation of a mathematical model.

1. Введение

В настоящее время моделирование стержневых систем является составной частью таких систем проектирования, как ANSYS [1], NASTRAN [2] и др. Под стержневой системой подразумевается сооружение, составленное из стержней, т.е. из таких элементов, у которых один размер (длина) превышает два других. Анализ современного состояния расчета стержневых систем [3–5] показал, что проблема получения достоверных результатов при решении некорректной задачи, возникающей при моделировании стержневой системы, является актуальной. Некорректная задача относится к классу плохо обусловленных систем уравнений, которые, как принято считать, имеют неустойчивое решение. Обычно в

этом случае применяются методы решения некорректных задач, требующие участия пользователя.

В работах [6–8] показано, что плохая обусловленность системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), описывающей технический объект, есть необходимое, но не достаточное условие того, что СЛАУ имеет неустойчивое решение. Там же предложен способ корректной формулировки математической модели технической задачи, не требующий участия пользователя и обеспечивающий устойчивое решение СЛАУ. Способ корректной формулировки математической модели рассмотрен применительно к моделированию электрических цепей. Как следует из литературы [9], есть много общего между составлением математической модели электрической цепи и стержневой системы.

В связи с этим представляет интерес разработка способа корректной формулировки математической модели стержневой системы. Из основных задач анализа кинематики и статики стержневых систем будет рассмотрена задача статического анализа системы для определения положения равновесия самой системы и внутренних сил в ее элементах.

2. Сравнительный анализ методов расчета стержневых систем и электрических цепей

Задачи, которые необходимо решить при разработке способа корректной формулировки математической модели стержневой системы, будут определены из сравнительного анализа методов составления математической модели стержневой системы и электрической цепи. При этом ограничимся рассмотрением линейных электрических цепей и стержневых систем. При анализе методов использовались материалы, приведенные в работах [3, 4] и [6, 8]. В табл. 1 приведены результаты сравнения основных этапов методов составления математических моделей, а именно:

1. Форма представления уравнений, описывающих элементы стержневой системы и электрической цепи.
2. Графическое представление стержневой системы и электрической цепи.
3. Применяемые законы при составлении математической модели стержневой системы и электрической цепи.
4. Формализованное представление описания математической модели стержневой системы и электрической цепи.

На основании анализа методов составления математической модели, приведенных в табл. 1, можно сделать следующие выводы.

Для элементов электрической цепи разработаны эквивалентные схемы замещения, содержащие только двухполюсные компоненты. Функциональные зависимости этих компонент описывают связь между током, протекающим через компоненту, и напряжением, падающим на компоненте. Кроме того, определен тип компонент электрической цепи в зависимости от аргументов компонентного уравнения.

В случае расчета стержневой системы уравнения, описывающие элемент, устанавливают связь между узловыми перемещениями элемента и внутренними усилиями на концах элемента. Элементы стержневой системы могут быть как двухполюсными, так и многополюсными. Построение эквивалентной схемы замещения элемента и определение типа компонент не применяются.

На втором этапе строятся граф электрической цепи и расчетная схема стержневой системы. Ветви графа соответствуют двухполюсным компонентам эквивалентной схемы, а узлы – соединению двухполюсных компонент, т.е. граф электрической схемы отображает как топологию, так и типы компонент эквивалентной электрической схемы. Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы инцидентий A , контуров B и сечений Q .

Таблица 1. Методы составления математической модели стержневой системы и электрической цепи

№	Этап	Механика стержневых систем	Электротехника
1	Описание элемента	<p>1. <i>Общий подход</i> <i>Геометрическое уравнение</i> $\bar{\lambda} = -A^T \bar{u}$, где \bar{u} – узловые перемещения, $\bar{\lambda}$ – деформация компоненты. <i>Физическое уравнение</i> $f_{in} = C \lambda$, где f_{in} – внутренняя сила компоненты, C – матрица жесткости (зависимость внутренних сил от деформации). 2. <i>Метод конечных элементов</i> $f_{in} = k u$, где k – матрица жесткости (зависимость внутренних сил компоненты от узловых перемещений)</p>	<p><i>Уравнение элемента</i> $f(\alpha(\bar{U}, \bar{I})) = 0$ – общий вид уравнения элемента, где α – параметры, \bar{I} – токи и \bar{U} – напряжения, входящие в уравнения. Эквивалентная схема замещения элемента состоит из двухполюсных компонент. Функциональная зависимость компоненты $\bar{I} = f_U(\alpha, \bar{U})$ описывает связь между напряжением U, падающим на компоненте, и током I, протекающим через компоненту. $\bar{I} = G \bar{U}$ – функциональная зависимость линейной компоненты</p>
2	Графическое представление	<p><i>Расчетная схема стержневой системы</i> Содержит многополюсные элементы. Узлы, соединяющие стержни, разделяются на шарнирные и жесткие. Описание расчетной схемы: матрица инцидентий A</p>	<p><i>Граф электрической цепи</i> Содержит двухполюсные компоненты. Описание графа электрической цепи: 1. Матрица инцидентий A. 2. Матрица контуров B, $B = \begin{vmatrix} 1 & F^T \end{vmatrix}$. 3. Матрица сечений Q, $Q = \begin{vmatrix} 1 & -F \end{vmatrix}$</p>
3	Законы	<p><i>Уравнение равновесия</i> Сумма внутренних f_{in} и внешних сил f_o в узле равна нулю – $\sum f = 0$. Уравнения равновесия расчетной схемы $A \bar{f}_{in} = A \bar{f}_o$</p>	<p><i>Законы Кирхгофа в матричном виде</i> 1. Сумма токов в узле равна нулю 1.1. $A \bar{I} = 0$. \bar{I} – вектор токов компонент. 1.2. $Q \begin{vmatrix} I_D \\ I_X \end{vmatrix} = 0$, I_D – токи ком – нт дерева, I_X – токи ком – нт хорд. 2. Сумма напряжений в контуре равна нулю $B \begin{vmatrix} U_D \\ U_X \end{vmatrix} = 0$, U_D – напряжения ком – нт дерева, U_X – напряжения ком – нт хорд</p>
4	Описание объекта	<p><i>Метод узловых перемещений</i> 1. <i>Общий подход</i> $A C A^T \bar{u} = A \bar{f}_o$. 2. <i>Метод конечных элементов</i> $A k \bar{u} = A \bar{f}_o$</p>	<p>1. Метод узловых напряжений $A G A^T \bar{U}_n = -A \bar{J}$, где \bar{J} – вектор источников тока в электрической цепи, \bar{U}_n – вектор узловых напряжений электрической цепи. 2. Метод напряжений компонент дерева $\bar{I}_D - F \bar{I}_X = 0$, $G_D U_D + F^T G_X F U_D = J_D + F^T J_X$</p>

Расчетная схема стержневой системы отображает соединение между собой как двухполюсных, так и многополюсных элементов схемы. Узлы, соединяющие стержни, разделяются на шарнирные и жесткие. Перемещения узлов, отсчитываемые от базового узла расчетной схемы, есть в то же время узловые перемещения элементов. Для описания топологии расчетной схемы применяется только матрица инцидентий A .

Способ корректной формулировки математической модели электрической цепи базируется на основной системе уравнений электрической цепи, куда входят уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа, и компонентные уравнения двухполюсников. Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы контуров и сечений. Следует отметить, что матрица контуров графа составляется следующим образом. Сначала выбирается дерево графа эквивалентной схемы. Контуров образуются присоединением хорд к дереву графа. Только в этом случае матрицы контуров и сечений могут быть представлены в виде, приведенном в табл. 1. Переменные составляемой системы уравнений выбираются из напряжений и/или токов компонент в результате анализа основной системы уравнений. При этом учитываются параметры компонентных уравнений и особенности топологических матриц, присущие конкретной цепи или классу цепей. В конечном счете, из основной системы уравнений выделяются система уравнений, соответствующая выбранным переменным, и система уравнений связи, с помощью которых вычисляются все напряжения и токи компонент. Преобразованная таким образом основная система уравнений рассматривается как математическая модель электрической цепи.

В качестве основных уравнений строительной механики применяются уравнения равновесия, связывающие внутренние усилия на концах узлов, и внешние силы, приложенные к узлам. Суть уравнений равновесия заключается в том, что сумма внутренних усилий и внешних сил в узле равна нулю, т.е. уравнения равновесия идентичны первому закону Кирхгофа электротехники. В качестве переменных составленных уравнений выступают узловые перемещения, отсчитываемые от базового узла. Для описания топологии расчетной схемы применяется матрица инцидентий. Простой алгоритм формализованного составления уравнений схемы и слабозаполненная матрица СЛАУ, описывающая схему, являются отличительной особенностью данного метода. В качестве недостатка метода следует отметить неустойчивое решение плохо обусловленной системы уравнений.

Таким образом, из вышерассмотренного следует, что в случае применения метода корректной формулировки математической модели расчетная схема стержневой системы должна быть представлена в виде графа. Для этого необходимо разработать эквивалентные схемы замещения элементов стержневой системы, состоящие из двухполюсных компонент. При этом математическое описание двухполюсных компонент должно устанавливать связь между внутренним усилием, приложенным к компоненте, и перемещением компоненты. Кроме того, должен быть определен тип компоненты. Только после этого можно разработать методику корректной формулировки математической стержневой системы.

3. Эквивалентные схемы замещения элементов стержневой системы

Как следует из литературы [3, 4, 10], расчетная схема состоит из следующих условных элементов: опор, стержней, связей, а также условно представленных нагрузок и других воздействий. Обычно при описании элементов используется локальная система координат, в то время как при составлении математической модели расчетной схемы применяется глобальная. В дальнейшем будут рассматриваться только двумерные элементы, математические модели которых разработаны с применением метода конечных элементов.

В случае представления расчетной схемы стержневой системы в виде графа, прежде всего, необходимо иметь математическую модель элемента в том виде, для которого можно предложить эквивалентную схему замещения. Это достигается преобразованием математической модели. Суть преобразования заключается в том, чтобы перейти от переменных, которые характеризуют поведение элемента на полюсах, к переменным, характеризующим поведение элемента между полюсами. На заключительном этапе уравнениям, описывающим поведение элемента, ставится в соответствие граф, состоящий из двухполюсных компонент, функциональные зависимости которых отображают связь между переменными, приложенными к компонентам, и функциями, описывающими поведение компонент.

Введем определения и понятия, характеризующие компонентные уравнения двухполюсников, которые будут использоваться при построении эквивалентных схем элементов и метода корректной формулировки математической модели стержневой системы.

В общем случае линейное компонентное уравнение двухполюсника можно представить как

$$G_{f_i} f_i + G_{u_i} u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n K_{u_j} u_j + \sum_{k=1, k \neq i}^m K_{f_k} f_k + const = 0, \quad (1)$$

где f_i – внутреннее усилие, приложенное к i -ой компоненте, u_i – перемещение i -ой компоненты, u_j – перемещение j -ой компоненты, f_k – внутреннее усилие, приложенное к k -ой компоненте, G_{f_i} , G_{u_i} , K_{u_j} , K_{f_k} , $const$ – параметры компонентного уравнения. Если уравнение (1) разрешимо относительно внутреннего усилия f_i , т.е.

$$f_i = const + G_i u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n K_j u_j + \sum_{k=1, k \neq i}^m K_k f_k, \quad (2a)$$

то такая компонента считается перемещением управляемой, а G_i – собственной жесткостью. В случае, если $K_k = 0$, то компонента считается зависимой от перемещения других компонент, иначе, если и $K_j = 0$, независимой. Если в уравнении (2a) $G_{u_i} = 0$, т.е. уравнение имеет вид

$$f_i = const + \sum_{j=1, j \neq i}^n K_j u_j + \sum_{k=1, k \neq i}^m K_k f_k, \quad (2б)$$

то такая компонента считается (в случае, если $K_j = 0$ и $K_k = 0$, то независимым иначе зависимым) источником внутреннего усилия. Как следует из уравнения (2б), перемещение, приложенное к компоненте, определяется внешними условиями. Когда уравнение (1) разрешимо относительно перемещения u_i , приложенного к компоненте, и $G_{f_i} = 0$, т.е.

$$u_i = const + \sum_{j=1, j \neq i}^n K_j u_j + \sum_{k=1, k \neq i}^m K_k f_k, \quad (2в)$$

то такую компоненту будем считать (если $K_j = 0$ и $K_k = 0$, то независимым иначе зависимым) источником перемещения (смещения). Для источника перемещений внутреннее усилие, приложенное к компоненте, определяется внешними условиями.

3.1. Эквивалентные схемы опор и внешних воздействий

Опорами называют связи, соединяющие конструкцию с основанием. Основание является базовым узлом, от которого ведется отсчет узловых перемещений. Базовый узел есть общий для глобальной системы координат. На рис. 1 приведены основные виды опор и внешних воздействий, описание которых задано в глобальной системе координат. Опора может быть как неподвижной (рис. 1а, 1б), так и подвижной по одной из координатных осей (рис. 1в). К неподвижной опоре может быть приложено внешнее воздействие в виде

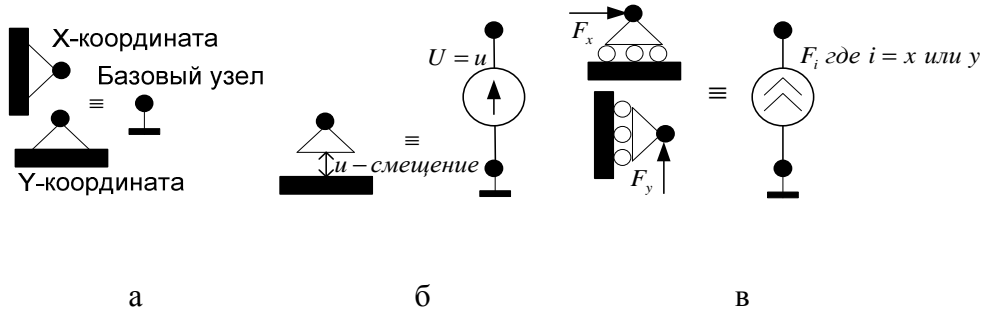


Рис. 1. Основные виды опор в глобальной системе координат и их эквивалентные схемы: а) неподвижная опора; б) неподвижная опора со смещением; в) подвижная опора по направлению координатной оси x или y с приложенной внешней силой F_x или F_y

смещения (рис. 1б) по одной из координатных осей, а подвижной – внешнее усилие (рис. 1в). В эквивалентной схеме смещение представлено независимым источником смещения U , а внешнее усилие – независимым

источником внешней силы F . На рис. 2 приведена опора, на которую действуют в локальной системе координат смещение u'_y

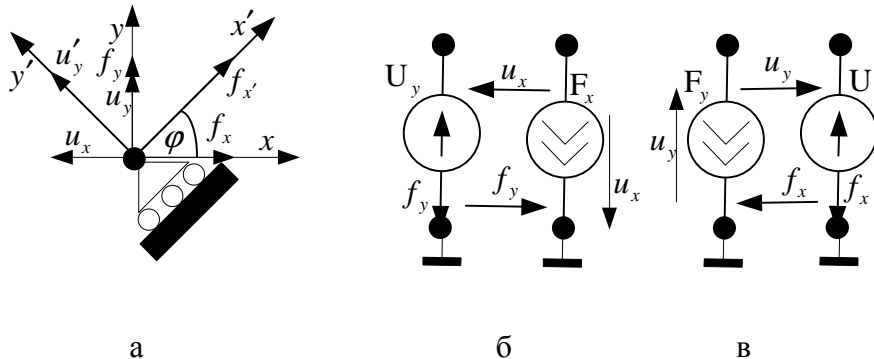


Рис. 2. Внешние воздействия: а) приложенные к опоре в локальной системе координат; б) эквивалентные схемы замещения воздействий в глобальной системе координат

по неподвижному направлению (ось y') и внешняя сила f_x по подвижному (ось x'), а также соответствующие ей эквивалентные схемы замещения в глобальной системе координат. На рис. 2а параметр φ – угловое смещение

между глобальной и локальной системами координат. Узловое смещение и внешняя сила, приложенные к опоре в глобальной системе координат, определяются из уравнений связи [10]

$$\begin{aligned} u_{y'} &= -m u_x + l u_y, \\ f_{x'} &= l f_x + m f_y, \end{aligned} \quad (3)$$

где u_x – узловое перемещение по оси x , u_y – узловое перемещение по оси y , f_x – внешняя сила, приложенная к опоре по оси x , а f_y – внешняя сила по оси y , параметры l и m вычисляются по формулам

$$l = \cos(\varphi), \quad m = \sin(\varphi). \quad (4)$$

Как следует из уравнения (3), можно предложить два варианта построения эквивалентной схемы замещения опоры. В первом случае в качестве независимых переменных выбираются перемещение u_x и внешняя сила f_y , т.е.

$$u_y = \frac{m}{l} u_x + \frac{1}{l} u'_y, \quad (5a)$$

$$f_x = -\frac{m}{l} f_y + \frac{1}{l} f'_{x'}. \quad (5б)$$

Уравнения (5а) и (5б) следует рассматривать как уравнения, описывающие поведение двухполосных компонент. Как следует из определения типов компонент, уравнение (5а) есть компонентное уравнение источника смещения U_y (рис. 2б) (ось y), зависящего от перемещения u_x , приложенного к источнику внутреннего усилия, а уравнение (5б) есть компонентное уравнение источника внешней силы F_x (рис. 2б) (ось x), зависящего от внутреннего усилия f_y источника смещения.

Во втором случае в качестве независимых переменных выбираются перемещение u_y и внешняя сила f_x . В этом случае компонентные уравнения имеют следующий вид:

$$u_x = \frac{l}{m} u_y - \frac{1}{m} u'_y, \quad (6a)$$

$$f_y = -\frac{l}{m} f_x + \frac{1}{m} f'_{x'}. \quad (6б)$$

Компонентное уравнение (6а) описывает источник смещения U_x (рис. 2в) (ось x), зависящий от перемещения u_y компоненты F_y (ось y), а компонентное уравнение (6б) есть описание источника внешней силы F_y (рис. 2в) (ось y), зависящего от внутреннего усилия f_x компоненты U_x .

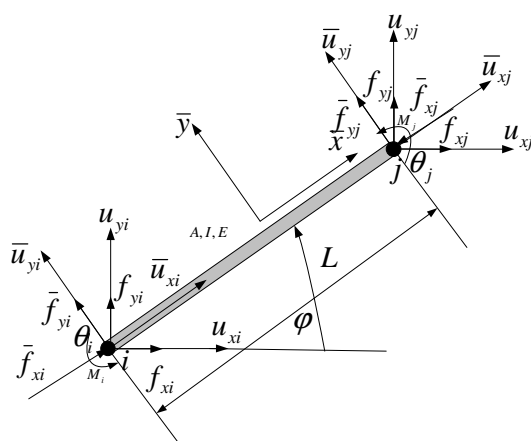


Рис. 3. Условное обозначение стержня с жесткими соединениями с указанием параметров стержня и воздействий, действующих на стержень, в разных системах координат

3.2. Эквивалентная схема замещения стержня

С точки зрения характера взаимного соединения элементов различают сооружения: 1) с шарнирными соединениями; 2) с жесткими соединениями; 3) комбинированные. В расчетных схемах плоских стержневых систем шарнир рассматривается как устройство, допускающее только взаимный поворот двух стержней около оси, перпендикулярной плоскости системы и проходящей через центр шарнира. Силы трения в шарнире обычно считаются равными нулю. В связи с тем, что параметры математического описания стержня, применяемого в расчетах стержневых систем методом конечных элементов, известны в локальной системе координат [4,

10], поэтому ниже будут приведены уравнения связи математического описания в локальной и глобальной системах координат [10].

3.2.1. Связь математического описания стержня в локальной и глобальной системах координат

На рис. 3 приведена расчетная схема стержня с жесткими соединениями с указанием параметров стержня и воздействий, действующих на стержень в локальной и глобальной системах координат, где i, j – узлы, L – длина, A – поперечное сечение, I – момент инерции площади поперечного сечения, E – модуль упругости стержня, \bar{u}, u – узловые перемещения концов стержня, \bar{f}, f – внутренние усилия, действующие на концах стержня, в локальной и глобальной системах координат, θ_i, θ_j – углы изгиба узлов стержня, M_i, M_j – крутящие моменты узлов стержня. Расчетные схемы стержня с комбинированными и шарнирными соединениями отличаются от приведенной только тем, что на одном или обоих концах отсутствуют изгиб узла стержня и крутящий момент.

Связь внутренних усилий, действующих на концах стержня, с узловыми перемещениями концов стержня в локальной системе координат описывается формулой

$$\bar{f} = \bar{k}\bar{u}, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{u} = \left| \bar{u}_{x_i} \quad \bar{u}_{y_i} \quad \theta_i \quad \bar{u}_{x_j} \quad \bar{u}_{y_j} \quad \theta_j \right|^t, \bar{f} = \left| \bar{f}_{x_i} \quad \bar{f}_{y_i} \quad M_i \quad \bar{f}_{x_j} \quad \bar{f}_{y_j} \quad M_j \right|^t \quad (8)$$

есть векторы входных и выходных воздействий, действующих на стержень в локальной системе координат, t – обозначает операцию транспонирования, \bar{k} – матрица жесткости элемента стержня.

В свою очередь соотношения, связывающие перемещения узлов и внутренние усилия на узлах в локальной и глобальной системах координат, в матричной форме будут выглядеть следующим образом:

$$\bar{u} = Tu, \quad (9)$$

$$\bar{f} = Tf, \quad (10)$$

где T – матрица направляющих косинусов для i, j узлов, а

$$u = \left| u_{x_i} \quad u_{y_i} \quad \theta_i \quad u_{x_j} \quad u_{y_j} \quad \theta_j \right|^t, f = \left| f_{x_i} \quad f_{y_i} \quad M_i \quad f_{x_j} \quad f_{y_j} \quad M_j \right|^t \quad (11)$$

векторы входных и выходных воздействий, действующих на стержень в глобальной системе координат.

Учитывая тот факт, что обратная матрица направляющих косинусов T^{-1} совпадает с транспонированной матрицей, т.е.

$$T^{-1} = T^t, \quad (12)$$

формула (7) в глобальной системе координат приобретает следующий вид:

$$f = T^t \bar{k} Tu. \quad (13)$$

Выражение

$$k = T^t \bar{k} T \quad (14)$$

связывает матрицу жесткости стержня k в глобальной системе координат с матрицей жесткости \bar{k} в локальной системе координат.

3.2.2. Эквивалентная схема замещения стержня с жесткими соединениями

Рассмотрим построение эквивалентной схемы замещения стержня с жесткими соединениями (рис. 3). Как следует из литературы [9, 10], матрица жесткости в локальной системе координат имеет вид

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а матрица направляющих косинусов T для i, j узлов соответственно

$$T = \begin{pmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Учитывая уравнения (7–16), матрицу жесткости стержня k в глобальной системе координат можно представить следующим образом:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI}{L^3}m^2 & \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & -\frac{6EI}{L^2}m & -\frac{EA}{L}l^2 - \frac{12EI}{L^3}m^2 & -\frac{EA}{L}lm + \frac{12EI}{L^3}lm & -\frac{6EI}{L^2}m \\ \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI}{L^3}l^2 & \frac{6EI}{L^2}l & -\frac{EA}{L}lm + \frac{12EI}{L^3}lm & -\frac{EA}{L}m^2 - \frac{12EI}{L^3}l^2 & \frac{6EI}{L^2}l \\ -\frac{6EI}{L^2}m & \frac{6EI}{L^2}l & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}m & -\frac{6EI}{L^2}l & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L}l^2 - \frac{12EI}{L^3}m^2 & -\frac{EA}{L}lm + \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{6EI}{L^2}m & \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI}{L^3}m^2 & \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{6EI}{L^2}m \\ \frac{EA}{L}lm + \frac{12EI}{L^3}lm & -\frac{EA}{L}m^2 - \frac{12EI}{L^3}l^2 & -\frac{6EI}{L^2}l & -\frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI}{L^3}l^2 & -\frac{6EI}{L^2}l \\ -\frac{6EI}{L^2}m & \frac{6EI}{L^2}l & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}m & -\frac{6EI}{L^2}l & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Из анализа системы уравнений (13) и матрицы жесткости (17) следует, что внутренние усилия, действующие на узлах стержня, с учетом указанных направлений, совпадают, но имеют разные направления. В качестве внутренних усилий $f_{x_{ji}}, f_{y_{ji}}$, приложенных к стержню, выбираются усилия f_{x_j}, f_{y_j} , приложенные к j узлу стержня, а перемещения, приложенные к узлу j , определяются через внутренние перемещения $u_{x_{ji}}, u_{y_{ji}}$ компоненты и перемещения узла i , угловой сдвиг, приложенный к узлу j , – через угловой сдвиг θ_1 уз-

ла i и угловой сдвиг θ_{ji} компоненты. Это означает, что перемещения и угловой сдвиг узла j можно представить как

$$\begin{aligned} u_{x_j} &= u_{x_i} + u_{x_{ji}}, \\ u_{y_j} &= u_{y_i} + u_{y_{ji}}, \\ \theta_j &= \theta_i + \theta_{ji}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда, с учетом (11), (17) и (18), система уравнений (13) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} M_i \\ f_{x_{ji}} \\ f_{y_{ji}} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}m & -\frac{6EI}{L^2}l & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^2}m & \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI}{L^3}m^2 & \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{6EI}{L^2}m \\ -\frac{12EI}{L^2}l & \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm & \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI}{L^3}l^2 & -\frac{6EI}{L^2}l \\ \frac{6EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}m & -\frac{6EI}{L^2}l & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_{x_{ji}} \\ u_{y_{ji}} \\ \theta_{ji} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что системе уравнений (19) будет соответствовать эквивалентная схема замещения, приведенная на рис. 4.

Функциональные зависимости компонент, приведенных на рис. 4, имеют следующий вид:

$$f_{x_{ji}} = G_x u_{x_{ji}} + K_{yx} u_{y_{ji}} + K_{\theta_x} \theta_i + K_{\theta_{jx}} \theta_{ji}, \quad (20)$$

где $G_x = \frac{EA}{L}l^2 + \frac{12EI}{L^3}m^2$, $K_{yx} = \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm$, $K_{\theta_x} = \frac{12EI}{L^2}l$, $K_{\theta_{jx}} = \frac{6EI}{L^2}l$.

$$f_{y_{ji}} = G_y u_{y_{ji}} + K_{xy} u_{x_{ji}} + K_{\theta_y} \theta_i + K_{\theta_{jy}} \theta_{ji}, \quad (21)$$

где $G_y = \frac{EA}{L}m^2 + \frac{12EI}{L^3}l^2$, $K_{xy} = \frac{EA}{L}lm - \frac{12EI}{L^3}lm$, $K_{\theta_y} = -\frac{12EI}{L^2}l$, $K_{\theta_{jy}} = -\frac{6EI}{L^2}l$.

$$M_i = G_{\theta_i} \theta_i + K_{x\theta_i} u_{x_{ji}} + K_{y\theta_i} u_{y_{ji}} + K_{\theta_i\theta_i} \theta_{ji}, \quad (22)$$

где $G_{\theta_i} = \frac{6EA}{L}$, $K_{x\theta_i} = \frac{6EA}{L^2}m$, $K_{y\theta_i} = -\frac{6EI}{L^2}l$, $K_{\theta_i\theta_i} = \frac{2EI}{L}$.

$$M_{ji} = G_{\theta_{ji}} \theta_{ji} + K_{x\theta_{ji}} u_{x_{ji}} + K_{y\theta_{ji}} u_{y_{ji}} + K_{\theta_{ji}\theta_i} \theta_i, \quad (23)$$

где $G_{\theta_{ji}} = \frac{4EI}{L}$, $K_{x\theta_{ji}} = \frac{6EI}{L^2}m$, $K_{y\theta_{ji}} = -\frac{6EI}{L^2}l$, $K_{\theta_{ji}\theta_i} = \frac{6EI}{L}$.

Как следует из уравнений (20–23), компоненты (20), (21) относятся к типу перемещениюуправляемых, а (22), (23) – углууправляемых. Все компоненты зависят от перемещений и угловых сдвигов других компонент.

4. Метод корректной формулировки математической модели стержневой системы

Прежде всего, следует отметить, что в случае представления расчетной схемы стержневой системы в виде графа для записи уравнений равновесия в матричном виде можно применять не только матрицу инцидентий, но и сечений. Кроме того, основная система уравнений стержневой системы (уравнения равновесия) дополняется системой уравнений, составленной на основе применения закона, аналогичного второму закону Кирхгофа в тео-

рии электрических цепей. Суть второго закона Кирхгофа применительно к строительной механике заключается в том, что сумма всех перемещений (угловых сдвигов) компонент в контуре равняется нулю. Для представления коэффициентов уравнений перемещений (угловых сдвигов), записанных по этому закону, применяется топологическая матрица контуров.

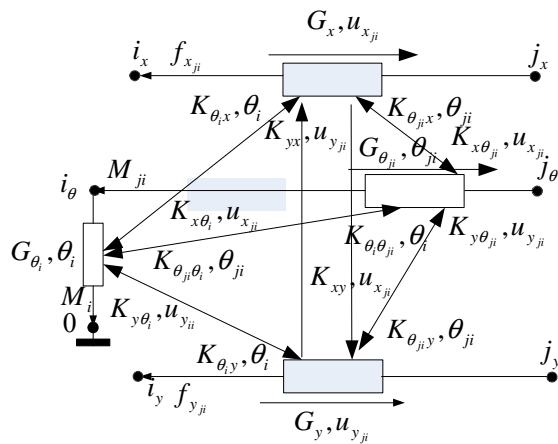


Рис. 4. Эквивалентная схема замещения стержня с жесткими соединениями

Механизм разработки корректной формулировки математической модели стержневой системы тот же, что и в случае электрической цепи [6, 8], поэтому ниже будут приведены только этапы составления модели.

Вначале составляется эквивалентная схема замещения элементов стержневой системы, определяются компонентные уравнения двухполюсников, и затем строится граф эквивалентной схемы замещения стержневой системы. Предполагается, что эквивалентная схема системы содержит двухполюсные

компоненты следующего типа: независимые или зависимые от перемещений других компонент источники перемещения, независимые или зависимые от усилий, приложенных к источникам перемещений, источники усилий и перемещениюуправляемые, углоуправляемые компоненты, зависимые от перемещений и угловых сдвигов других компонент. Составление топологической матрицы контуров включает выбор дерева графа эквивалентной схемы системы и составление контуров для выбранного дерева. Дерево графа эквивалентной схемы системы выбирается таким образом, чтобы все независимые и зависимые источники смещения включались в дерево, а все независимые и зависимые источники усилий – в хорды. Как следует из [6, 8], в случае выбора в качестве переменных перемещений компонент, входящих в дерево, корректная формулировка учитывается следующим образом: в дерево включаются компоненты, имеющие максимальную собственную жесткость, т.е. в контуре, образованном присоединением хорды к дереву, компоненты дерева имеют собственные жесткости по величине больше, чем жесткость присоединяемой компоненты хорды. Эта задача имеет решение только для предложенного варианта составления топологической матрицы контуров.

Перемещения u , угловые сдвиги θ , усилия f , крутящие моменты M узлов компонент и компонентные уравнения эквивалентной схемы системы группируются в элементы, содержащие компоненты, которые входят в дерево, т.е. ветви, и содержащие компоненты, не входящие в дерево, - хорды. Таким образом,

$$v = \begin{vmatrix} v_D \\ v_X \end{vmatrix}, \quad \phi = \begin{vmatrix} \phi_D \\ \phi_X \end{vmatrix}, \quad \varphi = \begin{vmatrix} \varphi_D \\ \varphi_X \end{vmatrix}, \quad (24)$$

где v – вектор перемещений и угловых сдвигов компонент, ϕ – вектор усилий и крутящих моментов узлов, приложенных к компонентам, φ – вектор компонентных уравнений.

Так как контуры образуются присоединением хорд к дереву графа системы, то топологическая матрица контуров имеет вид $B = \begin{vmatrix} 1 & F^t \end{vmatrix}$, где 1 – единичная подматрица хорд, а топологическая матрица сечений – вид $Q = \begin{vmatrix} 1 & -F \end{vmatrix}$, где 1 – единичная подматрица ветвей. Основную систему уравнений в матричном виде можно записать следующим образом:

$$V_X = -F^t V_D, \quad (25)$$

$$\phi_D = F \phi_X. \quad (26)$$

Элементы ветвей и хорд векторов перемещений и усилий, приложенных к компонентам, и компонентных уравнений (24) группируются в соответствии с типом компонент эквивалентной схемы стержневой системы. В компонентных уравнениях в качестве аргументов указываются только управляемость и зависимость компонент, так как только они необходимы при анализе основной системы уравнений. С учетом предложенных преобразований, система уравнений (25) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u_{X_G} \\ \theta_{X_\theta} \\ u_{F_u} \\ u_F \\ \theta_{X_M} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{X_G U}^t & F_{X_G U_u}^t & F_{X_G D_G}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{X_\theta D_\theta}^t \\ F_{F_u U}^t & F_{F_u U_u}^t & F_{F_u D_G}^t & 0 \\ F_{F U}^t & F_{F U_u}^t & F_{F D_G}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{\theta_X D_\theta}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_U \\ u_{U_u} \\ u_{D_G} \\ \theta_{D_\theta} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$a(26) - \begin{pmatrix} f_U \\ f_{U_u} \\ f_{D_G} \\ M_{D_\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{U X_G} & 0 & F_{U F_f} & F_{U F} & 0 \\ F_{U_u X_G} & 0 & F_{U_u F_f} & F_{U_u F} & 0 \\ F_{D_G X_G} & 0 & F_{D_G F_f} & F_{D_G F} & 0 \\ 0 & F_{D_\theta X_\theta} & 0 & 0 & F_{D_\theta X_M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{X_G} \\ M_{X_\theta} \\ f_{F_f} \\ f_F \\ M_{X_M} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Компонентные уравнения будут записаны в следующем виде:

$$u_U = const, \quad (29a)$$

$$u_{U_f} = \varphi_{U_f}(u), \quad (29б)$$

$$f_{D_G} = \varphi_{D_G}(u, \theta), \quad M_{D_\theta} = \varphi_{D_\theta}(u, \theta), \quad (29в)$$

$$f_{X_G} = \varphi_{X_G}(u, \theta), \quad M_{X_\theta} = \varphi_{X_\theta}(u, \theta), \quad (29г)$$

$$f_{F_f} = \varphi_{F_f}(f_{U_u}), \quad (29д)$$

$$f_F = const, \quad M_{X_M} = const, \quad (29е)$$

где индекс U указывает, что данный элемент вектора относится к независимым источникам перемещения, U_{f_u} – к зависимым источникам перемещения от перемещения источников усилия, D_G – к перемещениюуправляемым компонентам, входящим в дерево, D_θ – к углууправляемым компонентам, входящим в дерево, X_G – к перемещениюуправляемым компонентам, входящим в хорды, X_θ – к углууправляемым, входящим в хорды, F_f – к зависимым источникам усилия от усилий источников перемещения, F – к независимым источникам усилия, X_M – к независимым источникам крутящих моментов.

В результате анализа основной системы уравнений (27–29) переменные составляемой системы уравнений выбираются из перемещений компонент, входящих в дерево графа. При этом предполагается, что зависимые источники перемещения (29б) и зависимые источники усилий (29д) не образуют циклов.

В конечном счете из основной системы уравнений выделяются система уравнений, соответствующая выбранным переменным

$$\begin{vmatrix} f_{D_G} \\ M_{D_\theta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_{D_G X_G} & 0 & F_{D_G F_f} & F_{D_G F} & 0 \\ 0 & F_{D_\theta X_\theta} & 0 & 0 & F_{D_\theta X_M} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{X_G} \\ M_{X_\theta} \\ f_{F_f} \\ f_F \\ M_{X_M} \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

и системы уравнений связи (27–28), с помощью которых вычисляются все перемещения и усилия компонент. Преобразованная таким образом основная система уравнений рассматривается как математическая модель стержневой системы. Порядок СЛАУ n определяется следующим образом:

$$n = n_D - n_U - n_{U_u}, \quad (31)$$

где n_D – количество ветвей, входящих в дерево графа, n_U – количество независимых и n_{U_u} – зависимых источников перемещения.

5. Демонстрационный пример

Приведем простой пример расчета стержневой системы (рис. 5а) [5]. Математическая модель описывается плохо обусловленной СЛАУ. Там же рассмотрен метод решения этой задачи.

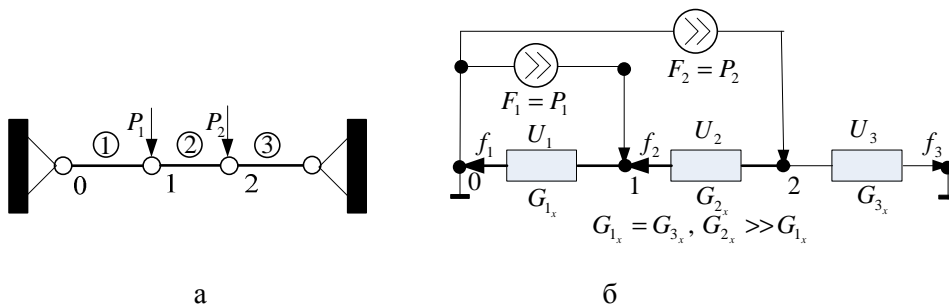


Рис. 5. Пример стержневой конструкции (плохая обусловленность СЛАУ): а) расчетная схема; б) эквивалентная схема замещения системы

На рис. 5б приведена эквивалентная схема замещения расчетной схемы стержневой системы (рис. 5а), в которой учтено, что $\varphi = 0^\circ$ и соответственно $l = 1, m = 0$ для всех элементов стержневой системы. Там же приведены нумерация узлов, обозначения двухполюсников и соотношение параметров собственных жесткостей компонент эквивалентной схемы. В соответствии с предложенными рекомендациями выбраны следующие ветви в дереве: U_1, U_2 . Для выбранного дерева топологическая матрица контуров B имеет следующий вид:

$$B = \begin{vmatrix} U_3 & U_{F_1} & U_{F_2} & U_1 & U_2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Как следует из (31), порядок СЛАУ равен $n = n_d - n_u = 2 - 0 = 2$. Систему уравнений, соответствующую выбранным переменным, можно записать как

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

Учитывая компонентные уравнения двухполюсников, СЛАУ (33) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3)u_1 - G_3u_2 &= P_1 + P_2 \\ -G_3u_1 + (G_2 + G_3)u_2 &= P_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Проведем анализ полученной системы уравнений на устойчивость решения, используя подход, предложенный в [5]. Суть данного подхода заключается в следующем. Система уравнений (34) рассматривается в прямоугольной системе координат u_1, u_2 как уравнение прямой $u_2 = u_1 \operatorname{tg} \alpha + g$, где α - угол между прямой и положительным напряжением оси u_1 , g - отрезок, отсекаемый прямой на оси u_2 . Принято считать, что если $\alpha_1 = \alpha_2$, то прямые параллельны, и решение системы не существует, т.е. она является вырожденной. Если α_1 и α_2 различаются мало, то система близка к вырожденной и имеет неустойчивое решение, так как незначительные изменения углов α_1 и α_2 сильно скажутся на координатах точки пересечения прямых. В противном случае система имеет устойчивое решение. Применительно к (34) имеем следующие уравнения прямых:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{(G_1 + G_3)}{G_3} u_1 - \frac{P_1 + P_2}{G_2}, \\ u_2 &= \frac{G_3}{(G_2 + G_3)} u_1 + \frac{P_2}{(G_2 + G_3)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Решение (35) представляет собой координаты точки пересечения этих прямых. При этом

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(G_1 + G_3)}{G_3} = 2, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{G_3}{(G_2 + G_3)} \approx 0, \quad (36)$$

откуда $\alpha_1 \approx 63^\circ$ и $\alpha_2 \approx 0^\circ$. Это означает, что система (34) имеет устойчивое решение.

Для сравнения приведем решение этой же задачи в базисе узловых перемещений u_{10}, u_{20} . Система уравнений, описывающая расчетную схему, имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)u_{10} - G_2u_{20} &= P_1 \\ -G_2u_{10} + (G_2 + G_3)u_{20} &= P_2, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(G_1 + G_2)}{G_2} \approx 1, \alpha_1 \approx 45^\circ, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{G_2}{(G_2 + G_3)} \approx 1, \alpha_2 \approx 45^\circ$.

В данном случае $\alpha_1 \approx \alpha_2$ означает, что СЛАУ (37) есть близкая к вырожденной и имеет неустойчивое решение. Таким образом, на данном примере показано, что соответствующим выбором переменных можно получить устойчивое решение плохо обусловленной СЛАУ.

6. Выводы

Разработан метод корректной формулировки математического описания статического положения равновесия стержневой системы и внутренних сил в ее элементах. В разработанном методе топология расчетной схемы стержневой системы представлена в виде графа, в результате чего основные уравнения строительной механики дополнены системой уравнений, суть которой заключается в том, что алгебраическая сумма перемещений компонент по контуру равна нулю. Для описания основных уравнений в матричном виде применяются топологические матрицы контуров и сечений.

При отображении расчетной схемы стержневой системы в виде графа применяются эквивалентные схемы замещения элементов стержневых систем. Предложены эквивалентные схемы элементов стержневой системы, состоящие из двухполюсных компонент, функциональные зависимости которых описывают связь между перемещением и внутренним усилием, приложенным к компоненте.

Предложенный метод отличается от существующих тем, что с целью получения устойчивого решения математической модели расчетной схемы на этапе составления математической модели учитываются особенности параметров объектов и топология конкретной расчетной схемы следующим образом:

- выбором в качестве переменных СЛАУ, описывающих эквивалентную схему стержневой системы, перемещений компонент ветвей дерева графа системы, а не как принято, узловых перемещений;
- учетом параметров функциональных зависимостей компонент эквивалентной схемы стержневой системы при выборе дерева топологической матрицы контуров.

Приведен пример, подтверждающий эффективность разработанного метода составления математической модели стержневой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. www.ansys.com.
2. www.nastran.com.ua.
3. Ржаныцин А.Р. Строительная механика / Ржаныцин А.Р. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
4. Cook Robert D. Finite Element Modeling for Stress Analysis, University of Wisconsin / Cook Robert D. – Madison: John Wiley&Sons, Inc. New York, 1995. – 320 p.
5. Розин Л.А. Метод конечных элементов / Л.А. Розин // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 120 – 127.
6. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию сложных систем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 111 – 122.
7. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию нелинейных электрических цепей по частям / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2010. – № 3. – С. 53 – 68.
8. Волобоев В.П. Один способ корректной формулировки математической модели технической (физической) задачи / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2011. – № 4. – С. 95 – 106.
9. Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics / Oñate E. – 2009. – Vol. 1: Basis and Solids. – 472 p.
10. http://faculty.ksu.edu.sa/rizwanbutt/Documents/FEM_Lecture_Notes.pdf.

Стаття надійшла до редакції 28.04.2012