Радиофизика и радиоастрономия, 2007, т. 12, №2, с. 135-151

УДК 551.510.535.4; 533.951; 550.388

Крупномасштабные вихревые структуры планетарного масштаба на ионосферных уровнях

А. Г. Хантадзе, А. И. Гвелесиани[1], Г. В. Джандиери[2]

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, ул. И. Чавчавадзе, 1, г. Тбилиси, 0128, Грузия

[1]Институт геофизики им. М. Нодиа, ул. М. Алексидзе, 1, г. Тбилиси, 0193, Грузия

[2]Грузинский технический университет, ул. М. Костава, 77, г. Тбилиси, 0179, Грузия

Статья поступила в редакцию 9 февраля 2007 г.

Анализируется проблема возникновения и условия существования крупномасштабных ультранизкочастотных волновых структур и крупномасштабных вихрей в ионосфере. Найдены некоторые точные решения уравнений магнитной гидродинамики и построены новые инварианты, позволяющие раскрыть механизмы зарождения крупномаштабных вихрей и планетарных волн в ионосфере под действием неконсервативных сил Кориолиса и силы Ампера. Развитый метод представляется одним из важных и оригинальных методов для решения сложнейших нелинейных задач магнитной гидродинамики сжимаемой, неоднородной, бароклинной жидкости, находящейся, в общем случае, в поле неконсервативных сил. К сожалению, он не достаточно известен широкому кругу исследователей магнитной гидродинамики и физики плазмы.

1. Введение

В последнее время проблема изучения динамики крупномасштабных ($10^3 \div 10^4$ км) движений в ионосфере, на фоне которых протекают почти все физико-химические процессы, находится в центре внимания исследователей верхней атмосферы. Это обусловлено тем, что атмосфера на рассматриваемых высотах ($80 \div 600$ км) представляет собой слабоионизированную плазму, заряженная компонента которой мгновенно реагирует на всякое изменение динамического режима нейтральной компоненты ионосферы. При этом отклик ионосферной плазмы на динамическое воздействие в виде собственных (фоновых) колебаний носит электромагнитный характер, распространяется в среде со скоростью выше 1 км/с и содержит ценную информацию о внешних источниках и электродинамических процессах, разыгрывающихся в это время в верхней атмосфере. Особенно четко эти отклики фиксируются в мировой сети ионосферных и магнитных обсерваторий во время магнитных бурь, суббурь [1], землетрясений [2-4], запуска космических аппаратов [7, 8] и др. В последнем случае отклик выявляется как уединенная крупномасштабная вихревая структура циклонического и антициклонического характера. Расшифровка отклика ионосферной плазмы представляет собой центральную задачу исследователей верхней атмосферы и околоземного космического пространства.

В отличие от тропосферы, где погодообразующие низкочастотные ($10^{-4} \div 10^{-6}$ с$^{-1}$) процессы планетарного масштаба протекают очень медленно, со скоростью местных преобладающих ветров $5 \div 20$ м/с [9-11], в ионосфере крупномасштабные динамические процессы, как показывают наблюдения [9, 12, 13], имеют довольно широкие временные (от десятка секунд до нескольких часов для электромагнитных планетарных волн и от двух дней до двух недель и больше для волн типа волн Россби) и скоростные (от $10 \div 100$ м/с до нескольких десятков километров в секунду) спектры [9]. (То, что время глобальных воздействий на ионосферу вышеуказанных источников попадает во временной диапазон периодов электромагнитных планетарных волн [8], приводит к сильному резонансному усилению амплитуд этих волновых колебаний и позволяет по запаздыванию возмущения четко регистрировать их в мировой сети ионосферных и магнитных обсерваторий, удаленных друг от друга на тысячи километров.)

Характерная особенность динамических процессов верхней атмосферы обусловлена существованием электропроводящей компоненты у атмосферы и действием на эту компоненту геомагнитного поля. Наличие анизотропной электропроводности и неоднородного геомагнитного поля придает верхней атмосфере Земли дополнительную упругость электромагнитной природы. В результате динамические процессы в ионосфере, представляющей собой трехкомпонентную жидкость, будут определяться не только давлением нейтральных молекул (нейтрального газа) P_m, но и давлением электронов (электронного газа) P_e, ионов (ионного газа) P_i и давлением геомагнитного поля $P_H = H_0^2/8\pi = Q^2/8\pi r^6$, где H_0 – величина напряженности геомагнитного поля, $Q = 8.1 \cdot 10^{25}$ Гс/см^3 – величина магнитного дипольного момента Земли, r – расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки. Магнитное давление P_H в областях E и F ионосферы ($80 \div 600$ км) почти не меняется с высотой и примерно равно $4 \cdot 10^{-3}$ дин/см^2. Давление молекул P_m, наоборот, уменьшается с высотой очень быстро (экспоненциально) и уже на высоте 130 км $P_m \approx P_H$ [15]. Давление ионосферной плазмы $P_{пл} = P_e + P_i \approx 2NkT_e$ всегда намного меньше, чем P_m и P_H. Так, например, даже для максимальных значений концентраций ионосферной плазмы $N \sim 10^7$ см$^{-3}$ и температуры электронов $T_e \approx 2000$ К плазменное давление $P_{пл} = 10^{-5}$ дин/см^2. Поэтому для интервала высот $80 \div 600$ км, исключая диффузионные процессы [14], действием плазменного давления на ионосферную среду можно пренебречь.

Из вышеизложенного следует, что динамические процессы в ионосфере в зависимости от высоты будут определяться либо давлением нейтрального газа P_m, (область высот $80 \div 130$ км), либо давлением геомагнитного поля P_H (область высот выше 130 км). Интенсивность влияния того или иного фактора будет существенным образом зависеть как от степени ионизации среды $\eta = N/N_m$, так и от значений гирочастот электронов $\omega_e = eH_0/mc$, ионов $\omega_i = eH_0/Mc$, а также от частот столкновений заряженных частиц друг с другом ν_{ei} и с нейтральными молекулами ν_{em}, ν_{im}. Здесь e – элементарный заряд, m и M – соответственно масса электрона и иона, c – скорость света, N_m – концентрация нейтральных молекул. В ионосфере в области высот $80 \div 600$ км $\omega_e \approx 10^7$ с$^{-1}$, $\omega_i \approx (1.5 \div 3) \cdot 10^2$ с$^{-1}$. Максимальные значения частот соударений в нижней части E-области ионосферы ($80 \div 130$ км) равны соответственно $\nu_{ei} \approx 10^4$ с$^{-1}$, $\nu_{em} \approx 10^5$ с$^{-1}$, $\omega_{im} \approx 10^3 \div 10^4$ с$^{-1}$ [18]. Поэтому здесь всегда выполняются неравенства:

$$\omega_e \gg \nu_e, \qquad \omega_i \ll \nu_{im}, \qquad (1.1)$$

где $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{em}$

Следовательно, в этой области верхней атмосферы электроны замагнитчены (геомагнитные силовые линии вморожены в электронную компоненту), а ионы – нет. Ионы как пассивная примесь полностью увлекаются нейтральными частицами [9, 15]. Так как частоты соударений очень быстро уменьшаются с высотой, начиная со 120 км и выше, второе неравенство (1.1) не выполняется:

$$\omega_i > \nu_{im}. \tag{1.2}$$

Соответственно в верхней Е-области ионосферы и в области F плазменная компонента атмосферы будет полностью замагничена. С учетом приведенных неравенств общие выражения для коэффициентов проводимостей Холла σ_H и Педерсена (поперечная проводимость) $\sigma_\perp$ для нижней Е-области ионосферы ($80 \div 130$ км), которую называют также областью Холла, упрощаются и принимают вид [9]:

$$\sigma_H = \frac{eNc}{H_0}, \qquad \sigma_\perp = \frac{e^2 N}{M\nu_{im}}, \qquad \frac{\sigma_H}{\sigma_\perp} = \frac{\nu_{im}}{\omega_i} \gg 1. \tag{1.3}$$

Для низкочастотных, медленных, планетарных волн (масштаб $L \sim 10^3 \div 10^4$ км) в этой области атмосферы всегда выполняется неравенство $\omega \ll \omega_i < \nu_{im}$, т. е. частота столкновений ν_{im} больше характерной частоты волны ω и циклотронной частоты ионов ω_i, тем не менее волновое уравнение для этой области верхней атмосферы не содержит частоты столкновений из-за эффекта Холла (см. (1.3)), и определяющая роль столкновений проявляется в форме волнового уравнения, учитывающего гироскопический эффект, обусловленный геомагнитным полем.

Для верхней части области Е и F-области ($130 \div 600$ км) соответственно будем иметь:

$$\sigma_H = e^2 N\left(\frac{1}{m\omega_e} - \frac{1}{M\omega_i}\right) = 0, \qquad \sigma_\perp = \frac{NMc^2\nu_{im}}{H_0^2}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) следует, что в нижней части Е-области ионосферы можно пренебречь поперечной проводимостью $\sigma_\perp$ по сравнению с холловской σ_H. Из (1.3) следует также, что σ_H не зависит от частоты столкновений частиц и, следовательно, как было указано выше, не вносит вклада в диссипацию энергии движения. Электромагнитная сила Ампера, действующая на единицу массы, $\mathbf{F_A} = \frac{1}{\rho c}[\mathbf{jH_0}]$, обусловленная током Холла, имеет гироскопический характер и действует на среду подобно силе Кориолиса $\mathbf{F_A} = \frac{N}{N_m}[\mathbf{V\omega_i}]$. В верхней части области Е и F-области сила Ампера, обусловленная проводимостью Педерсена, имеет диссипативный характер и принимает вид релеевского трения $\mathbf{F}_\perp = -\frac{N}{N_m}\nu_{im}\mathbf{V}_\perp = -\lambda\mathbf{V}_\perp$, где $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V} - \frac{(\mathbf{VH_0})\mathbf{H_0}}{H_0^2}$, $\mathbf{V}$ – скорость нейтралов. В области высот $80 \div 115$ км существенным фактором диссипации движения является также турбулентное перемешивание [11, 10].

С учетом вышесказанного уравнение движения среды для условий нижней части Е-области ионосферы можно представить в виде:

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathrm{grad}P + \rho\mathbf{g} + \rho[\mathbf{V}\cdot 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}] + \rho_i[\mathbf{V\omega_i}] + \nu\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial z^2}. \tag{1.5}$$

Так как сюда не входит индуцированное движением магнитное поле **h**, уравнение (1.5) вместе с уравнением неразрывности,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{V} = 0, \tag{1.6}$$

и уравнением притока тепла,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \gamma P \mathrm{div}\mathbf{V} = \varepsilon, \qquad (1.7)$$

образуют замкнутую систему (при заданной величине притока тепла ε). Здесь P и $\rho = MN_m$ – давление и плотность нейтралов, $\mathbf{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, $\boldsymbol{\omega}_0$ – вектор угловой скорости вращения Земли (всегда направлен с юга на север), ν – коэффициент турбулентного перемешивания, $\rho_i = M_i N_i$ – плотность ионов, z – вертикальная координата, γ – показатель политропы.

Система (1.5)–(1.7) представляет собой обычные уравнения гидродинамики атмосферы, в которых фигурирует дополнительная механическая сила магнитной природы типа силы Кориолиса, обусловленная наличием геомагнитного поля $\mathbf{H}_0$ и электропроводностью Холла.

В этом приближении в E-области ионосферы в нейтральной компоненте, как и в ионной (вследствие полного увлечения $V \approx V_i$), возникновение крупномасштабных волн электромагнитной природы не возможно. Скорость электронной компоненты в E-области ионосферы с учетом $V_e \gg V \approx V_i$ [15] непосредственно определяется с помощью плотности тока $\mathbf{j}$ в виде:

$$\mathbf{V}_\mathbf{e} \approx -\frac{1}{eN}\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi eN}\mathrm{rot}\,\mathbf{h}. \qquad (1.8)$$

Индуцированное магнитное поле $\mathbf{h}$ в этом случае находится из замкнутого уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V}_\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_0] = -\frac{c}{4\pi eN}\mathrm{rot}[\mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_0], \quad (1.9)$$

здесь $\mathbf{H}_0$ – вектор напряженности геомагнитнолго поля (всегда направлен с юга на север), $\mathbf{h}$ – его возмущение (отклонение от $\mathbf{H}_0$).

Уравнение (1.9) в E-области ионосферы для среднемасштабных процессов ($L \le 10^3$ км) как точное решение содержит колебательную ветвь геликонов (“атмосферных свистов”), а для крупномасштабных процессов ($L \sim 10^2 \div 10^4$ км), когда нельзя пренебречь эффектом неоднородности геомагнитного поля ($\nabla\mathbf{H}_0 \ne 0$), как будет показано ниже, описывает электромагнитные планетарные волны (новая ветвь электромагнитных колебаний ионосферного резонатора).

В F-области ионосферы, где плазменная компонента атмосферы полностью замагнитчена, сила Ампера принимает вид упругой электромагнитной силы:

$$\mathbf{F}_\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_0]. \qquad (1.10)$$

И замкнутую систему уравнений однокомпонентной магнитной гидродинамики, при заданном притоке тепла ε, с учетом уравнений (1.6) и (1.7) можно представить в виде [9]:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{grad}P + \rho\mathbf{g} + \rho[\mathbf{V} \cdot 2\boldsymbol{\omega}_0] + \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_0], \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_0] + \mathrm{rot}\left[\mathbf{H}_0 \frac{1}{\rho_i \nu_{im}} \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cdot \mathbf{H}_0]\right]. \qquad (1.12)$$

Для нижней E-области ионосферы, применив операцию rot к обеим частям уравнения (1.5), для несжимаемой атмосферы, при условии отсутствия диссипативных сил, найдем фундаментальное условие сохраняемости нового инварианта [16]:

$$\mathrm{helm}\left(\mathrm{rot}\mathbf{V} + 2\boldsymbol{\omega}_0 + \frac{N}{N_m}\frac{e}{M_e}\mathbf{H}_0\right) = 0. \qquad (1.13)$$

Здесь оператор helm, введенный Фридманом в честь Гельмгольца, для любого векторного поля $\mathbf{a}$ имеет вид [17]:

$$\mathrm{helm}\,\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathrm{rot}[\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}] + \mathbf{V}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}. \qquad (1.14)$$

Равенство $\mathrm{helm}\,\mathbf{a} = 0$ означает сохраняемость (вмороженность) как силовых линий вектора **a**, так и интенсивности векторных трубок [17].

В отсутствие магнитного поля $(\mathbf{H_0} = 0)$ из (1.13) следует известное условие сохраняемости (вмороженности) абсолютного вихря $\mathrm{rot}\mathbf{V} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}$ [24], которое как частный случай содержит медленные погодообразующие планетарные волны Россби, обусловленные неоднородностью угловой скорости вращения Земли $\nabla\omega_0 \neq 0$. В минимумах и максимумах планетарной волны всегда располагаются тропосферные циклоны и антициклоны, которые перемещаются вместе с волной со скоростью среднего зонального ветра (~10 м/с) и фактически определяют региональную погоду в нижней атмосфере Земли.

Таким образом, из выражения (1.13) следует, что в нижней части E-области ионосферы должны существовать медленные планетарные волны, обусловленные неоднородностями $\nabla\omega_0$ и ∇H_0.

Для F-области ионосферы из (1.11) и (1.12) получим:

$$\mathrm{helm}(\mathrm{rot}\mathbf{V} + 2\boldsymbol{\omega}_0) = \mathrm{rot}\frac{1}{4\pi\rho}[\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{H_0}], \qquad (1.15)$$

$$\mathrm{helm}\,\mathbf{H} = 0, \qquad (1.16)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{h}$.

Уравнение (1.15) показывает частичную вмороженность абсолютного вихря, а (1.16) – полную вмороженность магнитного поля **H** в F-области ионосферы. Уравнения (1.13) и (1.15) являются обобщенными вихревыми уравнениями Фридмана–Гельмгольца для ионосферной среды. При $H_0 \to 0$ они переходят в уравнение Фридмана для абсолютного вихря $\mathrm{rot}\mathbf{V} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}$, а при $H_0 \to 0$ и $\nabla\omega_0 \to 0$ – в классическое уравнение Гельмгольца для вихря скорости $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ [9]. Эти уравнения обладают той замечательной особенностью, что производная по времени от вихря скорости $\mathrm{d\,rot}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$ для крупномасштабных процессов является одним из главных членов. (Этим свойством не обладают уравнения движения (1.5) и (1.11), в которых инерционный член $\rho\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$ пренебрежимо мал по сравнению с остальными). Это дает возможность при отсутствии достаточно полных сведений о главных действующих силах (градиент давления, сила тяжести) составить прогностические уравнения и осуществить численное интегрирование. Другой важной особенностью уравнения Фридмана–Гельмгольца, по сравнению с уравнением движения Эйлера, является естественный учет эффектов неоднородностей угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}$ и геомагнитного поля $\mathbf{H_0}$. Наконец, уравнение Фридмана–Гельмгольца, как будет показано в дальнейшем, является основным условием динамической возможности движения, в котором $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ всегда отличен от нуля. Уравнения (1.13), (1.15) и (1.16) содержат полную информацию об эволюции вихрей и планетарных волн, обусловленных действующими в жидкости неконсервативными силами $(\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \neq 0)$. В условиях ионосферы – это силы Кориолиса $\mathbf{F_K} = \rho[\mathbf{V}\cdot 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}]$ и Ампера $\mathbf{F_A} = [\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\cdot\mathbf{H_0}]/4\pi$.

Резюмируя, можем заключить, что земная атмосфера в E-области $(80 \div 150$ км) ведет себя в основном как нейтральная среда. Ионная компонента плазмы здесь присутствует как пассивная примесь и перемещается вместе с нейтральной компонентой $(V_i \approx V)$ [9, 15]. Динамические процессы в этой области верхней атмосферы в основном будут контролироваться давлением нейтрального газа P. Электронная компонента, которая здесь полностью замагничена, контролируется геомагнитным полем $(P_H/P_e \gg 1)$ и, независимо от нейтралов, перемещается с дрейфовой скоростью $\mathbf{V_e} = c[\mathbf{E}\cdot\mathbf{H_0}]/H_0^2 = \mathbf{V_d}$, обусловленной вихревым электрическим полем, величина которого для крупномасштабных процессов значительно превосходит динамо-поле, генерируемое в ионосфере ветровым механизмом $\mathbf{E_d} = [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H_0}]/c$. Возникновение и развитие крупномасштабных вихревых и волновых движений в этой области верхней атмосферы необходимо исследовать на основе модели трехжидкостной гидродинамики: для нейтралов и ионов $(\mathbf{V} = \mathbf{V_i})$ – уравнения (1.5)–(1.7), для электронов – уравнения (1.8)–(1.9). Физические процессы в нейтральной компоненте будут иметь гидродинамический характер и для крупномасштабных низкочастотных процессов должны протекать сравнительно медленно, со скоростью преобладающих ионосферных ветров ($10 \div 100$ м/с). Для электронов крупномасштабные процессы будут быстрыми (от $800 \div 900$ м/с до 10 км/с), а волновые движения должны иметь электромагнитную природу.

В F-области ($150 \div 600$ км) электроны и ионы полностью замагничены, $\omega_e \gg \nu_e$, $\omega_i \gg \nu_{im}$. Они жестко связаны с силовыми линиями геомагнитного поля и их движение в основном будет контролироваться давлением геомагнитного поля $\left((P_H/P) \gg 1\right)$. Нейтралы из-за равенства масс молекул и ионов будут эффективно вовлекаться в движение, и возмущения в нейтральной компоненте будут распространяться с характерной скоростью $\mathbf{U_A} = \mathbf{H_0}/\sqrt{4\pi\rho}$, которая в этой области верхней атмосферы изменяется в пределах от $100 \div 300$ м/с до $2 \div 10$ км/с [7, 8]. Динамические процессы в F-области необходимо исследовать на основе одножидкостной модели магнитной гидродинамики ионосферы (уравнения (1.11), (1.12), (1.15), (1.16)). Здесь динамические процессы будут иметь магнитогидродинамический характер и протекать значительно быстрее, чем в E-области ионосферы. При этом, как следует из уравнения (1.12), движение будет кинематически возможным лишь при скоростях, удовлетворяющих уравнению индукции Максвелла (1.12). Этот факт, во-первых, существенно ограничивает кинематическую произвольность движения в F-области ионосферы и, во-вторых, показывает, что динамически возможные движения должны осуществляться лишь при скоростях, удовлетворяющих уравнению (1.12). Уравнение индукции, как и уравнение Фридмана–Гельмгольца (1.15), естественным образом содержит неоднородность геомагнитного поля.

Ниже на основе уравнений динамики ионосферы будут исследованы: фундаментальные вопросы условий динамической возможности движения в ионосфере и крупномасштабные вихревые структуры типа перемещающихся циклонов (антициклонов).

2. Теоремы Фридмана для электропроводящей атмосферы

Для каждой задачи о реальном движении жидкости в заданных стационарных условиях в принципе должны существовать точные стационарные решения уравнений термогидродинамики атмосферы (квазистатичность, квазигеострофичность движения и т. д.).

Кинематически эти стационарные решения могут существовать при любых скоростях [17], однако не всякое кинематическое решение, даже если оно является математически точным, может реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения для конкретно заданной среды должны удовлетворять как уравнениям гидродинамики, так и некоторым дополнительным кинематическим соотношениям, называемым условиями динамической возможности [17]. Они получаются применением операций rot к уравнениям движения. Так, например, для идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в поле консервативных сил $(\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0)$ скорость среды $\mathbf{V}$ должна удовлетворять следующим дополнительным условиям:

$$\mathrm{helm}(\mathrm{rot}\mathbf{V}) = \mathrm{rot}\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{V} = 0. \qquad (2.1)$$

Эти кинематические соотношения известны как теорема Гельмгольца. Фридман называет их условиями динамической возможности движения, так как, если эти условия будут выполнены для заданного поля скоростей $\mathbf{V}$, всегда можно определить единственный динамический элемент несжимаемой жидкости – давление P как функцию времени и координат – таким образом, чтобы были соблюдены уравнения гидродинамики. Иначе говоря, если указанные кинематические соотношения Гельмгольца будут удовлетворены при заданном поле скоростей, то должно существовать реальное движение несжимаемой жидкости.

Например, в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести $(\mathbf{F} = \rho\mathbf{g})$ кинематически возможно, но динамически невозможно вращательное движение с составляющими скорости:

$$V_x = -\Omega(z)y, \quad V_y = \Omega(z)x, \quad V_z = 0. \qquad (2.2)$$

Здесь $\Omega(z)$ – угловая скорость вращения жидкости.

В самом деле, хотя в этом случае второе условие Гельмгольца выполнено, однако первое условие отлично от нуля:

$$\mathrm{rot}_x \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = -2\Omega(z)\frac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}y,$$

$$\mathrm{rot}_y \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = -2\Omega(z)\frac{\mathrm{d}\Omega(z)}{\mathrm{d}z}x, \qquad \mathrm{rot}_z \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = 0. \qquad (2.3)$$

Другими словами, мы не сможем определить давление P из уравнений движения Эйлера,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\Omega^2(z)x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\Omega^2(z)y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \qquad (2.4)$$

так как здесь левые части являются составляющими градиента, тогда как правые части этим свойством не обладают. Поэтому давление P не может быть определено из выражения (2.4) как функция координат. Выполнение условий динамической возможности движения Гельмгольца (2.1) означает, что в случае несжимаемой жидкости движение, определяемое уравнением (2.2), будет динамически возможным лишь при скоростях с $\Omega(z) = \mathrm{const}$, так как только в этом случае удовлетворяются все условия Гельмгольца (2.1) и правые части выражений (2.4) становятся составляющими градиента. Условия динамической возможности Гельмгольца (2.1) наглядно показывают, что в несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, неоднородное вращение жидкости невозможно. Для сжимаемой жидкости, как будет ниже показано, поле скоростей (2.2) может существовать.

Теорема Гельмгольца (2.1), выражающая необходимые и достаточные условия для определения единственного динамического элемента, давления P, по полю скоростей $\mathbf{V}$ в несжимаемой жидкости, является основой классической гидродинамики. Значение ее двоякое: с одной стороны, она устанавливает ряд основных кинематических свойств движения несжимаемой жидкости (например, сохраняемость (вмороженность) вихревых линий при движении, сохраняемость интенсивности вихревых трубок, а также изгиб, кручение, растяжение вихревых линий и т. д.), с другой стороны, она служит мощным средством для выбора из бесчисленного множества кинематических точных решений для скорости $\mathbf{V}$ тех реальных решений, которые динамически возможны в несжимаемой жидкости. Наконец, теорема Гельмгольца (2.1) позволяет изучить движения несжимаемой жидкости, в которой завихренность $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ отлична от нуля, и тем самым приближает математическое описание жидкости к более реальной картине движения.

Условия динамической возможности движения для сжимаемой неоднородной бароклинной жидкости, находящейся в общем случае в поле неконсервативных массовых сил $(\mathrm{rot}\mathbf{F} \neq 0)$, были получены Фридманом [17]. Они как частный случай включают в себя теорему Гельмгольца (2.1). Фридман исключил из уравнения движения и неразрывности динамические элементы, давление P и плотность ρ, и объединил полученные дополнительные кинематические условия, налагаемые на вектор скорости $\mathbf{V}$, в пять теорем. Эти кинематические условия связывают компоненты скоростей, заданные силы и их производные по координатам и по времени. С динамической точки зрения теоремы Фридмана являются необходимыми и достаточными условиями для определения в сжимаемой жидкости давления P и плотности ρ. При $\rho = \mathrm{const}$ и $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$ число теорем Фридмана уменьшается до одной теоремы Гельмгольца (2.1). Стремясь к наибольшей общности результатов, Фридман не принимал во внимание уравнение притока тепла (1.7), и таким образом выведенные условия динамической возможности движения рассматривались как общие условия, которые должны были быть выполнены при любом притоке тепла. Естественно, что при этом давление P определялось по полю скоростей с точностью до произвольной функции времени, плотность ρ – с точностью до постоянной.

Так как жидкость, рассматриваемая Фридманом, фактически была реальной моделью атмосферы Земли, Фридману и его последователям удалось построить на основе теорем Фридмана многие теоретические модели важнейших тропосферных движений, являющихся редкими случаями точного интегрирования нелинейных уравнений гидродинамики тропосферы [17-20]. Обобщение теорем Фридмана для идеальной сжимаемой электропроводящей жидкости в поле неконсервативных массовых сил и внешнего магнитного поля $\mathbf{H_0}$ в индукционном приближении осуществлено в [9, 16]. Было показано, что в случае электропроводящей среды поле скоростей $\mathbf{V}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ должны удовлетворять тринадцати теоремам условий динамической возможности движения. В отсутствие магнитного поля $(\mathbf{H} = 0)$ число теорем уменьшается до пяти теорем Фридмана. Такое обобщение естественным образом показало существование в магнитной гидродинамике двух классов точных решений. Первый класс решений отыскивается с помощью двенадцати теорем, которые при $\mathbf{H} \to 0$ переходят в известный класс точных решений для обычной гидродинамики. Например, теоретическая модель перемещающегося магнитогидродинамического циклона (антициклона), найденная для условий: $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Б}) = 0$, $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Г}) = 0$, – при $\mathbf{H} \to 0$ переходит в известную гидродинамическую модель циклона (антициклона), построенную Кочиным для тропосферы [18]; теоретическая модель вращения с высотой преобладающего ветра в нижней Е-области ионосферы при $\mathbf{H} \to 0$ переходит в известную гидродинамическую модель Экмана–Окерблома для планетарного пограничного слоя тропосферы; магнитогидродинамическая модель Гартмана при $\mathbf{H} \to 0$ переходит в классическую модель течения Пуазейля и т. д. Второй класс точных решений, которые отыскиваются с помощью теоремы 13 $\left((\mathbf{G} \cdot \mathbf{Б}) \neq 0,\ (\mathbf{G} \cdot \mathbf{Г}) \neq 0\right)$, не имеет аналога в обычной гидродинамике, и при $\mathbf{H} \to 0$ решения теряют физический смысл. Именно такие решения устанавливают новые фундаментальные свойства движения электропроводящей жидкости, и тем самым представляют большой теоретический и практический интерес для исследований в области физики, магнитной гидродинамики, ионосферы, магнитосферы и атмосферы Солнца. В частности, известные стационарные решения Альвена–Чандрасекхара о магнито-вихревых кольцах [21, 22], найденные путем формального рассмотрения уравнений магнитной гидродинамики для консервативных сил, элементарно могут быть получены как частные решения из теоремы 13 в виде:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad P' \approx P_0 + \frac{H_0^2}{8\pi} - \rho g z,$$

$$\rho = \mathrm{const}, \qquad \frac{\rho V^2}{2} = \frac{H^2}{8\pi}. \tag{2.5}$$

С учетом неконсервативных массовых сил найдено точное решение [9]:

$$\mathbf{V}=\frac{\beta}{\sqrt{4\pi\rho}}\mathbf{H},\qquad \beta=\sqrt{1+\frac{(\mathbf{G}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F})}{(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})}},$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{F}-(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V},\quad \mathbf{Б}=-\mathrm{rot}\mathbf{G}, \tag{2.6}$$

которое при $\mathrm{rot}\mathbf{F}=0$ переходит в (2.5).

Понимая чрезвычайную важность условий динамической возможности для движений электропроводящей среды, в качестве примера продемонстрируем метод их получения применительно к F-области ионосферы. В отсутствие диссипативных сил основные уравнения динамики ионосферы можно представить в виде:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{grad}P'+\frac{(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}}{4\pi}+\rho\mathbf{F}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{V}=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}+\mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{V}=0, \tag{2.9}$$

где $P'=P+H^2/8\pi$ – полное давление среды, $\mathbf{H}=\mathbf{H_0}+\mathbf{h}$, $\mathbf{F}=[\mathbf{V}\cdot 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}]+\mathbf{g}$. Как было отмечено выше, вывод условий динамической возможности сводится к последовательному исключению динамических элементов P' и ρ из уравнений (2.7) и (2.8).

Вводя векторы Фридмана – $\mathbf{G}=\mathbf{F}-\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$, $\mathbf{Б}=-\mathrm{rot}\mathbf{G}=\mathrm{helm}(\mathrm{rot}\mathbf{V}+2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0})$, – которые играют большую роль в образовании и разрушении вихрей, и обозначения – $\mathbf{T}=(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}/4\pi$, $\mathbf{Г}=\mathrm{rot}\mathbf{T}$, $\rho=\exp(-\varphi)$, $\varphi=\ln\omega$, $\omega=1/\rho$ – удельный объем, $\theta=\mathrm{div}\mathbf{V}$, – перепишем систему уравнений (2.7)–(2.9) в виде:

$$\mathrm{grad}P'=e^{-\varphi}\mathbf{G}+\mathbf{T}, \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{V}\cdot\mathrm{grad}\varphi)=\theta-\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{helm}\mathbf{H}+\theta\mathbf{H}=0. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) можно назвать кинематическим уравнением возможности движения в магнитной гидродинамике, так как оно связывает между собой компоненты скорости и магнитного поля. Однако это условие недостаточно для описания движения жидкости. Действительно, можно привести много примеров, когда поле скоростей и магнитное поле удовлетворяют уравнению (2.12), но при этих значениях $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ нельзя определить давление и плотность среды, и, следовательно, такие решения являются физически нереальными. Как было показано в [9, 16], для физической возможности движения в магнитной гидродинамике поле скоростей и магнитное поле должны удовлетворять также другим кинематическим соотношениям, которые можно назвать условиями динамической возможности движения [16]. Они совместно с (2.12) однозначно определяют динамические элементы движения: давление и плотность.

Уравнение (2.10) показывает, что если удельный объем найден как функция от x, y, z, t, то давление может быть определено простыми квадратурами с точностью до произвольной функции времени:

$$P'=P_0'(t)+\int\left[\left(\frac{1}{\omega}G_x+T_x\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{\omega}G_y+T_y\right)\mathrm{d}y+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\omega}G_z+T_z\right)\mathrm{d}z\right]. \tag{2.13}$$

Процедура получения условий динамической возможности сводится к доказательству следующей теоремы.

В магнитной гидродинамике необходимым и достаточным условием для определения полного давления P' как функции времени и координат является равенство:

$$\mathbf{Б}+[\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathbf{G}]=e^{\varphi}\mathbf{Г}. \qquad (2.14)$$

Необходимость доказывается при применении к уравнению (2.10) операции rot. Достаточность – если равенство (2.14) написать в форме $\mathrm{rot}(e^{-\varphi}\mathbf{G}+\mathbf{T})=0.$ Это соотношение показывает, что можно найти такую скалярную функцию P' от времени и координат, градиент которой будет удовлетворять уравнению: $\mathrm{grad}P'=\exp(-\varphi)\mathbf{G}+\mathbf{T}.$ Теорема доказана. Итак, если уравнения магнитной гидродинамики имеют решения, тогда для определения плотности $\rho=\exp(-\varphi)$ должны выполняться следующие соотношения:

$$[\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathbf{G}]=e^{\varphi}\mathbf{Г}-\mathbf{Б}, \qquad (2.15)$$

$$(\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathbf{V})=\theta-\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (2.16)$$

$$\mathrm{helm}\mathbf{H}+\theta\mathbf{H}=0. \qquad (2.17)$$

Доказательство обобщенных для магнитной гидродинамики теорем Фридмана–Гельмгольца, позволяющих определить плотность среды ρ из (2.15) и (2.16), могут быть получены из исследования простой алгебраической системы уравнений вида:

$$[\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}]=\mathbf{M}, \qquad (\mathbf{X}\cdot\mathbf{A})=m, \qquad (2.18)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ и m – заданные векторы и скаляр, $\mathbf{X}$ – вектор, подлежащий определению. Полагая в (2.18) $\mathbf{B}=\mathbf{G}, \mathbf{A}=\mathbf{V}, \mathbf{M}=\exp(\varphi)\mathbf{Г}-\mathbf{Б},$ $m=\theta-\partial\varphi/\partial t$ и $\mathbf{X}=\mathrm{grad}\,\varphi,$ придем к (2.15)–(2.16). Как видно из системы (2.18), необходимым условием решения этой системы относительно $\mathbf{X}=\mathrm{grad}\,\varphi$ является равенство $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{M})=0,$ или

$$(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})=e^{\varphi}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Г}). \qquad (2.19)$$

Ясно, что условие (исключая из рассмотрения случай $e^{\varphi}=0,$ не отвечающий конечному значению плотности) будет иметь место в одном из следующих случаев:

1) или $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Г})\neq 0,$ тогда и скалярное произведение $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})$ также должно быть отличным от нуля;

2) или $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Г})=0,$ тогда должно быть $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})=0.$

В [16] показано, что случай $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Г})=0$ и $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})=0$ дает 12 теорем об условиях динамической возможности движения, а в случае $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Г})\neq 0$ и $(\mathbf{G}\cdot\mathbf{Б})\neq 0$ – лишь одну теорему.

На основе установленных теорем было найдено точное решение перемещающегося нестационарного МГД-циклона в виде [9]:

$$V_x=\frac{\partial a(z,t)}{\partial t}-\Omega(z)\big(y-b(z,t)\big),$$
$$V_y=\frac{\partial b(z,t)}{\partial t}+\Omega(z)\big(x-a(z,t)\big), \qquad (2.20)$$
$$V_z=0,$$

$$H_x=-n(z)y+\xi(z,t),$$
$$H_y=n(z)x+\eta(z,t), \qquad (2.21)$$
$$H_z=0,$$

$$\omega(z)=\frac{1}{\rho(z)}=C_0\frac{\Omega(z)\left[\Omega(z)+2\omega_{0z}\right]}{1+C_0\psi_1(z)}, \qquad (2.22)$$

$$P'=\frac{1}{2C_0}\left[\big(x-q_1(t)\big)^2+\big(y-q_2(t)\big)^2-2\int\frac{g}{\psi}\mathrm{d}z\right]-$$
$$-\int\frac{\psi_1}{\psi}g\mathrm{d}z+P_0'(t). \qquad (2.23)$$

где $\xi(z,t)=\alpha(z)\sin\Omega t+\beta(z)\cos\Omega t+n(z)b(z,t),$ $\eta(z,t)=-\alpha(z)\cos\Omega t+\beta(z)\sin\Omega t-n(z)a(z,t),$ $n(z),$ $\alpha(z),$ $\beta(z)$ – проивольные функции $z;$ $\psi=\Omega(\Omega+2\omega_{0z}),$ $\psi_1=n^2/4\pi,$ $a(z,t),$ $b(z,t),$ $z_1=z$ – координаты перемещающегося центра вращения циклона; $\Omega(z)$ – угловая скорость вращения циклона; $C_0=\mathrm{const},$ $2\omega_{0z}$ – вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли; $q_1(t),$ $q_2(t)$ – произвольные функции времени; $P_0'(t)$ – произвольная функция времени. Как видим, плотность определяется с точностью до постоянной C_0, а давление – с точностью до произвольной функции времени $P_0'(t)$. Остальные шесть произвольных функций $a(z,t)$, $b(z,t)$, $\xi(z,t)$, $\eta(z,t)$ $\Omega(z)$ и $n(z)$ определяются из шести дифференциальных уравнений, которые при заданных $q_1(t)$ и $q_2(t)$ полностью решают поставленную задачу.

Проанализируем полученное точное решение (2.20)–(2.23), обладающее всеми основными свойствами нестационарного циклона или антициклона. Как видно, кинематическая картина движения повторяет все закономерности реально наблюдаемых циклонов (антициклонов). Действительно, из формулы (2.20) следует, что в каждый данный момент рассматриваемое движение можно представить как вращение частиц около мгновенного центра с координатами:

$$x_c = a - \frac{1}{\Omega}\frac{\partial b}{\partial t}, \qquad y_c = b + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial a}{\partial t}, \qquad z_c = z.$$

Геометрическое место мгновенных центров для разных высот дает мгновенную ось движения, которая, как и ось вращения, меняет свое положение и форму во времени. Определяя линии тока по уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}x}{-\Omega(y-y_c)} = \frac{\mathrm{d}y}{\Omega(x-x_c)} = \frac{\mathrm{d}z}{0},$$

найдем, что они будут концентрическими окружностями в горизонтальных плоскостях. Для траекторий частиц проводящей жидкости из (2.20) найдем:

$$x = a + A\cos(\Omega t + \alpha), \qquad y = b + A\sin(\Omega t + \alpha),$$

$$z = B,$$

где A, B и α не зависят от t и определяются из начальных положений частиц. Таким образом, траектории частиц будут иметь петли и точки возврата. Наконец, из (2.20) следует, что вертикальная составляющая вихрей зависит только от высоты z и равна удвоенной угловой скорости вращения $\Omega(z)$, а величина горизонтальных вихрей зависит как от высоты, так и от времени. Магнитные силовые линии, как видно из (2.21), представляют собой концентрические окружности в горизонтальных плоскостях с центрами в точках: $x_m = -\eta/n$, $y_m = \xi/n$. Как видим, центр вращения (a,b) и мгновенный центр магнитных силовых линий $(-\eta/n, \xi/n)$ взаимно связаны. Таким образом, всякое изменение магнитного поля вызывает изменение движения и наоборот. Следовательно, магнитные силовые линии, вмороженные в "тело" циклона, должны влиять на характер перемещения циклона. Формула (2.22) показывает, что плотность $\rho = 1/\omega$ меняется с высотой, т. е. имеем модель неоднородной атмосферы, причем ее изменение зависит от функций $\Omega(z)$ и $n(z)$. Подбором этих функций всегда можно изменить плотность ρ в соотвествии с действительными условиями в проводящей атмосфере. Изобарические поверхности определяются уравнением (2.23), если в нем положить $P' = \mathrm{const}$. Эти поверхности представляют собой параболоиды, которые изменяются со временем. Пересечения последних с горизонтальными плоскостями дают семейство изобар в виде концентрических окружностей с центром в точке $x_{01} = q_1(t)$, $y_{01} = q_2(t)$. Знак второй производной от P' по x, y зависит от произвольной постоянной C_0. Отсюда при $C_0 > 0$ в центре изобар будет минимум давления, и в этом случае найденное движение определяет циклон; при $C_0 < 0$ – в центре имеется максимум давления, и движение будет представлять собой антициклон. Формулы (2.22) и (2.23) показывают, что изобарические и изостерические поверхности пересекаются так, что рассматриваемое движение есть движение бароклинное. Это видно и непосредственно, т. к. изостерические поверхности $\omega = \mathrm{const}$ представляют собой горизонтальные плоскости (поскольку ω зависит только от z), а изобарические поверхности не являются горизонтальными (параболоиды). Кроме того, учитывая, что действующие силы неконсервативны ($\mathrm{rot}\mathbf{F} \neq 0$) и градиентом магнитного поля вдоль силовых линий нельзя пренебречь, $\mathbf{T} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}/4\pi,$ заключаем, что в рассматриваемом вращательном движении за счет бароклинности и неконсервативности действующих сил будет постоянно происходить образование и разрушение вихрей.

Из полученных формул следует также, что вся масса циклона заключена в цилиндре, представляющем собой единичную вихревую трубку с сечением $S = (x - \xi_1)(y - \eta_1),$ в которой частицы вращаются с угловой скоростью Ω. Обозначая радиус циклона через $r = \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} = r_0,$ для переносной скорости и циркуляции соответственно будем иметь: $V_0 = \Omega r_0$ и $2\Omega S = 2\Omega\pi r_0^2.$ Если r – расстояние от оси циклона в нормальном сечении до некоторой точки вне циклона, то из условия сохранения циркуляции получим: $\Gamma = \oint V \mathrm{d}r = 2\Omega\pi r_0^2.$ Ввиду симметрии вихревой трубки скорость V будет одинаковой в каждой точке контура, и поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Получим: $V \cdot 2\pi r = 2\Omega\pi r_0^2,$ отсюда $V = \Omega r_0^2 / r,$ т. е. течение вне циклона будет потенциальным. Следовательно, течения воздуха внутри и вне циклона будут существенно различными. Внутри циклона воздух будет вращаться как твердое тело с угловой скоростью Ω, а вне циклона характер движения будет потенциальным, обладающим циркуляцией. При этом сам циклон будет перемещаться с поступательной скоростью в атмосфере. Кочин называет этот атмосферный феномен явлением распространения циклона.

При $\mathbf{H} \to 0$ модель магнитогидродинамического циклона переходит в известную гидродинамическую модель циклона, построенную Кочиным [18]. Из найденного решения элементарно получается модель стационарного магнитогидродинамического циклона [9]. Тем самым доказывается возможность неоднородного вращения в сжимаемой жидкости. Исследуем случай $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Г}) \neq 0$ и $(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Б}) \neq 0,$ не имеющий аналога в обычной гидродинамике. В этом случае

$$\omega = e^{\varphi} = \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Б})}{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{Г})} = m. \tag{2.24}$$

Исключая с помощью этого соотношения φ из уравнений (2.15) и (2.16), с учетом (2.20) и (2.21) получим: $\partial m/\partial x = \partial m/\partial z = 0.$ Тогда из уравнения $\partial m/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \mathrm{grad} m) = 0$ будем иметь $\partial m/\partial t = 0.$ Следовательно, m есть функция только от z. Вычисляя составляющие по осям x и y, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial z} - m\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\psi}{m}\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial A}{\partial z} - m\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{A}{m}\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial B}{\partial z} - m\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{B}{m}\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $\psi, \psi_1,$ $A,$ $B,$ $A_1,$ B_1 – известные функции. Интегрируя первое уравнение (2.25), определим удельный объем:

$$\omega = \frac{4\pi\Omega(z)[\Omega(z) + 2\omega_{0z}]}{n^2(z)}. \tag{2.26}$$

Интегрируя два остальных уравнения (2.25), найдем связь между функциями A и A_1, B и B_1:

$$\frac{\psi_1}{\psi}A = A_1 + c_1(t), \qquad \frac{\psi_1}{\psi}B = B_1 + c_2(z), \tag{2.27}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ – произвольные функции t, которые без ограничения общности можно положить равными нулю.

Определяя полное давление по формуле (2.13), получим:

$$P' = P_0' - \int \frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} g \mathrm{d}z. \tag{2.28}$$

Легко показать, что найденное решение обобщает известное решение Альвена–Чандрасекхара о магнито-вихревых кольцах. Действительно, если $\partial/\partial t=0$, $\mathbf{F}=[\mathbf{V}\cdot 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}]+\mathbf{g}=0$, $a=\text{const}$, $b=\text{const}$, $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$, $\Omega(z)=\text{const}$ и $n(z)=\text{const}$, найденные выше формулы принимают вид:

$$V_x=-\Omega(y-b), \qquad V_y=\Omega(x-a),$$

$$H_x=-n(y-b), \qquad H_y=n(x-a),$$

$$\rho=\frac{n^2}{4\pi\Omega^2}, \qquad P'=P'_0=\text{const}.$$

Отсюда получим стационарное движение Альвена [21], связывающее скорость течения $\mathbf{V}$ с магнитным полем $\mathbf{H}$, которое лишь по форме совпадает с альвеновской волной, ничего общего с ней не имея:

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad P'=P_0+\frac{H_0^2}{8\pi}=\text{const}.$$

С учетом массовых сил $\mathbf{F}=[\mathbf{V}\cdot 2\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0}]+\mathbf{g}\neq 0$ будем иметь решение [9]:

$$\mathbf{V}=\frac{\Omega\mathbf{H_0}}{\sqrt{4\pi\rho(\Omega+2\omega_{0z})\Omega}},$$
$$P'=P_0+\frac{H_0^2}{8\pi}-\rho g z, \tag{2.29}$$

переходящее в решение Альвена при $2\omega_{0z}=0$ и $g=0$.

Таким образом, условия динамической возможности движения позволяют отыскать некоторые точные решения сжимаемой, бароклинной, электропроводящей вращающейся жидкости типа (2.20) и (2.21) при наличии неконсервативных сил. Эти решения представляют собой редкий случай точного интегрирования нелинейных уравнений магнитной гидродинамики для неоднородного вращения жидкости $(\Omega(z)\neq 0)$.

В F-области ионосферы уравнение индукции (2.12) сильно ограничивает произвольность вращательного движения и для умеренных и высоких широт дает точное решение в виде:

$$V_x(y,z,t), \qquad V_y(x,z,t), \qquad V_z=V_{0z},$$
$$H_x(y,z,t), \qquad H_y(x,z,t), \qquad H_z=H_{0z}, \tag{2.30}$$

где V_x, V_y, H_x и H_y определяются формулами (2.20) и (2.21), $V_{0z}=\text{const}$, $H_{0z}=\text{const}$ – вертикальная компонента геомагнитного поля. Подставляя (2.30) в уравнение (2.17) и приравнивая нулю произвольные постоянные, получим: $n=k\Omega$, $\xi=k\xi_1$ и $\eta=k\eta_1$, где $k=H_{0z}/V_{0z}=\text{const}$. Тогда (2.30) принимает вид: $\mathbf{H}=k\mathbf{V}$, где $\mathbf{H}=H_x\mathbf{e_x}+H_y\mathbf{e_y}+H_{0z}\mathbf{e_z}$, $\mathbf{V}=V_x\mathbf{e_x}+V_y\mathbf{e_y}+V_z\mathbf{e_z}$. Используя параллельность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$, методом условий динамической возможности можно рассмотреть стационарную задачу. Основные уравнения магнитной гидродинамики в стационарном случае сводятся к уравнениям обычной гидродинамики:

$$\text{grad}P'=e^{\varphi}\mathbf{F}-\left(e^{-\varphi}-\frac{k^2}{4\pi}\right)(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V},$$
$$(\mathbf{V}\cdot\text{grad}\varphi)=0. \tag{2.31}$$

Используя теоремы Фридмана, можно отыскать точное решение, определяющее стационарный циклон (антициклон) для F-области ионосферы. Система (2.31) при $F=0$ и $\exp(-\varphi)=\rho=k^2/4\pi$ дает точное стационарное решение Альвена–Чандрасекхара $\mathbf{V_{cm}}=\mathbf{H_0}/\sqrt{4\pi\rho}$, которое в области F ионосферы связывает стационарное движение ионосферной среды с геомагнитным полем $\mathbf{H_0}$ и является новой характеристической скоростью для этой области верхней атмосферы. Естественно, что всякое малое отклонение от него должно порождать волновые возмущения, имеющие магнитогидродинамическую природу. В нижней Е-области ионосферы, в нейтральной и ионной $(\mathbf{V} \approx \mathbf{V_i})$ компонентах не существует стационарное решение типа Альвена–Чандрасекхара, и магнитогидродинамические волны здесь не должны возникать. В электронной компоненте условие вмороженности $\partial\mathbf{H}/\partial t = \mathrm{rot}[\mathbf{V_e} \cdot \mathbf{H_0}]$ естественным образом содержит стационарное решение $\mathbf{V_{e,cm}} = \mathbf{H_0}\big/\sqrt{4\pi\rho_e}$, и малое отклонение от него должно порождать в этой компоненте ионосферной плазмы волновые возмущения магнитогидродинамической природы. Более детально рассматриваемые выше проблемы и многие примеры точных решений нелинейных уравнений магнитной гидродинамики обсуждаются в [9]. Обобщение теорем Хантадзе для вязкой с конечной проводимостью среды (дающее новые дополнительные теоремы и ряд категорий движений) рассмотрено в работах [23, 24].

Резюмируя, можем заключить, что при исследовании вопроса о движении сжимаемой, бароклинной, электропроводящей жидкости условия динамической возможности (в виде тринадцати теорем, с учетом диссипативных процессов – пятнадцати) должны учитываться всегда. Эти условия часто накладывают такие физически возможные ограничения на поле скоростей $\mathbf{V}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ (которые при постановке задачи могут иметь довольно общие формы), что во многих случаях удается отыскивать некоторые точные решения нелинейных уравнений магнитной гидродинамики, и, таким образом, становится возможным построение теоретических моделей тех или иных движений в ионосфере и в других областях магнитной гидродинамики.

Считая теоремы об условиях динамической возможности движения принципиально важными, в качестве иллюстрации приведем две из них для случая $(\mathbf{G\Gamma}) \neq 0$, $(\mathbf{GБ}) \neq 0$, и для случая $(\mathbf{G\Gamma}) = 0$, $(\mathbf{GБ}) = 0$.

В первом случае условия динамической возможности будут иметь вид:

$$\mathbf{Б} = m\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{m}[\mathbf{G}\,\mathrm{grad}\,m],$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \theta m,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \theta\mathbf{H} = 0,$$

где $m = (\mathbf{GБ})/(\mathbf{G\Gamma})$, $\theta = \mathrm{div}\mathbf{V}$.

Система не содержит удельный объем и связывает, при заданных массовых силах, кинематические элементы движения: компоненты скорости $\mathbf{V}$, магнитного поля $\mathbf{H}$ и их пространственные и временные производные. Нетрудно подсчитать, сколько скалярных уравнений влечет за собой рассматриваемая система. Первое уравнение системы дает два скалярных уравнения, что легко показать, если его составляющую вдоль оси x умножить на G_x, а вдоль оси y – на G_y. Складывая и вычитая полученные выражения из тождественного равенства $m(\mathbf{G\Gamma}) = (\mathbf{GБ})$, получим составляющую вдоль оси z. Остальные уравнения дают четыре скалярных уравнения. Таким образом, получаются шесть скалярных уравнений для определения шести неизвестных: трех составляющих скорости $\mathbf{V}$ и трех составляющих магнитного поля $\mathbf{H}$. Поэтому система замкнута.

Если в различных частных случаях из рассматриваемой системы, при заданных массовых силах, будут найдены выражения для скорости и магнитного поля, то с помощью формулы (2.24) непосредственно будет определена плотность среды $\rho = e^{-\varphi}$, а из соотношения (2.13) – полное давление среды $P' = P + H^2/8\pi$ с точностью до произвольной функции времени. Примеры точных решений для случая $(\mathbf{G\Gamma}) \neq 0$, $(\mathbf{GБ}) \neq 0$ приведены в [9, 21, 22].

Для второго случая, $(\mathbf{G\Gamma}) = 0$, $(\mathbf{GБ}) = 0$ рассмотрим теорему, когда скаляр $\mu = (\mathbf{VG})$ отличен от нуля.

Умножая векторно уравнение (2.15) на $\mathbf{V}$ и используя (2.16), получим векторное уравнение для определения плотности среды $\rho = e^{-\varphi}$:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathbf{B} + e^{\varphi}\mathbf{C}, \qquad (2.32)$$

где $\mathbf{A} = \dfrac{[\mathbf{БV}] + \theta\mathbf{G}}{\mu}$, $\mathbf{B} = -\dfrac{\mathbf{G}}{\mu}$, $\mathbf{C} = \dfrac{[\mathbf{V\Gamma}]}{\mu}$.

Для исключения $\operatorname{grad}\varphi$ из (2.32) применим операцию rot к уравнению (2.32) и получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathbf{P} + e^{\varphi}\mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0, \qquad (2.33)$$

где $\mathbf{P} = \operatorname{rot}\mathbf{B} + \left[\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{B}\right]$, $\mathbf{Q} = \operatorname{rot}\mathbf{C} + \left[\dfrac{\partial\mathbf{C}}{\partial t}\mathbf{B}\right] + [\mathbf{AC}]$,

$\mathbf{R} = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \left[\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\mathbf{B}\right]$.

Ограничимся случаем $\mathbf{P} \neq 0$. Тогда, умножая (2.33) векторно на $\mathbf{P}$, получим:

$$e^{\varphi}[\mathbf{PQ}] = [\mathbf{RP}]. \qquad (2.34)$$

Для $[\mathbf{PQ}] \neq 0$ найдем условие динамической возможности движения:

$$\big[[\mathbf{PQ}]\cdot[\mathbf{RP}]\big] = \big([\mathbf{PQ}]\mathbf{R}\big) = 0. \qquad (2.35)$$

Условие (2.35) означает, что векторы $[\mathbf{PQ}]$ и $[\mathbf{RP}]$ параллельны, т. е. существует скаляр $\xi = \xi(x, y, z, t)$, для которого имеет место равенство:

$$\xi[\mathbf{PQ}] = [\mathbf{RP}].$$

Сравнивая это выражение с (2.34), заключаем, что плотность определяется непосредственно с помощью этого скаляра:

$$\xi = e^{\varphi} = \frac{1}{\rho}. \qquad (2.36)$$

Следовательно, можно считать доказанной следующую теорему.

Необходимым и достаточным условием динамической возможности движения в магнитной гидродинамике в случае $\mu \neq 0$, $\mathbf{P} \neq 0$ и $[\mathbf{PQ}] \neq 0$ является:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \theta\mathbf{H} = 0, \quad (\mathbf{G\Gamma}) = 0, \quad (\mathbf{GБ}) = 0,$$

$$\big([\mathbf{PQ}]\mathbf{R}\big) = 0, \qquad \operatorname{grad}(\ln\xi) = \mathbf{A} + \frac{\partial\ln\xi}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{C},$$

где ξ определяется из уравнения $[\mathbf{RP}] = \xi[\mathbf{PQ}]$.

Здесь условия динамической возможности, как в теореме, приведенной ранее, при заданных массовых силах, содержат лишь компоненты $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ и их пространственные и временные производные. Необходимость условий только что была доказана, докажем их достаточность. Так как, согласно теореме, всегда существует скаляр ξ, определяемый равенством $\xi[\mathbf{PQ}] = [\mathbf{RP}]$, то вычитая это равенство из (2.34) и учитывая, что по условию теоремы $[\mathbf{PQ}] \neq 0$, определим ξ по (2.36). Подставляя найденное значение ξ в последнее условие динамической возможности, получим:

$$\mu\operatorname{grad}\varphi = [\mathbf{БV}] + \theta\mathbf{G} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathbf{G} + e^{\varphi}[\mathbf{V\Gamma}]. \qquad (2.37)$$

Умножая векторно (2.37) на $\mathbf{G}$, найдем:

$$\mu[\mathbf{G}\operatorname{grad}\varphi] = (\mathbf{VG})\mathbf{Б} -$$

$$-(\mathbf{GБ})\mathbf{V} - e^{\varphi}(\mathbf{G\Gamma})\mathbf{V} + e^{\varphi}(\mathbf{VG})\mathbf{\Gamma}.$$

Так как, согласно условиям теоремы, $(\mathbf{G\Gamma}) = 0$, $(\mathbf{GБ}) = 0$, $\mu = (\mathbf{VG}) \neq 0$, будем иметь: $\mathbf{Б} + [\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{G}] = e^{\varphi}\mathbf{\Gamma}$. Но это выражение, как было показано выше, представляет собой необходимое и достаточное условие для определения градиента полного давления $\operatorname{grad}P' = e^{-\varphi}\mathbf{G} + \mathbf{T}$, т. е. получаем уравнение Эйлера (2.10).

Для получения уравнения неразрывности, умножим скалярно уравнение (2.37) на $\mathbf{V}$:

$$\mu(\mathbf{V}\operatorname{grad}\varphi) = \theta\big(\mathbf{VG}\big) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathbf{VG}).$$

После сокращения на $\mu = (\mathbf{VG}) \neq 0$ получим уравнение неразрывности (2.11). Таким образом, достаточность условий теоремы также доказана.

Как было отмечено выше, случай $(\mathbf{G}\mathbf{Г}) = 0$, $(\mathbf{G}\mathbf{Б}) = 0$, содержит 12 теорем, а случай $(\mathbf{G}\mathbf{Г}) \neq 0$, $(\mathbf{G}\mathbf{Б}) \neq 0$ – лишь одну. В отсутствие магнитного поля число теорем уменьшается до пяти теорем Фридмана.

Отметим, что приведенное точное решение (2.20)–(2.23), моделирующее магнитогидродинамический циклон, найдено с помощью только что доказанной теоремы, а решение (2.26)–(2.28) – с помощью теоремы для случая $(\mathbf{G}\mathbf{Г}) \neq 0$, $(\mathbf{G}\mathbf{Б}) \neq 0$.

Эти теоремы, как и теоремы Фридмана и вытекающие из них широкоизвестные инварианты о вихрях (которые как частные случаи включают в себя нелинейные уравнения Чарни–Обухова для коротких волн Россби и уравнения Хасегавы и Мимо для дрейфовых волн), к сожалению, не достаточно известны широкому кругу исследователей физики атмосферы, океана, магнитной гидродинамики и физики плазмы.

Литература

1. Hajkowicz L. A. Global onset and propagation of large-scale travelling ionospheric disturbance as a result of the Great Storm of 13 March 1989 // Planet. Space Sci. – 1991. – Vol. 39. – P. 583-593.
2. Шарадзе З. С., Мосашвили Н. В., Пушкова Г. Н., Юдович Л. А. Долгопериодные волновые возмущения в верхней мезосфере и нижней термосфере // Геомагнетизм и аэрономия. – 1989. – Т. 29. – С. 1032-1034.
3. Липеровский В. А., Похотелов О. А., Шалимов С. А. Ионосферные предвестники землетрясений. – М.: Наука, 1992. – 304 с.
4. Hayakawa M. (Ed.). Atmospheric and ionospheric phenomena associated with earthquakes. – Tokyo: Terra Sci. Publ. Comp., 1999.
5. Дробжев В. И., Молостов Г. Ф., Рудина М. П. и др. Отклик ионосферы на возмущения, инициированные промышленным взрывом // Ионосферные исследования. – 1986. – Т. 33. – С. 61-71.
6. Shaefer L. D., Rock D. R., Lewis J. P., et al. Detection of Explosive Events by Monitoring Acoustically Induced Geomagnetic Perturbations., No. 94550, Lawrence Livermore Laboratory. – CA, USA, Livermore, 1999.
7. Бурмака В. П., Костров Л. С., Черногор Л. Ф. Статистические характеристики сигналов доплеровского ВЧ радара при зондитровании средней ионосферы, возмущенной стартами ракет и солнечным терминатором // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т. 8, №2. – С. 143-162.
8. Черногор Л. Ф. Физика Земли атмосферы и геокосмоса в свете системной парадигмы // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 59-106.
9. Хантадзе А. Г. Некоторые вопросы динамики проводящей атмосферы. – Тбилиси: Мецниереба, 1973. – 280 с.
10. Холтон Дж. Динамическая метеорология стратосферы и мезосферы. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1979. – 224 с.
11. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. – М.: Мир, 1978. – 532 с.
12. Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д. Движения в ионосфере. – Новосибирск: Наука, 1979. – 344 с.
13. Шарадзе З. С. Атмосферные волны в среднеширотной ионосфере: Дис... докт. физ.-мат. наук. – М.: 1991. – 255 с.
14. Хантадзе А. Г., Гвелесиани А. И. К теории диффузии ионосферной плазмы в области F. – М.: Наука, 1979. – 116 с.
15. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. – М.: Наука, 1974. – С. 163-195.
16. Хантадзе А. Г. Об условиях динамической возможности движения в магнитной гидродинамике // Сообщ. АН ГССР. –1963. – Т. 30, №4. – С. 409.
17. Фридман А. А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. – М-Л., 1934.
18. Хантадзе А. Г. Гидромагнитные градиентные волны в динамо-области ионосферы // Сообщ. АН ГССР. – 1986. – Т. 123, №1. – С. 69-71.
19. Альвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
20. Chandrasekhar S. On the stability of the simplest solution of the equations of hydrodynamics // Proc. Nat. Acad. Sci, (USA) – 1956. – Vol. 42, No. 5.
21. Гвелесиани А. И. Условия динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости в магнитной гидродинамике // Труды ИГ АН ГССР. – 1973. – Т. 30. – С. 99-117.
22. Гвелесиани А. И. Исследование движений проводящей атмосферы и проблемы динамики ионосферы: Дис... докт. физ.-мат. наук. – Тбилиси: 1979. – 266 с.
23. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 1 и 2. – М.: Мир, 1986.
24. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 1 и 2. – М.: Мир, 1984.

Великомасштабні вихрові структури планетарного масштабу на іоносферних рівнях

А. Г. Хантадзе, А. І. Гвелесіані, Г. В. Джандієрі

Аналізується проблема виникнення та умови існування великомасштабних ультранизькочастотних хвильових структур і великомасштабних вихорів в іоносфері. Знайдено деякі точні розв'язання рівнянь магнітної гідродинаміки та побудовано нові інваріанти, що дозволяють розкрити механізми зародження великомаштабних вихорів і планетарних хвиль в іоносфері під дією неконсервативних сил Коріоліса та сили Ампера. Розвинений метод видається одним з важливих та оригінальних методів для розв'язання найскладніших нелінійних задач магнітної гідродинаміки стискуваної, неоднорідної, бароклинної рідини, котра перебуває, у загальному випадку, в полі неконсервативних сил. На жаль, він не є досить відомим широкому загалу дослідників магнітної гідродинаміки та фізики плазми.

Large-Scale Vortex Structures of Planetary Scale in Ionosphere Levels

A. G. Khantadze, A. I. Gvelesiani, and G. V. Jandieri

The problem of generation and existence conditions of both large-scale ultra-low-frequency wavy structures and large-scale vortices in the ionosphere is considered. Some exact solutions of magnetohydrodynamic equations are found, and new invariants allowing to reveal generation mechanisms of large-scale vortices and planetary waves in the ionosphere under the effect of nonconservative Coriolis and Ampere forces constructed. This method seems to be important and original in solving the most complicated nonlinear problems of the magnetohydrodynamics of compressible, inhomogeneous, baroclinic liquid being, in the general case, under non-conservative forces. Unfortunately, it is poorly known for a wide circle of investigators in magnetohydrodynamics and plasma physics.