

СИММЕТРИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА СОВМЕСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Анотація. У роботі наведені результати застосування методу сумісної апроксимації для побудови симетричних різницевих схем підвищеного порядку точності на компактному шаблоні. Побудовані різницеві схеми від другого до восьмого порядку апроксимації за часом і простором для одновимірного лінійного рівняння переносу. Показані результати тестових розрахунків, які підтверджують теоретичні викладки.

Ключові слова: метод сумісної апроксимації, симетрична схема.

Аннотация. В работе приведены результаты применения метода совместной аппроксимации для построения симметричных разностных схем повышенного порядка точности на компактном шаблоне. Построены разностные схемы от второго до восьмого порядка аппроксимации по времени и пространству для одномерного линейного уравнения переноса. Представлены результаты тестовых расчетов, подтверждающие теоретические выкладки.

Ключевые слова: метод совместной аппроксимации, симметричная схема.

Abstract. The results of using the joint approximation method for designing the high order symmetrical finite difference schemes on a compact stencil are presented. Finite difference schemes from second to eighth order of approximation on time and space for the one-dimensional linear equation of transfer have been built. The results of the test calculations that prove the theoretical outfits are shown.

Keywords: joint approximation method, symmetric scheme.

1. Введение

На сегодняшний день численные методы широко используются в различных областях науки и техники для исследования физических процессов. При этом создается вычислительная модель приближенного решения. Основой таких моделей есть уравнения математической физики, точное решение которых является сложной задачей вследствие многообразия возможных граничных условий. Степень соответствия приближенного решения точному определяется погрешностью аппроксимации, поэтому естественна предпочтительность методов с меньшей погрешностью, то есть, методов более высокого порядка точности.

Ранее автором был предложен новый метод построения компактных разностных схем повышенного порядка точности – метод совместной аппроксимации [1–3]. Приведем кратко идею построения разностных схем методом совместной аппроксимации следуя [3]. В основе этого метода лежит принцип аппроксимации разностной схемы исходного уравнения на пространстве функций, являющихся решением последнего. Следующий из этого принцип эквивалентности частных производных позволяет увеличить число свободных параметров при создании схемы без изменения шаблона. При этом учитывается то, что разностная схема аппроксимирует точно дифференциальное уравнение бесконечного порядка, так называемую гиперболическую форму дифференциального представления разностной схемы (далее – Г-форму дифференциального представления разностной схемы [4]). Все это позволяет повысить порядок локальной аппроксимации разностной схемы.

Разностные аппроксимации производных, входящих в исходное уравнение, строятся методом неопределенных коэффициентов. Однако для определения этих коэффициентов, помимо условий аппроксимации, используется не Г-форма, а параболическая форма дифференциального представления разностной схемы (далее – П-форма). Она получается из Г-формы заменой производных по времени и смешанных производных производными по координате с использованием дифференциальных следствий Г-формы. Как следствие,

невязка разностной схемы содержит меньше условий, подлежащих удовлетворению для повышения порядка аппроксимации. Это позволяет либо повысить порядок аппроксимации на заданном шаблоне по сравнению с традиционными подходами, либо при заданном порядке точности сократить число точек в шаблоне разностной схемы.

Использование предложенного выше подхода к построению разностных схем приводит к аппроксимации не отдельных составляющих исходного уравнения, а уравнения в целом (входящие в него производные аппроксимируются совместно).

Ранее в работах [1, 3] для построения разностных схем использовались несимметричные противопоточные шаблоны. Это не давало возможности проводить расчеты при отрицательных значениях скорости переноса.

2. Применение симметричных разностных схем для решения уравнения переноса методом совместной аппроксимации

Цель данной работы состоит в построении симметричных разностных схем для решения дифференциальных уравнений в частных производных методом совместной аппроксимации и применении предлагаемого подхода к решению простейшего гиперболического уравнения – уравнения переноса при произвольных значениях скорости переноса.

Построим методом совместной аппроксимации разностную схему для простейшего гиперболического уравнения – линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0 \quad (1)$$

на десятиточечном шаблоне, включающем девять точек по пространству и два слоя по времени.

Для выполнения свойства консервативности исходную схему запишем в потоковой форме:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} + \frac{a(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)}{2h} + \frac{1}{h} \Delta_x (a_1 f_{i-3}^n + a_2 f_{i-2}^n + a_3 f_{i-1}^n + a_4 f_i^n + a_5 f_{i+1}^n + a_6 f_{i+2}^n + a_7 f_{i+3}^n + a_8 f_{i+4}^n) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\Delta_x g_i^n = g_i^n - g_{i-1}^n$ – оператор конечной разности назад по пространству, $a_j, j = 1, 8$ – свободные параметры, подлежащие определению.

Раскладывая f_{i+j}^{n+1}, f_{i+j}^n в ряд Тейлора в окрестности точки (t_n, x_i) и подставляя эти разложения в разностную схему (2), получим ее дифференциальное представление, главный член которого

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (a + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8)) \frac{\partial f}{\partial x} = 0(\tau, h).$$

Как видно, для аппроксимации исходного уравнения (1) необходимо, чтобы

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0.$$

Полагая, что

$$a_4 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8, \quad (3)$$

получим Г-форму разностной схемы (2). Ввиду ее громоздкости, ограничимся членами первого порядка по τ, h :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + h(-3a_1 - 2a_2 - a_3 + a_5 + 2a_6 + 3a_7 + 4a_8) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tau \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0(\tau^2, h^2).$$

Далее, заменим производные по времени и смешанные производные через производные по координате, используя дифференциальные следствия Г-формы. Поскольку после подстановки (3) в схему (2) осталось семь свободных параметров, ограничимся заменой производных до девятого порядка включительно. Результатом будет П-форма девятого дифференциального приближения разностной схемы (2):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{j=2}^8 h^{j-1} C_j \frac{\partial^j f}{\partial x^j} = 0.$$

Выражения для C_j достаточно громоздки (например,

$$C_4 = \frac{a}{120} + \frac{1}{4}(-31a_1 - 12a_2 - 3a_3 + a_5 + 4a_6 + 13a_7 + 32a_8)\sigma +$$

$$a(-3a_1 - 2a_2 - a_3 + a_5 + 2a_6 + 3a_7 + 4a_8)^2\sigma + \frac{a^5\sigma^4}{5} +$$

$$\frac{1}{6}a^3\sigma^2(1 - 18a_1\sigma + 6(-2a_2 - a_3 + a_5 + 2a_6 + 3a_7 + 4a_8)\sigma + \frac{1}{4}(26a_1 + 7a_2 + a_3 + 7a_7 + 26a_8 -$$

$$4(a_1 + 2a_2 + a_3 - a_5 - 2a_6 - 3a_7 - 4a_8)(6a_1 + 3a_2 + a_3 + a_6 + 3a_7 + 6a_8)\sigma),$$

поэтому в дальнейшем приводить их не будем.

Для повышения порядка малости невязки до восьмого необходимо последовательно приравнять нулю коэффициенты C_j при $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, k = 2, 8$. Используя полученную систему алгебраических уравнений и приравнивая некоторые из $a_k, k = 2, 8$ нулю, несложно построить разностные схемы от второго до восьмого порядка точности. Структура этих систем уравнений приведена в табл. 1.

Таблица 1. Структура систем уравнений

Порядок точности	Система уравнений для определения параметров
2	$C_2 = 0;$ $a_1 = a_2 = a_3 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$
3	$C_2 = C_3 = 0;$ $a_1 = a_2 = a_7 = a_8 = 0$
4	$C_2 = C_3 = C_4 = 0;$ $a_1 = a_2 = a_7 = a_8 = 0$
5	$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0;$ $a_1 = a_8 = 0$
6	$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0;$ $a_1 = a_8 = 0$
7	$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 0$
8	$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$

Свободные параметры в схемах нечетного порядка точности использовались для симметризации разностных схем.

Устойчивость полученных схем была исследована методом Неймана и методом дифференциального приближения. Все схемы оказались устойчивыми при

$$\frac{|a|\tau}{h} \leq 1.$$

Как видно, полученные разностные схемы позволяют проводить устойчивые расчеты при любых знаках скорости переноса a .

3. Результаты тестовых расчетов

Результаты, полученные выше аналитически, были подтверждены серией тестовых расчетов. Для проверки порядка аппроксимации полученных разностных схем было решено уравнение переноса (1) при $a = 1$ и $a = -1$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$f(0, x) = f_0(x), x \in [-1, 1]$$

с периодическими граничными условиями. Решение было получено для двух начальных условий.

В первой задаче

$$f_0(x) = \sin(\pi x), \quad (5)$$

во второй

$$f_0(x) = \sin^4(\pi x). \quad (6)$$

Расчет проводился до $t = 2$ – до завершения одного цикла. Эти задачи считаются традиционными для исследования сходимости разностных схем.

Во всех задачах полагалось $\sigma = 0,5$. Известное точное решение задачи (4)

$$f(t, x) = f_0(x - at)$$

позволило определить погрешности решения $\varepsilon = f - f_i^n$ в каждой точке по окончании расчета и экспериментально оценить скорость сходимости и, соответственно, порядок аппроксимации. Оценка погрешности решения ε проводилась в конечномерных аналогах норм в L_1, L_2, C :

$$\|u_i\|_{L_1^h} = h \sum_{i=1}^N |u_i|, \quad \|u_i\|_{L_2^h} = \sqrt{h \sum_{i=1}^N |u_i|^2}, \quad \|u_i\|_C = \max_{i=1, N} |u_i|.$$

Здесь u_i – некоторая сеточная функция, N – число узлов сетки по пространству. Порядок аппроксимации определялся по экстраполяции Ричардсона [4].

Результаты расчетов при различных значениях скоростей переноса давали значение погрешности, отличающееся на величину ошибок машинного округления

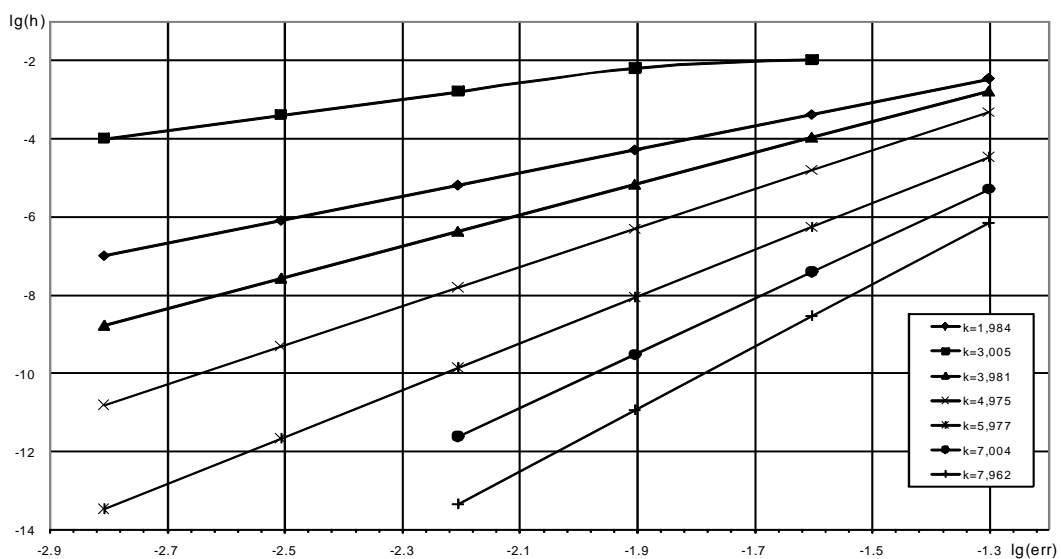


Рис. 1. Зависимость погрешности численного решения от шага дискретизации для задачи (4, 5)

Для иллюстрации на рис. 1 и 2 приведены зависимости нормы погрешности численного решения $\|u_i\|_C$ от шага дискретизации в логарифмических координатах для задач (4, 5) и (4, 6).

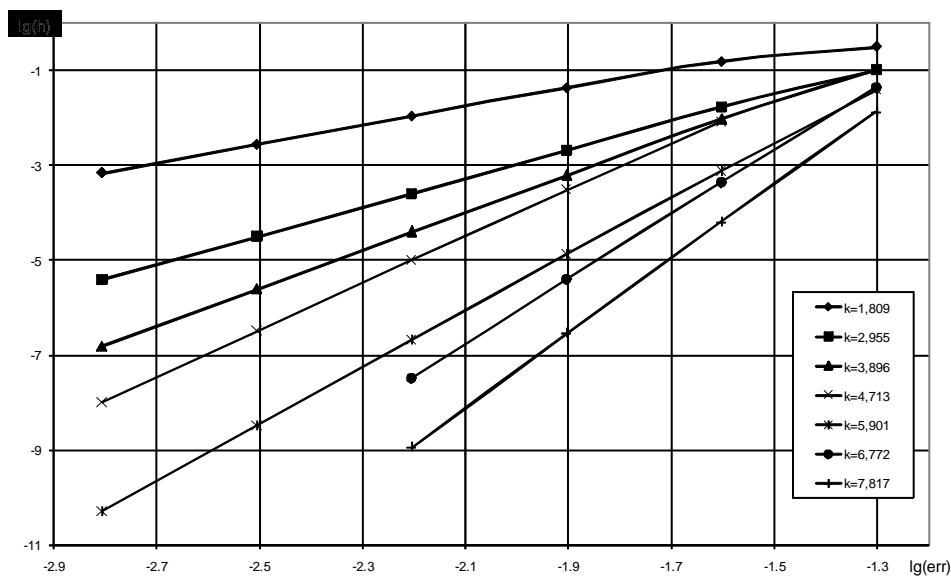


Рис. 2. Зависимость погрешности численного решения от шага дискретизации для задачи (4, 6)

Здесь k – угловой коэффициент прямых, аппроксимирующих зависимости нормы погрешности от шага дискретизации. По сути, k есть величина порядка аппроксимации конечноразностной схемы.

Как видно из приведенных результатов, с уменьшением шага дискретизации погрешность приближенного решения экспоненциально уменьшается, а порядок аппроксимации асимптотически приближается к заявленному для обеих задач.

4. Заключение

В данной работе построены симметричные схемы второго, третьего, четвертого, пятого, шестого, седьмого и восьмого порядков точности методом совместной аппроксимации для уравнения переноса. Схемы работают как при положительных, так и при отрицательных значениях параметра a . Результаты, полученные в статье, подтверждаются расчетными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бучарский В.Л. Метод совместной аппроксимации построения разностных схем для решения уравнений в частных производных / В.Л. Бучарский // Техническая механика. – 2007. – № 1. – С. 50 – 57.
2. Бучарский В.Л. Монотонная разностная схема для уравнений Эйлера / В.Л. Бучарский, В.Ф. Присняков // Проблемы высокотемпературной техники. – Д.: Вид-во ДНУ, 1994. – С. 65 – 71.
3. Бучарский В.Л. Разностная схема метода совместной аппроксимации для решения квазилинейных гиперболических уравнений / В.Л. Бучарский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2008. – С. 7 – 15.
4. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Приложение к газовой динамике / Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.
5. Encyclopedia of Computational Mechanics. Volume 1 Fundamentals / Ed. E. Stein, R. de Borst, T.J. R. Hughes. – WILEY, 2004. – 798 p.

Стаття надійшла до редакції 27.09.2010