УДК 004.94: 519.876.5

И.В. СТЕЦЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕТРИ-ОБЪЕКТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Анотація. *Розглядається теорія Петрі-об'єктного моделювання – нової технології моделювання, що ґрунтується на об'єктно-орієнтованій технології та стохастичній мережі Петрі з часовими затримками. Розроблені основні теоретичні положення Петрі-об'єктного моделювання та виведені рівняння станів Петрі-об'єктної моделі у звичайній та матричній формах.*
Ключові слова: *мережа Петрі, моделювання, об'єктно-орієнтована технологія, рівняння станів.*

Аннотация. *Рассматривается теория Петри-объектного моделирования – новой технологии моделирования, основывающейся на объектно-ориентированной технологии и стохастической временной сети Петри. Разработаны основные теоретические положения Петри-объектного моделирования и выведены уравнения состояний Петри-объектной модели в обычном и матричном видах.*
Ключевые слова: *сеть Петри, моделирование, объектно-ориентированная технология, уравнения состояний.*

Abstract. *The theory of Petri-object modeling – the new modeling of technology based on the object-oriented methodology and stochastic time latency Petri net is regarded. The basic theoretical principles of Petri-object modeling are developed and Petri-object model's state equations in ordinary and matrix form are derived.*
Keywords: *Petri net, modeling, object-oriented technology, state equations.*

1. Вступление

Интенсивное внедрение информационных технологий в различные области человеческой деятельности требует развития технологий моделирования сложных систем. Оптимизация параметров управления, определение эффективности функционирования системы при заданных параметрах и другие задачи решаются методами аналитического и имитационного моделирования. Имитационные модели, в отличие от аналитических, позволяют воспроизвести процесс функционирования системы и управления ею наиболее детально.

Временные сети Петри являются универсальным средством формализации процессов, имеющих событийный характер. Однако их использование для целей имитационного моделирования ограничено тем, что отсутствует математическая теория стохастических временных сетей Петри, и тем, что приходится использовать большое количество элементов сети Петри даже для простых систем, а большие сети Петри трудно проверить на правильность составления.

Для конструирования больших сетей Петри предлагается использовать объектно-ориентированную технологию. Идея объединения объектно-ориентированного подхода и сетей Петри присутствует в работах [1–4]. Термин „объектно-ориентированные сети Петри (object oriented Petri net, OPN)" закрепился за расширенным понятием сети Петри, в котором существуют специфические элементы сети Петри (позиции, переходы или маркеры), выполняющие функции объединения составляющих частей (которые и являются объектами) сети Петри [1]. Одной из реализаций этого подхода является язык LOOPN Чарльза Лакоса, в котором термин объектно-ориентированная сеть Петри означает, что маркеры сети Петри являются объектами в терминах объектно-ориентированного программирования, а также отдельные фрагменты сети Петри могут служить объектами [2]. Термин „иерархическая объектно-ориентированная сеть Петри с временными задержками (timed hierarchical object-oriented Petri net)" введен в работе [3]. Есть также публикации, в которых объекты и методы представляют сетями Петри с целью перевести объектно-ориентированный подход в язык сетей Петри [5].

Во всех разработках сеть Петри модифицируется или усложняется тем или иным способом с целью приспособления ее к основным понятиям объектно-ориентированной парадигмы. Это приводит к уничтожению таких основных преимуществ использования сетей Петри, как простота алгоритмической реализации и возможность аналитического исследования свойств. Кроме этого, указанные подходы позволяют реализовывать большие сети Петри только теоретически.

В настоящей работе разработана теория Петри-объектного моделирования, позволяющего, в отличие от существующих технологий моделирования, создавать модели больших систем средствами объектно-ориентированного моделирования и стохастических временных сетей Петри с конфликтными и многоканальными переходами. Технология Петри-объектного моделирования возникла и разрабатывалась во время создания имитационной модели системы управления учебным процессом вуза [6] в рамках проекта «Цифровой университет», что свидетельствует о ее практической значимости.

2. Основные понятия Петри-объектного моделирования

Введем класс объектов Петри-имитатор (PetriSim) как класс, который реализует имитацию некоторого реального объекта в соответствии с динамикой функционирования, заданной стохастической временной сетью Петри с конфликтными и многоканальными переходами (рис. 1). Информация о сети Петри содержится в поле PetriNet объекта Петри-имитатор. Метод Start() выполняет первоначальное преобразование сети Петри. Метод NextEvent() продвигает время и осуществляет преобразование сети Петри, соответствующее текущему моменту времени. Метод DoStatistica() содержит алгоритм сбора информации о среднем количестве маркеров в позициях и в переходах сети Петри. Информация о дополнительных действиях, которые выполняются при выходе маркеров из переходов, содержится в методе DoT().

PetriSim
— Net: PetriNet
— timeModeling: double
+ Do_T()
+ Start()
+ NextEvent()
+ DoStatistica()

Рис. 1. Основные поля и методы класса Петри-имитатор

<u>*Определение 1.*</u> *Петри-объектом* (PetriObj) называется объект, являющийся наследником объекта Петри-имитатор (PetriSim):

$$\mathrm{PetriObj} \xrightarrow{inherit} \mathrm{PetriSim}. \qquad (1)$$

Применение механизма наследования обеспечивает воссоздание всех полей и методов супер-объекта в саб-объекте. Сеть Петри объекта создается с помощью статичной функции класса NetLibrary и затем передается конструктору Петри-объекта в качестве аргумента. Конструктор Петри-объекта размещает переданную сеть Петри в поле PetriNet. Такой подход обеспечивает возможность использования одной и той же функции из класса NetLibrary для создания сетей Петри множества однотипных объектов, что, в свою очередь, гарантирует однотипность обращения к позициям и переходам таких объектов.

Петри-объекты, во-первых, владеют всеми свойствами обыкновенного объекта (как элемента ООП), во-вторых, имитируют функционирование объекта на основе сети Петри, описание которой содержится в поле PetriNet, в-третьих, являются конструктивными элементами, из которых составляется сеть Петри сложной системы.

<u>*Определение 2.*</u> Петри-объектной моделью называется модель, являющаяся результатом агрегирования Петри-объектов:

$$Model = \bigcup_N O_N \,, \qquad (2)$$

где $O_N \xrightarrow{inherit} \text{PetriSim}$.

Пример диаграммы классов Петри-объектной модели представлен на рис. 2. Классы Петри-объектов $C_1, C_2, ...C_m$ являются классами объектов в терминах объектно-ориентированного моделирования и могут быть как прямыми наследниками класса объектов PetriSim, так и наследниками, или агрегаторами, других классов Петри-объектов.

Сеть Петри объекта O_N, содержащуюся в его поле PetriNet, обозначим N:

$$N = (\mathbf{P}_N, \mathbf{T}_N, \mathbf{A}_N, \mathbf{W}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)\,, \qquad (3)$$

где $\mathbf{P}_N = \{P\}$ – множество позиций, $\mathbf{T}_N = \{T\}$ – множество переходов, $\mathbf{P}_N \cap \mathbf{T}_N = \varnothing$, $\mathbf{A}_N \subseteq (\mathbf{P}_N \times \mathbf{T}_N \cup \mathbf{T}_N \times \mathbf{P}_N)$ – множество дуг, $\mathbf{I}_N \subseteq (\mathbf{P}_N \times \mathbf{T}_N)$ – множество информационных дуг, $\mathbf{W} : \mathbf{A} \cup \mathbf{I} \to \mathrm{N}$ – множество натуральных чисел, задающих кратности дуг (количество связей), $\mathbf{K} = \{(c_T, b_T) \mid T \in \mathbf{T}, c_T \in N, b_T \in [0;1]\}$ – множество пар значений, задающих приоритет и вероятность запуска переходов, $\mathbf{R} : \mathbf{T} \to \Re_+$ – множество неотрицательных действительных значений, характеризующих временные задержки в переходах.

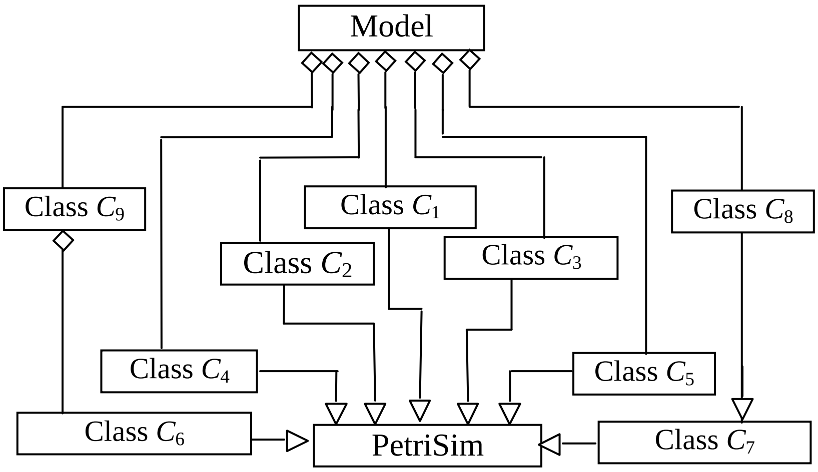

Рис. 2. Пример диаграммы классов Петри-объектной модели системы

Временные задержки в переходах заданы, в общем случае, случайными величинами. Информационные связи и их применение для формализации сложных систем описаны в [7].

Связи Петри-объектов между собой осуществляются двумя способами (рис. 3):

1) с помощью общих позиций (общая позиция является позицией сети Петри нескольких различных Петри-объектов);

2) с помощью инициализации событий (из перехода сети Петри объекта O_N при каждом выходе маркеров из перехода передаются маркеры в позицию сети Петри объекта O_J в заданном количестве $w_{T,P}$ в момент времени, соответствующий моменту выхода маркеров из перехода).

Алгоритмически существование общей позиции обеспечивается совпадением адресов памяти, где хранятся значения маркировок соответствующих позиций Петри-объектов, т.е. общая позиция характеризуется общим доступом различных Петри-объектов к значению маркировки позиции, являющейся общей.

Инициализация событий алгоритмически реализуется с помощью метода DoT() при запуске дополнительных действий, соответствующих выходу маркеров из перехода. Такой способ обеспечивает то, что инициализацию событий можно выполнить не только для нескольких Петри-объектов, но и для множества Петри-объектов с помощью цикла.

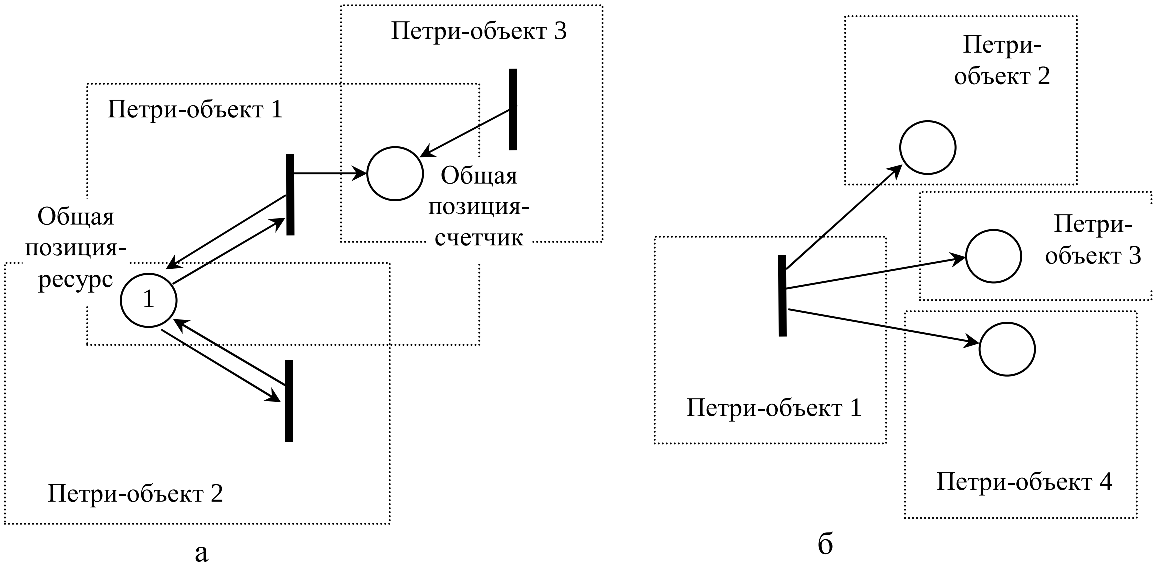

Рис. 3. Формирование связей между объектами:
а) с помощью общих позиций, б) с помощью инициализации событий

Пример сети Петри-объекта «Деканат», который является составной частью имитационной модели системы управления учебным процессом вуза [6], представлен на рис. 4. Эта сеть отличается от обычной сети Петри только тем, что добавление (или удаление) маркеров в общих позициях может происходить также в результате функционирования других Петри-объектов.

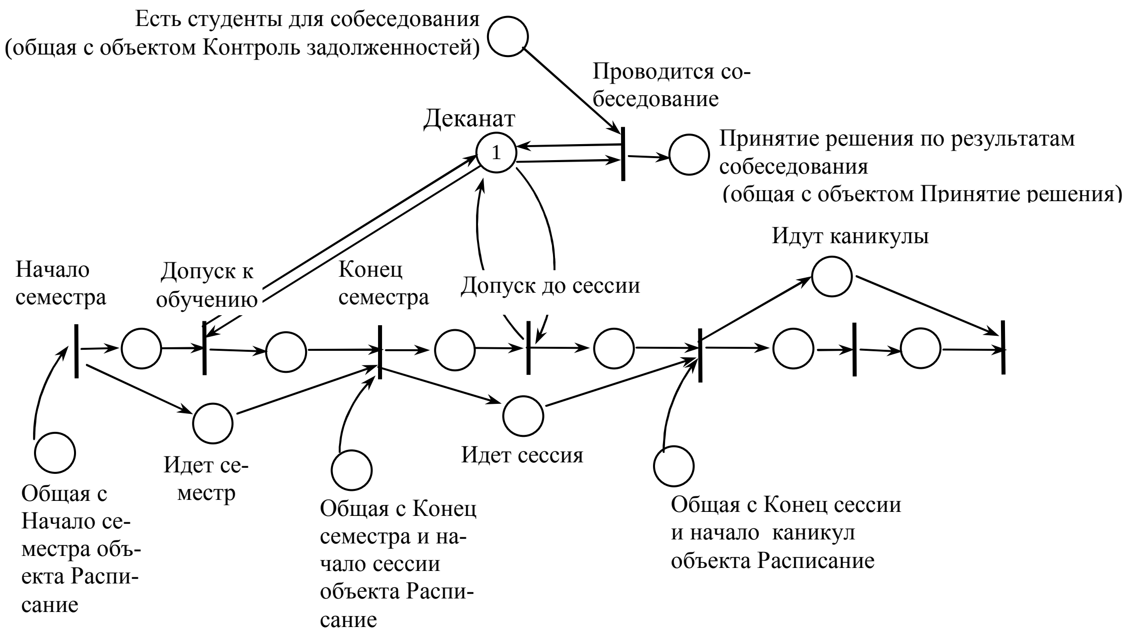

Рис. 4. Сеть Петри-объекта «Деканат»

3. Математическое описание динамики функционирования Петри-объекта

Динамика функционирования Петри-объекта полностью задается его сетью Петри. Поэтому математическое описание динамики функционирования Петри-объекта совпадает с математическим описанием алгоритма имитации стохастической сети Петри с многоканальными и конфликтными переходами, с информационными связями.

Полное формальное описание функционирования стохастической временной сети Петри получим на основе подходов, предложенных для базовой сети Петри [8] и детерминированной временной сети Петри [9]. Будем использовать обозначения множества входных и множества выходных позиций перехода T, предложенные в [8]: ${}^{\bullet}T$ и $T^{\bullet}$ соответственно, множества входных переходов и множества выходных переходов позиции P – ${}^{\bullet}P$ и $P^{\bullet}$ соответственно. Множество входных позиций перехода, связанных с ним информационной связью, обозначим ${}^{\circ}T \subset {}^{\bullet}T$. Аналогично, множество выходных позиций перехода, характеризующихся информационной связью, обозначим $P^{\circ} \subset P^{\bullet}$.

Функционирование сети Петри рассмотрим во времени, продвигающемся от одного события, связанного с выходом маркеров из перехода, до ближайшего следующего. Такой способ продвижения времени широко используется при построении алгоритмов имитации сложных систем [10]. Имеем последовательность моментов времени, соответствующих событиям, $t_1, t_2 .... t_n, ...$, причем в течение времени $t_{n-1} < t < t_{n-1}$ в сети Петри не происходит никаких событий.

Состояние временной сети Петри, как это указывается в работе [9], в каждый момент времени t описывается состоянием ее позиций $\mathbf{M}(t)$ и состоянием ее переходов $\mathbf{E}(t)$: $\mathbf{S}(t) = (\mathbf{M}(t), \mathbf{E}(t))$. Состояние позиций однозначно определяется маркировкой сети Петри в момент времени t: $\mathbf{M}(t) = \{ M_P(t) \mid M_P(t) \in Z_+, P \in \mathbf{P} \}$, где Z_+ – множество целых неотрицательных чисел. Состояние переходов определяется множеством $\mathbf{E}(t) = \{ E_T(t) \mid T \in \mathbf{T} \}$, где состояние каждого перехода $E_T(t)$ определяется множеством моментов выхода из переходов маркеров, которые на момент времени t находятся в переходе:

$$E_T(t) = \{ \ [E_T(t)]_q \mid [E_T(t)]_q \in \Re_+, q \in \mathrm{N} \ \}, \qquad (4)$$

где q – номер канала перехода, $q = 1,2 ... |E_T(t)|$, $|E_T(t)|$ – количество активных каналов в момент времени t.

Во временной сети Петри маркеры, при выполнении условия запуска, входят в один из свободных (не активных) каналов перехода, и в течение времени, равного временной задержке этого перехода R_T, канал находится в состоянии «активен». По истечении времени R_T происходит выход маркеров из перехода. Изменение маркировки в результате выхода маркеров из перехода приводит к тому, что становятся, возможно, выполненными условия запуска для некоторых переходов сети Петри. В каждый момент времени, соответствующий событию, происходит выход маркеров из переходов, для которых наступил момент выхода, и вход маркеров в переходы, для которых выполнено условие запуска. Таким образом, для временной сети Петри традиционное понятие запуска перехода, объединяющего в себе вход и выход маркеров из перехода, не пригодно. Следует различать вход маркеров в переходы сети Петри и выход маркеров из переходов сети Петри. В связи с этим будем также называть условие запуска перехода условием входа маркеров в переходы сети Петри.

Математическое описание преобразований состояния сети Петри D^+ и D^-, происходящих при выходе маркеров из переходов и входе маркеров в переходы соответственно, получим на основе формализации алгоритма имитации стохастической временной сети Петри с многоканальными и конфликтными переходами, информационными связями. Алгоритм имитации такой сети Петри рассмотрен в [7].

Преобразование состояния временной сети Петри, связанное с выходом маркеров из переходов, $D^{+}:\mathbf{E}(t_{n-1})\times\mathbf{M}(t_{n-1})\to\mathbf{E}(t_n)\times\mathbf{M}(t_n)$ или $\mathbf{S}(t_n)=D^{+}(\mathbf{S}(t_{n-1}))$, описывается следующими уравнениями:

$$\forall T\in\mathbf{T}\,|\,Y(T,t_n)=1\;\; E_T^{+}(t_n)=\begin{cases}\{\infty\}\leftarrow|s_T(t_{n-1})|=|E_T(t_{n-1})|,\\ E_T(t_{n-1})\setminus\{[E_T(t_{n-1})]_q\,|\,q\in s_T(t_{n-1})\}\leftarrow|s_T(t_{n-1})|\neq|E_T(t_{n-1})|,\end{cases}\tag{5}$$

$$\forall P\in\mathbf{P}\;\; M_P^{+}(t_n)=M_P(t_{n-1})+\sum_{T\in{}^{\bullet}P}Y(T,t_n)\cdot W_{T,P}\,|\,s_T(t_{n-1})\,|,\tag{6}$$

где $W_{T,P}$ – значение кратности дуги (T,P), $Y(T,t_n)$ – предикат, определяющий, совпадает ли ближайший момент выхода маркеров из перехода, равный $\tau_T(t)=\min\limits_q[E_T(t)]_q$, с моментом времени t_n, $s_T(t)=\{q\in\mathrm{N}\,|\,[E_T(t)]_q=\tau_T(t)\}$ – множество каналов перехода, соответствующих ближайшему моменту выхода маркеров из перехода.

Преобразование состояния временной сети Петри, связанное с входом маркеров в переходы, $D^{-}:\mathbf{E}(t_n)\times\mathbf{M}(t_n)\to\mathbf{E}(t_n)\times\mathbf{M}(t_n)$ или $D^{-}(\mathbf{S}(t_n))$, описывается следующими уравнениями:

$$\forall T\,|\,X(T,t_n)=1\;\; E_T(t_n)=\begin{cases}\{t_n+R_T\}\leftarrow\tau_T=\infty,\\ E_T^{+}(t_n)\cup\{t_n+R_T\}\leftarrow\tau_T<\infty,\end{cases}\tag{7}$$

$$\forall P\in\mathbf{P}\;\; M_P(t_n)=M_P^{+}(t_n)-\sum_{T\in P^{\bullet}\setminus P^{\circ}}W_{P,T}\cdot X(T,t_n),\tag{8}$$

где $X(T,t_n)$ – предикат, определяющий, выбран ли переход T для входа маркеров из множества конфликтных переходов в момент времени t_n.

Поскольку переходы сети Петри многоканальные, то возможен m-кратный вход маркеров в переходы сети Петри. Причем m определяется достижением такого состояния сети Петри, при котором ни для одного из ее переходов не выполнено условие входа маркеров в переход:

$$m:\left(D^{-}\right)^m(\mathbf{S}(t_n)):\;\bigvee_{\mathrm{T}}Z(T,t_n)=0,\tag{9}$$

где $Z(T,t_n)$ – предикат, определяющий выполнение условия для входа маркеров в переход T в момент времени t_n.

Полное формальное описание функционирования стохастической временной сети Петри имеет вид

$$\begin{cases}t_n=\min\limits_T\tau_T(t_{n-1}),\,t_n\geq t_{n-1},\\ \mathrm{S}(t_0)=\left(D^{-}\right)^m(\mathrm{S}(t_0)),\\ \mathrm{S}(t_n)=\left(D^{-}\right)^m\left(D^{+}(\mathrm{S}(t_{n-1})\right),\\ n=1,2,...\end{cases}\tag{10}$$

Система уравнений (10) в отличие от известных уравнений детерминированной временной сети Петри [9] содержит уравнение для определения следующего момента времени, описание преобразований D^{+} и D^{-}, а также неявное ограничение (9) на минимально возможное количество входов маркеров в переходы.

4. Математическое описание динамики функционирования Петри-объектной модели

<u>*Утверждение 1.*</u> Петри-объектная модель описывается стохастической временной сетью Петри, являющейся объединением сетей Петри-объектов, из которых она состоит.

Существование общей позиции $P \in \mathbf{P}_N \bigcap \mathbf{P}_J$ Петри-объектов O_N и O_J означает, что

$$\forall t_n \;\; \underset{P \in \mathbf{P}_N}{M_P(t_n)} = \underset{P \in \mathbf{P}_J}{M_P(t_n)} . \tag{11}$$

А существование связи Петри-объекта O_N, инициализирующей события Петри-объекта O_J ($O_N \neq O_J$), означает, что

$$\exists T \in \mathbf{T}_N, \exists P \in \mathbf{P}_J \mid w_{T,P} > 0, \quad M_P^+(t_n) = M_P(t_{n-1}) + Y(T, t_n) \cdot w_{T,P} \mid s_T(t_{n-1}) \mid . \tag{12}$$

Уравнения (12) дополняют уравнения (6) преобразования D^+, а, значит, инициализация событий переходом объекта O_N означает лишь добавление к множеству выходных позиций перехода T этого объекта еще одной позиции, принадлежащей объекту O_J:

$$w_{T,P} > 0 \Leftrightarrow \left(\exists T \in \mathbf{T}_N, \exists P \in \mathbf{P}_J : P \in T^{\bullet} \right). \tag{13}$$

Поставим в соответствие всякой передаче маркеров из перехода одного объекта в позицию другого дугу $(T, P) : T \in \mathbf{T}_N, P \in \mathbf{P}_J, w_{T,P} > 0$ и обозначим множество всех таких дуг объекта O_N $\mathbf{U}_N = \left\{ (T,P) \mid T \in \mathbf{T}_N, P \in \mathbf{P}_J, w_{T,P} > 0 \right\}$, а соответствующие этим дугам значения кратностей – множеством $\mathbf{w}_N = \left\{ (T,P) \mid T \in \mathbf{T}_N, P \in \mathbf{P}_J, w_{T,P} > 0 \right\}$. Дополним множество дуг Петри-объекта множеством дуг, вдоль которых происходит передача маркеров в другие Петри-объекты:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_N = \mathbf{A}_N \bigcup \mathbf{U}_N , \; \widetilde{\mathbf{W}}_N = \mathbf{W}_N \bigcup \mathbf{w}_N . \tag{14}$$

Тогда множество выходных позиций перехода Петри-объекта, инициализирующего событие в другом Петри-объекте, дополняется соответствующей позицией этого Петри-объекта:

$$T^{\bullet} = \left\{ P \in \mathbf{P}_j \mid \exists (T,P) \in \widetilde{\mathbf{A}}_j \right\}. \tag{15}$$

Обозначим множество выходных позиций всех переходов Петри-объекта $\mathbf{T}_N^{\bullet} = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_N} T^{\bullet} = \left\{ P \in \mathbf{P} \mid \exists T \in \mathbf{T} : \exists (T,P) \in \widetilde{\mathbf{A}}_N \right\}$. В связи с (13)–(15) перейдем от рассмотрения сетей исходных Петри-объектов $N = (\mathbf{P}_N, \mathbf{T}_N, \mathbf{A}_N, \mathbf{W}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$ к рассмотрению сетей $\widetilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \widetilde{\mathbf{A}}_N, \widetilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$, определенных на том же множестве переходов $\mathbf{T}_N$, что и сети исходных Петри-объектов.

Тогда сеть Петри модели системы, составленной из Петри-объектов, имеет вид

$$ModelNet = \bigcup_{\widetilde{N}} \widetilde{N} , \tag{16}$$

где объединение сетей Петри понимается в смысле объединения множеств их позиций, переходов, дуг, кратностей, значений для решения конфликта, информационных дуг, значений временных задержек в переходах и дуг, вдоль которых происходит инициализация событий:

$\bigcup_{\widetilde{N}} \widetilde{N}$:

$$\mathbf{P} = \bigcup_N \mathbf{T}_N^{\bullet}, \; \mathbf{T} = \bigcup_N \mathbf{T}_N, \; (\bigcap_N \mathbf{T}_N = \varnothing), \; \widetilde{\mathbf{A}} = \bigcup_N \widetilde{\mathbf{A}}_N, \; \widetilde{\mathbf{W}} = \bigcup_N \widetilde{\mathbf{W}}_N, \; \mathbf{K} = \bigcup_N \mathbf{K}_N, \; \mathbf{I} = \bigcup_N \mathbf{I}_N, \mathbf{R} = \bigcup_N \mathbf{R}_N . \tag{17}$$

Таким образом, Петри-объектная модель описывается стохастической временной сетью Петри (16), являющейся объединением сетей Петри-объектов, из которых она состоит. ■

Состояние Петри-объектной модели полностью описывается состоянием сетей Петри-объектов, из которых она состоит, поскольку и позиции, и переходы принадлежат только Петри-объектам модели. Введем вектор маркировки позиций $P \in \mathbf{T}_N^{\bullet}$ $\tilde{\mathbf{M}}_N(t_n) = \left\{ \underset{P \in \mathbf{T}_N^{\bullet}}{M_P(t_n)} \right\}$. Тогда множество $\tilde{\mathbf{S}}_N(t) = \left(\tilde{\mathbf{M}}_N(t), \mathbf{E}_N(t)\right)$ описывает состояние Петри-объекта. Поскольку $\mathbf{T} = \bigcup_N \mathbf{T}_N$ и $\bigcap_N \mathbf{T}_N = \varnothing$, то множество $\mathbf{E}(t) = \{\mathbf{E}_N(t)\}$ описывает состояние всех переходов Петри-объектной модели и $\forall N, \forall T \in \mathbf{T}_N$, $E_T(t) = (E_N)_T(t)$ $\forall t$. Маркировку Петри-объектной модели $\mathbf{M}(t)$, которая описывает состояние позиций $\mathbf{P} = \bigcup_N \mathbf{T}_N^{\bullet} = \bigcup_N \mathbf{P}_N$, сформируем так, чтобы $\forall N, \forall P \in \mathbf{P}_N$ $M_P(t) = (M_N)_P(t)$ $\forall t$. Тогда множество $\mathbf{S}(t) = (\mathbf{M}(t), \mathbf{E}(t))$ описывает состояние Петри-объектной модели.

Функционирование Петри-объектной модели, заданной сетью Петри (16), описывается уравнениями вида (10). Рассмотрим уравнение, отвечающее за продвижение времени. Учитывая, что $\mathbf{T} = \bigcup_N \mathbf{T}_N$, $\bigcap_N \mathbf{T}_N = \varnothing$, получим

$$t_n = \min_T \tau_T = \min_N \left(\min_{T \in \mathbf{T}_N} \tau_T \right) = \min_N \tau_N, \tag{18}$$

где $\tau_N = \min_{T \in \mathbf{T}_N} \tau_T$ обозначает момент ближайшего события Петри-объекта.

Из (18) следует, что момент ближайшего события Петри-объектной модели определяется наименьшим значением моментов ближайших событий Петри-объектов, из которых она состоит:

$$t_n = \min_N \tau_N. \tag{19}$$

Так как $\mathbf{T} = \bigcup_N \mathbf{T}_N$, $\bigcap_N \mathbf{T}_N = \varnothing$, то преобразование, соответствующее выходу маркеров из переходов сети Петри-объектной модели, эквивалентно преобразованию, соответствующему выходу из переходов всех сетей Петри-объектов, для которых момент выхода совпадает с текущим моментом времени. При выходе маркеров из переходов сети Петри-объекта происходит выход как в позиции, принадлежащей тому же объекту, что и переход, так и в позиции, принадлежащей другим Петри-объектам. Поэтому преобразование, соответствующее выходу маркеров из переходов Петри-объекта, эквивалентно преобразованию $D^+ : \tilde{\mathbf{M}}_N(t_{n-1}) \times \mathbf{E}(t_{n-1}) \to \tilde{\mathbf{M}}_N(t_n) \times \mathbf{E}(t_n)$ сетей Петри $\tilde{N}$. Имеет место следующее утверждение.

<u>*Утверждение 2.*</u> Преобразование D^+ сети Петри-объектной модели $\bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$ эквивалентно преобразованию D^+ сетей Петри-объектов $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$:

$$D^+(\mathbf{S}(t_{n-1})) = \begin{pmatrix} D^+(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1})) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где преобразование D^+ определяется уравнениями (5), (6).

Из уравнений (5), (6), примененных к сети Петри-объектной модели, следуют уравнения:

$$\forall T \in \mathbf{T} \mid Y(T,t_n)=1 \;\; E_T^+(t_n)=\begin{cases}\{\infty\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| = |E_T(t_{n-1})| \\ E_T(t_{n-1}) \setminus \{[E_T(t_{n-1})]_q \mid q \in s_T(t_{n-1})\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| \neq |E_T(t_{n-1})|,\end{cases} \tag{21}$$

$$\forall P \in \mathbf{P} \;\; M_P^+(t_n) = M_P(t_{n-1}) + \sum_{T \in {}^\bullet P} Y(T,t_n) \cdot \tilde{W}_{T,P} \mid s_T(t_{n-1}) \mid. \tag{22}$$

Из этих же уравнений, примененных к сети $\tilde{N}$ Петри-объекта, следуют уравнения:

$$\forall T \in \mathbf{T}_N \mid Y(T,t_n)=1 \;\; E_T^+(t_n)=\begin{cases}\{\infty\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| = |E_T(t_{n-1})|, \\ E_T(t_{n-1}) \setminus \{[E_T(t_{n-1})]_q \mid q \in s_T(t_{n-1})\} \leftarrow |s_T(t_{n-1})| \neq |E_T(t_{n-1})|,\end{cases} \tag{23}$$

$$\forall P \in \mathbf{T}_N^\bullet \;\; M_P^+(t_n) = M_P(t_{n-1}) + \sum_{T \in {}^\bullet P \cap \mathbf{T}_N} Y(T,t_n) \cdot \tilde{W}_{T,P} \mid s_T(t_{n-1}) \mid, \tag{24}$$

где ${}^\bullet P \cap \mathbf{T}_N$ представляет множество входных переходов позиции P, принадлежащих Петри-объекту.

Уравнения (23), записанные для всех сетей $\tilde{N}$ Петри-объекта, совпадают с уравнениями (21). Уравнения (22) преобразуем так, чтобы отделить входные переходы позиции, принадлежащие различным Петри-объектам:

$$\forall P \in \mathbf{P} \;\; M_P^+(t_n) = M_P(t_{n-1}) + \sum_{\tilde{N}} \sum_{T \in {}^\bullet P \cap \mathbf{T}_N} Y(T,t_n) \cdot \tilde{W}_{T,P} \mid s_T(t_{n-1}) \mid. \tag{25}$$

Уравнения (25) представляют результат выхода маркеров из переходов различных Петри-объектов. Рассматривая в (25) только выход маркеров из переходов одного Петри-объекта, получим уравнения, совпадающие с уравнениями (24). Утверждение доказано. ■

Следствие 1. Состояние Петри-объектной модели, являющееся результатом выхода маркеров из переходов сети Петри-объектной модели, описывается состоянием ее Петри-объектов.

Действительно, из утверждения 2 следует

$$\mathbf{S}^+(t_n) = D^+(\mathbf{S}(t_{n-1})) = \begin{pmatrix} D^+(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1})) \\ \ldots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1})) \\ \ldots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1{}^+(t_n) \\ \ldots \\ \tilde{\mathbf{S}}_N{}^+(t_n) \\ \ldots \\ \tilde{\mathbf{S}}_L{}^+(t_n) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Преобразование, соответствующее входу маркеров в переходы Петри-объектной модели, эквивалентно преобразованию, соответствующему входу маркеров в переходы его Петри-объектов. Поскольку позиции $P \in \mathbf{T}_N^\bullet \setminus \mathbf{P}_N$ являются только выходными позициями переходов $T \in \mathbf{T}_N$, то при добавлении их в Петри-объект множество входных позиций переходов $T \in \mathbf{T}_N$ не изменяется, т.е. ${}^\bullet\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N$. Отсюда преобразование $D^- : \mathbf{M}_N(t_n) \times \mathbf{E}(t_n) \to \mathbf{M}_N(t_n) \times \mathbf{E}(t_n)$ Петри-объекта $N = (\mathbf{P}_N, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$ совпадает с преобразованием $D^- : \tilde{\mathbf{M}}_N(t_n) \times \mathbf{E}(t_n) \to \tilde{\mathbf{M}}_N(t_n) \times \mathbf{E}(t_n)$ Петри-объекта $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^\bullet, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$.

Утверждение 3. Преобразование D^- сети Петри-объектной модели эквивалентно преобразованию D^- сетей Петри-объектов $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$, для которых, в случае существования общих позиций Петри-объектов, решен конфликт:

$$D^-(\mathbf{S}^+(t_n)) = \begin{pmatrix} D^-(\tilde{\mathbf{S}}_1^{\,+}(t_n)) \\ \dots \\ D^-(\tilde{\mathbf{S}}_N^{\,+}(t_n)) \\ \dots \\ D^-(\tilde{\mathbf{S}}_L^{\,+}(t_n)) \end{pmatrix}, \qquad (27)$$

где преобразование D^- сети Петри описывается уравнениями вида (7), (8).

Из уравнений (7), (8), примененных к сети Петри-объектной модели, следуют уравнения:

$$\forall T \in \mathbf{T} \mid X(T, t_n) = 1 \;\; E_T(t_n) = \begin{cases} \{t_n + R_T\} \leftarrow \tau_T = \infty \\ E_T^+(t_n) \bigcup \{t_n + R_T\} \leftarrow \tau_T < \infty \end{cases}, \qquad (28)$$

$$\forall P \in \mathbf{P} \;\; M_P(t_n) = M_P^+(t_n) - \sum_{T \in \left(P^{\bullet} \setminus P^{\circ}\right)} W_{P,T} \cdot X(T, t_n). \qquad (29)$$

Из этих же уравнений, примененных к сети $\tilde{N}$ Петри-объекта, следуют уравнения:

$$\forall T \in \mathbf{T}_N \mid X(T, t_n) = 1 \;\; E_T(t_n) = \begin{cases} \{t_n + R_T\} \leftarrow \tau_T = \infty \\ E_T^+(t_n) \bigcup \{t_n + R_T\} \leftarrow \tau_T < \infty \end{cases}, \qquad (30)$$

$$\forall P \in \mathbf{T}_N^{\bullet} \;\; M_P(t_n) = M_P^+(t_n) - \sum_{T \in \left(\left(P^{\bullet} \setminus P^{\circ}\right) \cap \mathbf{T}_N\right)} W_{P,T} \cdot \tilde{X}(T, t_n). \qquad (31)$$

где $\left(P^{\bullet} \setminus P^{\circ}\right) \bigcap \mathbf{T}_N$ представляет множество выходных переходов позиции P, принадлежащих Петри-объекту, $\tilde{X}(T, t_n)$ – предикат, определяющий, выбран ли переход для входа маркеров в результате решения конфликта не только с переходами своего Петри-объекта, но и других Петри-объектов.

Уравнения (30), записанные для всех сетей $\tilde{N}$ Петри-объекта, совпадают с уравнениями (28). В уравнениях (29) множество переходов $\{T : X(T, t_n) = 1\}$ представляет множество неконфликтных переходов Петри-объектной модели. Это множество может быть получено как объединение множеств $\{T \in \mathbf{T}_N : \tilde{X}(T, t_n) = 1\}$, так как эти множества содержат только переходы, не имеющие конфликтов. Имеем $\{T : X(T, t_n) = 1\} = \bigcup_N \{T \in \mathbf{T}_N : \tilde{X}(T, t_n) = 1\}$. Тогда уравнение (29) может быть представлено в виде

$$\forall P \in \mathbf{P} \;\; M_P(t_n) = M_P^+(t_n) - \sum_{\tilde{N}} \sum_{T \in \left(\left(P^{\bullet} \setminus P^{\circ}\right) \cap \mathbf{T}_N\right)} W_{P,T} \cdot \tilde{X}(T, t_n). \qquad (32)$$

Уравнения (32) представляют результат входа маркеров в переходы различных Петри-объектов. Рассматривая в (32) только вход маркеров в переходы одного Петри-объекта, получим уравнения, совпадающие с уравнениями (31). Утверждение доказано. ■

Заметим, что, если среди входных позиций перехода $T \in \mathbf{T}_N$ отсутствуют общие, то значение предиката $\tilde{X}(T, t_n)$ совпадает со значением предиката $X(T, t_n)$. Алгоритмически решение конфликта Петри-объектов состоит в последовательном выполнении преобразований $D^{-}(\mathbf{S}_N(t_n))$ Петри-объектов, выбираемых в соответствии с указанными приоритетами Петри-объектов или равновероятно.

Следствие 2. Состояние Петри-объектной модели, являющееся результатом входа маркеров в переходы сети Петри-объектной модели, описывается состоянием ее Петри-объектов.

Действительно, из утверждения 3 следует

$$\mathbf{S}(t_n) = D^{-}\left(\mathbf{S}^{+}(t_n)\right) = \begin{pmatrix} D^{-}(\tilde{\mathbf{S}}_1^{+}(t_n)) \\ \dots \\ D^{-}(\tilde{\mathbf{S}}_N^{+}(t_n)) \\ \dots \\ D^{-}(\tilde{\mathbf{S}}_L^{+}(t_n))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1(t_n) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{S}}_N(t_n) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{S}}_L(t_n) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Следствие 3. Состояние Петри-объектной модели в каждый момент времени описывается состоянием ее Петри-объектов.

Исходя из доказанных утверждений и их следствий, а также из уравнений состояний сети Петри (10), получим уравнения состояний Петри-объектной модели:

$$\mathbf{S}(t_n) = \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\mathbf{S}(t_{n-1}))\right) = \left(D^{-}\right)^m \begin{pmatrix} D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1}))\right) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Имеем следующие уравнения состояний Петри-объектной модели, являющиеся полным формальным ее описанием:

$$t_n = \min_{N} \tau_{\mathrm{N}}, t_n \ge t_{n-1}, \tag{35}$$

$$\mathbf{S}(t_n) = \begin{pmatrix} \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^{-}\right)^m \left(D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1}))\right) \end{pmatrix}, \ \forall \tilde{\mathbf{S}}_N(t_n) : \bigvee_{T \in \mathbf{T}_{\mathrm{N}}} Z(T, t_n) = 0, \tag{36}$$

где m – количество преобразований D^{-}, осуществляемых до достижения состояния Петри-объекта, при котором ни один из его переходов не запускается.

С алгоритмической точки зрения разбиение на Петри-объекты позволяет значительно сократить количество элементарных операций, необходимых для осуществления преобразования сети Петри. Преобразование $D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))$ следует фактически производить только, если $\tau_N = t_n$, так как в противном случае значения предикатов $X(T, t_n) = 0$ $\forall T \in \mathbf{T}_N$ и выполнение преобразования $D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))$ не приведет к изменению состояния Петри-объекта. Преобразования $\left(D^{-}\right)^m$, осуществляемые для каждого Петри-объекта, потребуют фактического выполнения m_J -кратного $\left(m_J \le m\right)$ входа маркеров в переходы до достижения состояния, при котором ни один из переходов Петри-объекта не запускается. Так как $m_J < m$ для большинства Петри-объектов и еще для большего количества Петри-объектов $m_J = 0$ (так как для них время выхода маркеров не совпадает с текущим моментом времени, и не изменилась их маркировка в текущий момент времени), то фактическое количество входов маркеров в переходы отдельных Петри-объектов значительно меньше количества m входов маркеров в переходы Петри-модели.

5. Матричные уравнения состояний Петри-объектной модели

На основе уравнений (10) составим уравнения, описывающие изменение маркировки $M_P(t_n) - M_P(t_{n-1})$ в каждый момент времени t_n, $n = 1,2,\ldots$. Просуммируем эти уравнения и получим уравнение, описывающее изменение маркировки $M_P(t_n) - M_P(t_0)$. Таким способом выводятся матричные уравнения стохастической временной сети Петри.

Матричные уравнения Петри-объектов $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$ имеют вид

$$\boldsymbol{\mu}_N(t_n) = \boldsymbol{\mu}_N(t_0) + \mathbf{a}_N \cdot \boldsymbol{\gamma}_N(t_n), \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\eta}_N(t_n) = -\mathbf{v}_N(t_n) + \mathbf{v}_N(t_0) + \boldsymbol{\gamma}_N(t_n), \tag{38}$$

где $\boldsymbol{\mu}_N(t) = \tilde{\mathbf{M}}(t) + \mathbf{a}_N^{+} \cdot \mathbf{v}_N(t)$ – вектор расширенной маркировки Петри-объекта, $\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_N^{+} - \mathbf{a}_N^{-}$ – матрица инцидентности, $\mathbf{a}_N^{-}$ – матрица входов, $\mathbf{a}_N^{+}$ – матрица входов, $\mathbf{v}_N(t)$ – вектор количества активных каналов переходов Петри-объекта, $\boldsymbol{\gamma}_N(t_n)$ – вектор количества входов в переходы Петри-объекта за период времени $[t_0, t]$, $\boldsymbol{\eta}_N(t_n)$ – вектор количества выхода из переходов Петри-объекта за период времени $[t_0, t]$.

Введем матричные переменные, описывающие состояние Петри-объектной модели $(\mathbf{P}, \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{W}}, \mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathbf{R})$:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \|\mu_P(t)\| : \ \forall P \in \mathbf{P}_N \ \ [\boldsymbol{\mu}(t)]_P = [\boldsymbol{\mu}_N(t)]_P,$$
$$\mathbf{v}(t) = \|v_T(t)\| : \ \forall T \in \mathbf{T}_N \ \ [\mathbf{v}(t)]_T = [\mathbf{v}_N(t)]_T,$$
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \|\gamma_T(t)\| : \ \forall T \in \mathbf{T}_N \ \ [\boldsymbol{\gamma}(t)]_T = [\boldsymbol{\gamma}_N(t)]_T,$$
$$\boldsymbol{\eta}(t) = \|\eta_T(t)\| : \ \forall T \in \mathbf{T}_N \ \ [\boldsymbol{\eta}(t)]_T = [\boldsymbol{\eta}_N(t)]_T,$$
$$\mathbf{a}^{-} = \|a^{-}_{P,T}\| : \ \forall P \in \mathbf{P}_N \ \forall T \in \mathbf{T}_N \ \ [\mathbf{a}^{-}]_{P,T} = [\mathbf{a}^{-}_N]_{P,T},$$
$$\mathbf{a}^{+} = \|a^{+}_{P,T}\| : \ \forall P \in \mathbf{P}_N \ \forall T \in \mathbf{T}_N \ \ [\mathbf{a}^{+}]_{P,T} = [\mathbf{a}^{+}_N]_{P,T}.$$

Поскольку $\forall T \in \mathbf{T} \ \ \exists! \, N\!: \, T \in \mathbf{T}_N$, то конструирование векторов состояний переходов $\mathbf{v}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ Петри-модели представляет простое собирание компонентов векторов в один вектор. Что касается формирования переменных $\boldsymbol{\mu}(t)$, $\mathbf{a}^{-}$, $\mathbf{a}^{+}$, то это, скорее, слияние, чем собирание, поскольку общие позиции Петри-объектов присутствуют в переменных Петри-объектной модели только единожды.

С учетом введенных переменных матричные уравнения, описывающие состояние Петри-объектной модели, имеют вид, аналогичный матричным уравнениям стохастической временной сети Петри:

$$\boldsymbol{\mu}(t_n) = \boldsymbol{\mu}(t_0) + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n), \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_n) = -\mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}(t_n). \tag{40}$$

Матричные уравнения вида (37), (38) и (39), (40) могут использоваться для аналитического исследования свойств Петри-объектов и Петри-объектной модели соответственно. Уравнения (37)–(40) являются фундаментальными уравнениями Петри-объектной модели.

6. Выводы

Таким образом, в результате научного исследования разработаны основные теоретические положения Петри-объектного моделирования систем, получены уравнения состояний Петри-объектной модели в обычном и матричном видах.

Одним из преимуществ использования Петри-объектной модели является то, что функционирование Петри-объектной модели может быть разбито на функционирование ее Петри-объектов, что уменьшает затраты труда на алгоритмическую реализацию и аналитическое исследование модели системы.

Основное предназначение Петри-объектного моделирования – разработка и исследование имитационных моделей больших систем, таких, как система управления транспортным движением, система управления учебным процессом вуза и др. Моделирование системы с помощью Петри-объектов позволяет исследователю сосредоточиться на составлении сетей Петри элементов системы. При этом сеть Петри-объекта отображает поведенческие свойства элемента системы. Отладка Петри-объекта может быть выполнена до объединения в систему и не сложна, если Петри-объект достаточно простой. Только после отладки Петри-объектов, представляющих элементы системы, выполняется конструирование модели системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakos C. Object Oriented Modeling with Object Petri Nets / C. Lakos // Concurrent object-oriented programming and Petri nets: advances in Petri nets. – Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singappore, Tokyo: Springer, 2001. – P. 1 – 37.

2. Lakos C. LOOPN++: a new language for object-oriented Perti nets / C. Lakos, C. Keen // Technical Report R94-4, Networking Research Group. – Australia: Univesity of Tasmania, 1994. – April.

3. Xu H. Timed Hierarchical object-oriented Petri net / H. Xu // Petri Net, Theory and Applications, Book edited by: Vedran Kordic. – Vienna, Austria: I-Tech Education and Publishing, 2008. – P. 253 – 280.

4. Analysis Software with an Object-Oriented Petri Net Model / H. Motameni, A. Movaghar, B. Shirazi [et al.] // World Applied Sciences Journal. – 2008. – N 3 (4). – P. 565 – 576.

5. Hong J.E. High-level Petri net for incremental specification of object-oriented system requirements / J.E. Hong, D.H. Bae // Institution of Engineering and Technology. IEEE Proceedings – Software. – 2001. – Vol. 148, N 1. – P. 11 – 18.

6. Стеценко І.В. Імітаційне моделювання системи управління навчальним процесом ВНЗ з використанням об’єктно-орієнтованого підходу / І.В. Стеценко // Математичні машини і системи. – 2011. – № 2. – С. 162 – 170.

7. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. / Стеценко І.В.; М-во освіти и науки України, Черк. держ. технол. ун-т. – Черкаси: ЧДТУ, 2010. – 399 с.

8. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications / T. Murata // Proc. of IEEE. – 1989. – Vol. 77, N 4. – P. 541 – 580.

9. Зайцев Д.А. Инварианты временных сетей Петри / Д.А. Зайцев // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 2. – С. 92 – 106.

10. Кельтон В. Имитационное моделирование. Классика CS / В. Кельтон, А. Лоу. – [3-е изд.]. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.

Стаття надійшла до редакції 23.06.2011