

Диффузное рассеяние излучения плотноупакованным слоем сферических частиц

В. П. Тишковец

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина
E-mail: tishkovets@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 5 февраля 2007 г.

Получено векторное уравнение для описания диффузного рассеяния излучения случайной плотноупакованной средой одинаковых сферических частиц. Среда предполагается в виде статистически однородного плоскопараллельного слоя, освещенного плоской наклонно падающей электромагнитной волной. При усреднении по ансамблю соотношений для элементов матрицы отраженного излучения применяется квазикристаллическое приближение. В полученном уравнении полностью учитываются неоднородности волн вблизи рассеивателей. В предельном случае разреженных сред уравнение превращается в классическое векторное уравнение переноса излучения.

1. Введение

Явление рассеяния и поглощения электромагнитных волн широко используется во многих областях науки и техники для дистанционного изучения различных объектов и контроля качества материалов. Интерпретация радиолокационных, оптических и других данных дистанционного изучения объектов требует достаточно надежной теории рассеяния волн различными средами. Особый интерес здесь представляют теоретические модели рассеяния электромагнитных волн дискретными средами с размерами рассеивателей порядка длины волны, поскольку в этом случае характеристики рассеянного излучения наиболее чувствительны к изменению длины волны. Теоретическое рассмотрение рассеяния излучения такими средами с плотной упаковкой рассеивателей представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Сложность задачи обусловлена необходимостью учета целого ряда эффектов, которые не встреча-

ются в разреженных средах. В частности, наличие корреляции между частицами усложняет усреднение по ансамблю характеристик рассеяния [1, 2]. В разреженных средах расстояния между частицами значительно превышают длину волны излучения и размеры частиц. Поэтому все рассеиватели среды находятся в дальних зонах друг друга. Это означает, что волна, приходящая к какому-то рассеивателю среды от любого другого, является сферической и из-за больших расстояний между частицами может рассматриваться как однородная плоская волна [3-5]. В результате при описании многократного рассеяния средой можно оперировать такими понятиями хорошо разработанной теории однократного рассеяния [4, 6], как матрица рассеяния, сечения экстинкции, рассеяния и поглощения. В плотноупакованных средах волна, идущая от одного рассеивателя к ближайшему соседнему, является неоднородной [7, 8]. Кроме того, если при описании рассеяния излучения разреженными

средами можно ограничиться лишь суммой только лестничных и циклических диаграмм в диаграммном представлении уравнения Бете–Солпитера [4, 9], то для плотных сред необходимо принимать во внимание суммы других диаграмм, например, соответствующих интерференции волн, рассеянных соседними рассеивателями, или волн с разными кратностями рассеяния [2, 10]. Все это значительно усложняет теоретическое рассмотрение рассеяния излучения плотными средами. Чтобы преодолеть эти сложности, в ряде работ [2, 11, 12] для описания рассеяния излучения такими средами предлагается использовать классическое векторное уравнение переноса, адаптировав в нем на случай плотных сред коэффициент ослабления излучения и характеристики рассеяния так называемым элементарным объемом. Однако, как показывает вывод уравнения переноса из уравнений Максвелла, это уравнение справедливо для случая, когда рассеиватели среды находятся в дальних зонах друг друга, т. е. для разреженных сред [3-5]. Поэтому такой подход может не давать надежных результатов. Иной подход, предусматривающий нахождение уравнений для сумм всех тех диаграмм, которые дают заметный вклад в рассеянное излучение, предлагается в работе [10]. Он не эффективен для сред с малыми размерами частиц, поскольку необходимо принимать во внимание большое число разнообразных типов диаграмм. А для сред с размерами рассеивателей порядка длины волны и более заметный вклад в рассеянное излучение дают лишь некоторые типы диаграмм. В частности, один из основных вкладов соответствует сумме лестничных диаграмм, характеризующей некогерентную (диффузную) часть рассеянного излучения. В случае разреженной среды эта сумма описывается классическим уравнением переноса излучения [3-5]. В работе [10] получено уравнение для суммы этих диаграмм для плотноупакованной среды одинаковых сферических рассеивателей. При выводе уравнения предполага-

лось, что среда представляет собой полубесконечный слой, а падающее излучение распространяется нормально к поверхности среды. Примеры численного решения этого уравнения для среды рассеивателей с размерами, сравнимыми с длиной волны излучения, показывают, что неоднородности поля вблизи рассеивателей оказывают значительное влияние на элементы матрицы отражения излучения даже при умеренных плотностях упаковки рассеивателей. Роль неоднородностей поля в формировании рассеянного излучения в настоящее время не изучена. Поэтому развитие теоретических методов описания рассеяния электромагнитных волн плотноупакованными средами является важным и актуальным. Целью настоящей работы является обобщение уравнения, полученного в [10], на случай слоя среды конечной толщины и наклонного падения излучения. Как и в работе [10], предполагается, что среда статистически однородная и изотропная и состоит из одинаковых сферических рассеивателей.

2. Основные соотношения теории рассеяния электромагнитных волн системами рассеивателей

В основу вывода уравнения переноса положим теорию рассеяния излучения системами сферических частиц (см., например, [4]). Далее будут использованы обозначения, приведенные в работах [10, 13].

Системы координат, необходимые для вывода уравнения переноса, показаны на рис. 1. Рассмотрим рассеяние излучения слоем среды геометрической толщины Z_0 , верхняя граница которого совпадает с плоскостью x_0y_0 системы координат $(x_0y_0z_0)$ с осью z_0 , направленной вглубь среды. Это направление задается единичным вектором \mathbf{n}_0 . Обозначим систему координат символом $\hat{\mathbf{n}}_0$. Координаты j -й частицы определены радиус-вектором \mathbf{R}_j ($j = 1, \dots, \tilde{N}$, \tilde{N} – число частиц в слое, $\tilde{N} \gg 1$). Падающая плоская волна задана в системе коор-

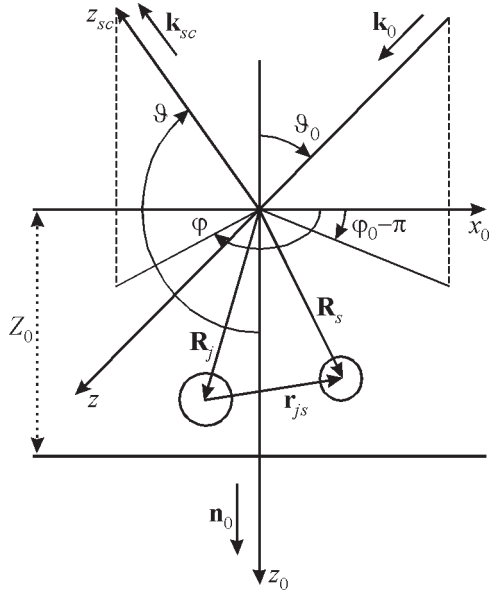


Рис. 1. Геометрия рассеяния излучения слоем среды

динат $\hat{\mathbf{k}}_0$ с осью z , направленной вдоль волнового вектора \mathbf{k}_0 ($k_0 = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны). Рассеянное излучение описывается в системе координат $\hat{\mathbf{k}}_{sc}$ с осью z_{sc} , направленной вдоль волнового вектора \mathbf{k}_{sc} ($k_{sc} = k_0$). Поворот от системы координат $\hat{\mathbf{n}}_0$ к системе $\hat{\mathbf{k}}_0$ задан углами Эйлера φ_0 , ϑ_0 , γ_0 , от системы $\hat{\mathbf{n}}_0$ к системе $\hat{\mathbf{k}}_{sc}$ – углами φ , ϑ , γ .

Удобным базисом для описания рассеяния электромагнитных волн является базис круговой поляризации (так называемое СР представление), в котором падающую плоскую поляризованную по кругу волну можно записать в виде [4, 14]:

$$\mathbf{E}_n^{(0)} = E_n^{(0)} \mathbf{e}_n(\hat{\mathbf{k}}_0) \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad (1)$$

где $n = \pm 1$, $E_n^{(0)}$ – амплитуда волны, $\mathbf{e}_n(\hat{\mathbf{k}}_0)$ – ковариантный циклический орт [15] в системе координат $\hat{\mathbf{k}}_0$. (Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен.) При $n = 1$ направление вращения вектора напряженности волны (1) соответствует правому винту, если смотреть вдоль волнового вектора \mathbf{k}_0 , при $n = -1$ – левому винту.

Поле, рассеянное средой, запишем в виде

$$\mathbf{E} = \sum_j \mathbf{E}^{(j)}, \quad (2)$$

где $\mathbf{E}^{(j)}$ – поле, рассеянное частицей j . Амплитудная матрица рассеяния излучения средой T_{pn} ($p, n = \pm 1$) может быть определена как [4]

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_{-1} \end{pmatrix} = \frac{\exp(ik_0 r)}{-ik_0 r} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{1-1} \\ T_{-11} & T_{-1-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(0)} \\ E_{-1}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь r – расстояние от начала системы координат $\hat{\mathbf{n}}_0$ до точки наблюдения.

Матрица (3) связывает компоненты векторов падающей и рассеянной волны, заданных в разных системах координат. При наклонном падении излучения на слой среды состояние поляризации падающего излучения удобно определять в плоскости, образованной векторами \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_0 , а рассеянного – в плоскости, образованной векторами \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_{sc} [4]. Далее предполагается, что матрица (3) связывает компоненты векторов, заданные в этих плоскостях.

В соответствии с представлением (2) элементы амплитудной матрицы рассеяния имеют вид:

$$T_{pn} = \sum_j t_{pn}^{(j)},$$

где $t_{pn}^{(j)}$ – амплитудная матрица рассеяния j -й частицей [4].

Матрица рассеяния, преобразующая параметры Стокса падающей волны в параметры Стокса рассеянной волны, определяется с помощью соотношений [4, 10-13]:

$$S_{p\eta\mu\nu} = \left\langle \sum_j t_{pn}^{(j)} t_{\mu\nu}^{*(j)} \right\rangle + \left\langle \sum_{j,s \neq j} t_{pn}^{(j)} t_{\mu\nu}^{*(s)} \right\rangle, \quad (4)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, $\mu, \nu = \pm 1$. Первое слагаемое справа в (4) соответствует некогерентной (диффузной) составляющей и интерференционной составляющей, возникающей в результате интерференции волн, распространяющихся в среде по некоторым петлеобразным траекториям [5]. Второе слагаемое в (4) соответствует интерференции волн, в том числе и той, которая проявляется в виде явления когерентного усиления обратного рассеяния [5, 9, 13]. В настоящей работе рассматривается только некогерентная составляющая.

Чтобы найти $t_{pn}^{(j)}$ воспользуемся теорией рассеяния излучения системами сферических частиц (см., например, [4]). Тогда поле $\mathbf{E}^{(j)}$ можно записать в виде [10, 13]:

$$\mathbf{E}^{(j)} = \frac{\exp(ik_0 r_j)}{-ik_0 r_j} \times \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \sum_{p=\pm 1} \frac{2L+1}{2} A_{LM}^{(jpn)} D_{Mp}^{*L}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_{sc}) \mathbf{e}_p(\hat{\mathbf{k}}_{sc}). \quad (5)$$

Здесь r_j – расстояние от частицы j до точки наблюдения; $\mathbf{e}_p(\hat{\mathbf{k}}_{sc})$ – циклический орт [15] в системе координат $\hat{\mathbf{k}}_{sc}$ ($p = \pm 1$); $D_{Mp}^L(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_{sc}) = D_{Mp}^L(\varphi, \vartheta, \gamma)$ – функция Вигнера [15], описывающая поворот от системы координат $\hat{\mathbf{n}}_0$ к системе $\hat{\mathbf{k}}_{sc}$. Предполагается, что направления рассеяния одинаковы для всех частиц.

Коэффициенты $A_{LM}^{(jpn)}$ определяются из системы уравнений [10, 13]:

$$A_{LM}^{(jpn)} = a_L^{(pn)} \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{R}_j) D_{Mn}^L(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_0) + \sum_q a_L^{(pq)} \sum_{s \neq j} \sum_{l,m} A_{lm}^{(sqn)} H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}). \quad (6)$$

Здесь $q = \pm 1$, $a_L^{(pn)} = a_L + pnb_L$, a_L, b_L – коэффициенты Ми [4]. При L порядка и более параметра $\tilde{x}_0 = k_0 \tilde{a}$, где \tilde{a} – радиус частицы, эти коэффициенты быстро стремятся

к нулю. Это определяет порядок системы уравнений (6) и максимальные значения индексов в (5). Символами $H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js})$ обозначены коэффициенты теорем сложения векторных гармоник Гельмгольца [16, 17]:

$$H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) = \frac{2l+1}{2} (-1)^m \times \sum_{l_1, m_1} i^{-l_1} h_{l_1}(k_0 r_{js}) D_{m_1 0}^{l_1}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) C_{LMl-m}^{l_1 m_1} C_{Lq l-q}^{l_1 0}, \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{js}$ – система координат с осью z_{js} вдоль радиус-вектора частицы s в системе координат частицы j (причем оси системы координат, связанной с центром частицы j , направлены параллельно осям системы координат $\hat{\mathbf{n}}_0$), $h_{l_1}(k_0 r_{js})$ – сферическая функция Ханкеля, символами C с индексами обозначены коэффициенты Клебша–Гордана [15]. Коэффициенты Клебша–Гордана отличны от нуля, если выполняются условия: $m_1 = M - m$ и $|L - l| \leq l_1 \leq L + l$ [15]. Это свойство коэффициентов определяет пределы изменения индексов в (7) и формулах, приведенных ниже. Следует отметить, что функция Вигнера $D_{m_1 0}^{l_1}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js})$ в (7) зависит только от двух углов Эйлера, определяющих направление вектора \mathbf{r}_{js} в системе координат $\hat{\mathbf{n}}_0$. Третий угол Эйлера, характеризующий поворот системы координат $\hat{\mathbf{r}}_{js}$ вокруг оси z_{js} , произвольный.

Коэффициенты (7) описывают в системе уравнений (6) все особенности поля между частицами. Если расстояния между частицами значительно превышают λ и размеры частиц, эти коэффициенты описывают сферическую волну, распространяющуюся от частицы s к частице j [5, 13].

Из соотношения для поля (5) следует выражение для матрицы $t_{pn}^{(j)}$ [5, 10, 13]:

$$t_{pn}^{(j)} = \exp(-i\mathbf{k}_{sc} \mathbf{R}_j + in\gamma_0 - ip\gamma) \times \sum_{L,M} \frac{2L+1}{2} A_{LM}^{(jpn)} D_{Mp}^{*L}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_{sc}). \quad (8)$$

3. Уравнение переноса излучения

Приведенные формулы позволяют найти уравнение для части первого слагаемого справа в (4), которая соответствует некогерентному (диффузному) рассеянию. Метод получения такого уравнения для полубесконечной среды в случае нормального падения излучения на границу среды изложен в работе [10]. Он несущественно отличается от метода для разреженных сред (см., например, работы [3-5] и ссылки в них) и заключается в следующем. Подставим выражение (8) в формулу (4). При этом получим выражение, содержащее произведение коэффициентов $A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j\mu\nu)}$. Чтобы найти систему уравнений для этого произведения, которая соответствовала бы некогерентной части рассеянного излучения, поступим следующим образом. Решение системы (6) может быть найдено методом итераций. Полученный при этом ряд соответствует разложению решения системы уравнений (6) в ряд по кратностям рассеяния для волны с начальной поляризацией n и конечной поляризацией p . Запишем такой же ряд, но для волны с начальной поляризацией ν и конечной поляризацией μ . Перемножим первый ряд с комплексно сопряженным вторым и оставим в ряду произведений только такие слагаемые, которые соответствуют распространению обеих волн по одним и тем же траекториям. Такие схемы рассеяния соответствуют диффузной составляющей рассеянного излучения, а рассмотрение их в случае разреженной среды приводит к уравнению, которое после усреднения по ансамблю дает уравнение переноса излучения [2-5, 10, 14]. Процедура усреднения по ансамблю становится значительно проще, если среду охарактеризовать эффективным показателем преломления. Комплексный эффективный показатель преломления среды m_{ef} может быть вычислен, например, в квазикристаллическом приближении [18, 2]. Введение эффективного показателя преломления позволяет описать изменение амплитуды и фазы волны

в среде, заменив волновой вектор \mathbf{k}_0 в среде на вектор $m_{ef}\mathbf{k}_0$. Тогда волновой вектор \mathbf{k}_0 в (6) должен быть заменен на вектор

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0 + k_0 \mathbf{n}_0 \frac{m_{ef} - 1}{\cos \vartheta_0}, \quad (9)$$

а вектор \mathbf{k}_{sc} в (8) – на вектор

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_{sc} + k_0 \mathbf{n}_0 \frac{m_{ef} - 1}{\cos \vartheta}. \quad (10)$$

Введение векторов (9) и (10) позволяет описать изменения амплитуды и фазы волны на пути от точки входа волны в среду до частицы j и от частицы j до точки выхода волны из среды [13]. (Предполагается, что рассматривается область обратного рассеяния излучения слоем.) Тогда произведение элементов матрицы $t_{pn}^{(j)} t_{\mu\nu}^{*(j)}$ принимает вид [10, 13]:

$$\begin{aligned} t_{pn}^{(j)} t_{\mu\nu}^{*(j)} &= \exp(i\mathbf{R}_j(\mathbf{K}^* - \mathbf{K})) \times \\ &\times \exp[-i\gamma_0(\nu - n) + i\gamma(\mu - p)] \sum_{L,M,l,m} \frac{(2L+1)(2l+1)}{4} \times \\ &\times A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j\mu\nu)} D_{Mp}^{*L}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_{sc}) D_{m\mu}^l(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_{sc}), \quad (11) \end{aligned}$$

а система уравнений для произведения коэффициентов $A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j\mu\nu)}$ – следующий вид [10, 13]:

$$\begin{aligned} A_{LM}^{(jpn)} A_{L_1 M_1}^{*(j\mu\nu)} &= a_L^{(pn)} a_{L_1}^{*(\mu\nu)} D_{Mn}^L(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_0) D_{M_1 \nu}^{*L_1}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{k}}_0) \times \\ &\times \exp[i\mathbf{R}_j(\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_0^*)] + \sum_{q,q_1} a_L^{(pq)} a_{L_1}^{*(\mu q_1)} \times \\ &\times \sum_{s,l,m,l_1,m_1} A_{lm}^{(sqn)} A_{l_1 m_1}^{*(sq_1 \nu)} H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) H_{L_1 M_1 l_1 m_1}^{*(q_1)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}). \quad (12) \end{aligned}$$

Коэффициенты $H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js})$ описывают распространение волн между рассеивателями.

Чтобы учесть показатель преломления m_{ef} для этих волн, представим функцию Ханкеля в (7) в виде:

$$h_l(k_0x) = \frac{\exp(ik_0x)}{k_0x} \zeta_l(k_0x), \quad (13)$$

где функция $\zeta_l(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\zeta_{l+1}(x) = \frac{(2l+1)}{x} \zeta_l(x) - \zeta_{l-1}(x)$$

с начальными значениями

$$\zeta_0(x) = -i, \quad \zeta_1(x) = -\left(1 + \frac{i}{x}\right).$$

Если расстояния между частицами значительно превышают их размеры, функция $\zeta_l(x) \approx (-i)^{l+1}$ и коэффициенты (7) описывают сферическую волну. При расстояниях между частицами порядка их размеров коэффициенты (7) описывают все особенности волны между рассеивателями. Заменив в (13) в показателе экспоненты k_0 на $m_{ef}k_0$, учтем изменение амплитуды и фазы волны при ее распространении между рассеивателями.

Дальнейшие преобразования заключаются в усреднении по ансамблю матрицы (11). Такое усреднение можно сделать в рамках квазикристаллического приближения [18, 2], суть которого заключается в следующем. Функцию распределения частиц $p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ – плотность вероятности обнаружить \tilde{N} частиц в точках $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ – можно записать следующим образом [2, 18]:

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = p(\mathbf{r}_i) p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_i, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_i) = p(\mathbf{r}_i) p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_i, \dots, \mathbf{r}'_j, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_j). \quad (14)$$

Здесь $p(\mathbf{r}_i)$ – плотность вероятности обнаружить частицу i в точке \mathbf{r}_i , $p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}'_i, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_i)$ –

условная вероятность обнаружить остальные частицы в соответствующих точках (штрих при \mathbf{r}_i означает, что переменная \mathbf{r}_i отсутствует), $p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i)$ – условная вероятность найти частицу j в точке \mathbf{r}_j при фиксированной частице i . При больших \tilde{N} и однородной и изотропной системе частиц

$$p(\mathbf{r}_j | \mathbf{r}_i) \approx \eta g(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) / \tilde{N} \quad (15)$$

(см., например, [2, 18]), где η – концентрация частиц, $g(r)$ – парная корреляционная функция [19, 20].

Разложение в (14) может быть продолжено для двух фиксированных частиц, для трех фиксированных частиц и т. д. Тогда среднее по ансамблю от (11) будет выражаться через произведения коэффициентов $A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j'p'v')}$, усредненные по ансамблю при фиксированной частице j . В свою очередь, средние значения этих произведений при фиксированной частице j будут определяться с помощью (12) через их средние значения при фиксированных частицах j и s и т. д. Таким образом, для определения среднего по ансамблю от (11) получится иерархия уравнений [2]. В квазикристаллическом приближении предполагается, что среднее при двух фиксированных частицах приближенно равно среднему при фиксированной одной частице [2, 18]. Это предположение ограничивает иерархию уравнений только одним уравнением и позволяет относительно просто вычислить среднее значение произведения коэффициентов $A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j'p'v')}$ (12), а вместе с ним и среднее значение матрицы отражения (11). Следует подчеркнуть, что это приближение аналогично суммированию лестничных диаграмм, описанному в [4] для разреженной среды, но учитывает парные корреляции [2, 21]. Иными словами, как и в теории Тверского для разреженных сред (см., например, [1, 4]), в этом приближении также не учитываются схемы рассеяния, в которых волна рассеивается дважды или большее число раз на одном и том же рассеивателе.

Умножая (11) и (12) на (14) и интегрируя по объему среды, получим выражение для матрицы отражения, усредненное по ансамблю. Обозначим

$$B_{LL_1M_2}^{(j)(pn)(\mu\nu)} = \sum_{M,m} \frac{(2L+1)(2l+1)}{4} \times \\ \times A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j\mu\nu)} C_{LMl-m}^{L_2M_2} (-1)^{m+\mu} \exp(i\gamma_0(n-v)) \quad (16)$$

и

$$B_{LL_1M_2}^{(z)(pn)(\mu\nu)} = \langle B_{LL_1M_2}^{(j)(pn)(\mu\nu)} \rangle.$$

Тогда, после разложения в ряд Клебша–Гордана [15] произведения двух функций Вигнера и несложных преобразований получим из (11)

$$S_{pn\mu\nu}^{(nc)} = \frac{\eta}{k_0} \sum_{L,L_1,L_2,M} D_{MN_0}^{*L_2}(\varphi, \theta, 0) C_{LpL_1-\mu}^{L_2N_0} \times \\ \times \int_0^{k_0 Z_0} B_{L_2MLL_1}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)} \exp\left(\frac{\tau \tilde{z}}{\cos \vartheta}\right) d\tilde{z}. \quad (17)$$

Здесь матрица отражения для некогерентной части рассеянного излучения $S_{pn\mu\nu}^{(nc)}$ нормирована на единицу площади поверхности среды, $N_0 = p - \mu$, $\tau = 2 \operatorname{Im}(m_{ef})$. Матрица (17) может быть применена и для описания рассеянного излучения в направлениях $\vartheta < \pi/2$. Для этого \tilde{z} в (17) необходимо заменить на $\tilde{z} - k_0 Z_0$ [13]. Тогда экспоненциальный множитель будет описывать поглощение излучения на пути от точки \tilde{z} до точки выхода излучения из среды в направлениях $\vartheta < \pi/2$.

Система уравнений для коэффициентов $B_{L_2M_2LL_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)}$ следует из системы (12). Умножая (12) на коэффициенты при $A_{LM}^{(jpn)} A_{lm}^{*(j\mu\nu)}$ в (16), суммируя по индексам M, m и применяя квазикристаллическое приближение, получим систему уравнений для коэффициентов $B_{L_2M_2LL_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)}$. При этом первое слагаемое спра-

ва в (12) после разложения произведения двух функций Вигнера в ряд Клебша–Гордана с учетом свойств унитарности коэффициентов Клебша–Гордана [15] приобретает простой вид. Для вычисления среднего от второго слагаемого справа в (12) сделаем замену:

$$g(r_{js}) H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) H_{L_1M_1l_1m_1}^{*(q_1)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) = \\ = \left[g(r_{js}) H_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) H_{L_1M_1l_1m_1}^{*(q_1)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) - \right. \\ \left. - \tilde{H}_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) \tilde{H}_{L_1M_1l_1m_1}^{*(q_1)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) \right] + \\ + \tilde{H}_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}) \tilde{H}_{L_1M_1l_1m_1}^{*(q_1)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js}).$$

Здесь коэффициенты, обозначенные как $\tilde{H}_{LMlm}^{(q)}(\hat{\mathbf{n}}_0, \hat{\mathbf{r}}_{js})$, отличаются от коэффициентов (7) заменой функций Ханкеля их асимптотическими значениями при $k_0 r_{js} \gg l_1$, т. е. эти коэффициенты соответствуют разреженной среде. Тогда дальнейшие преобразования практически не отличаются от преобразований в работе [10] и приводят к следующей системе уравнений для коэффициентов $B_{L_2MLL_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)}$:

$$B_{L_2MLL_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)} = A_{L_2MLL_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)} + \frac{4\pi\eta}{k_0^3} \times \\ \times \sum_{q,q_1} \frac{(2L+1)(2L_1+1)}{4} a_L^{(pq)} a_{L_1}^{*(\mu q_1)} \sum_{l,l_1,l_2} B_{L_2MLl_1}^{(z)(qn)(q_1\nu)} G_{L_2MLL_1l_1l_2}^{(q,q_1)} + \\ + \frac{2\pi\eta}{k_0^3} \sum_{q,q_1} \chi_{L_2LL_1}^{(pq)(\mu q_1)} \sum_{l,l_1,l_2} C_{lq_1-l_1}^{l_2N} \times \\ \times \int B_{L_2MLl_1}^{(y)(qn)(q_1\nu)} \exp(-\tau x) d_{MN}^{L_2}(\omega) d_{MN}^{l_2}(\omega) \sin\omega d\omega dx. \quad (18)$$

Здесь $y = z - x \cos \omega$, угол ω отсчитывается от направления $-\mathbf{n}_0$. Верхний предел интегрирования по x равен $z/\cos \omega$, если $\omega < \pi/2$, и $(z - Z_0 k_0)/\cos \omega$, если $\omega > \pi/2$; $d_{MN}^L(\omega)$ – функция Вигнера [15]; $N = q - q_1$;

$$A_{L_2 M L L_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)} = \chi_{L_2 L L_1}^{(pn)(\mu\nu)} \exp\left(-\frac{\tau z}{\cos \vartheta_0}\right) D_{M n-v}^{L_2}(\varphi_0, \vartheta_0, 0); \quad (19)$$

$$\chi_{L_2 L L_1}^{(pn)(\mu\nu)} = \frac{(2L+1)(2l+1)}{4} a_L^{(pn)} a_l^{*(\mu\nu)} C_{L n l-v}^{L_2 n-v};$$

$$G_{L_2 M L L_1 l_1 l_2}^{(qq_1)} = (-1)^{M+L_1+l_1+l_2} \sum_{b,c,d} i^{d-b-c} \Pi_{L_2 l_2 b c} C_{L q l-q}^{b0} \times \\ \times C_{L_1 q_1 l_1 - q_1}^{c0} C_{b 0 c 0}^{d0} C_{L_2 M l_2 - M}^{d0} Y_{bcd} \begin{Bmatrix} l_1 & L_1 & c \\ l & L & b \\ l_2 & L_2 & d \end{Bmatrix}; \quad (20)$$

$$\Pi_{bcdf} = \sqrt{(2b+1)(2c+1)(2d+1)(2f+1)};$$

$$Y_{bcd} = \int_{\rho_0}^{\infty} [g(x) \zeta_b(x) \zeta_c^*(x) - i^{c-b}] j_d(i\tau x) \exp(-\tau x) dx. \quad (21)$$

В приведенных выше формулах $\rho_0 = 2k_0 \tilde{a}$, \tilde{a} – радиус частицы среды, $j_l(x)$ – сферическая функция Бесселя, $g(x)$ – парная корреляционная функция (15). Выражение в фигурных скобках в (20) – 9j-символ Вигнера [15].

Уравнение переноса в форме (17) и (18) представляет собой уравнение для слоя среды в базе циркулярной поляризации. Это уравнение можно переписать в виде ряда по азимутальным гармоникам, как это обычно делают для классического уравнения переноса в разреженной среде [22]. Тогда формула (17) принимает вид:

$$S_{p\mu\nu}^{(nc)} = \frac{\eta}{k_0} \sum_{L, L_1, L_2, M} \exp(iM(\varphi - \varphi_0)) d_{M N_0}^{L_2}(\theta) C_{L p L_1 - \mu}^{L_2 N_0} \times \\ \times \int_0^{k_0 Z_0} B_{L_2 M L L_1}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)} \exp\left(\frac{\tau \tilde{z}}{\cos \vartheta}\right) d\tilde{z}. \quad (22)$$

При этом в системе уравнений (18) изменяется лишь первое слагаемое справа – коэффициенты (19), в которых функцию $D_{M n-v}^{L_2}(\varphi_0, \vartheta_0, 0)$ необходимо заменить на функцию $d_{M n-v}^{L_2}(\vartheta_0)$.

Полученное уравнение переноса является более общим по сравнению с уравнением из работы [10] для нормального падения излучения на полубесконечный слой среды. Отметим еще одно отличие приведенного выше уравнения переноса от уравнения из работы [10]. Оно касается вида коэффициентов (21). В работе [10] предполагалось, что среда состоит из рассеивателей с размерами порядка и более длины волны, а поглощение излучения в среде не слишком велико ($\text{Im}(m_{ef}) \ll 1$). В этих предположениях коэффициенты (21) получены в виде [10]:

$$Y_{bcd} = \int_{\rho_0}^{\infty} (g(x) - 1) \zeta_b(x) \zeta_c^*(x) j_d(i\tau x) \exp(-\tau x) dx. \quad (23)$$

Коэффициенты (23) обращаются в ноль при $g(x) = 1$, т. е. для разреженных сред. В этом случае предполагается, что рассеиватели находятся в дальних зонах друг друга. При выводе формулы (21) никаких предположений не делалось. В частности, коэффициенты (21) справедливы и для малых по сравнению с длиной волны рассеивателей. Для таких рассеивателей коэффициенты (21) обращаются в ноль при $g(x) = 1$ и при дополнительном условии, что рассеиватели находятся в дальних зонах друг друга. (Для дальней зоны $\zeta_l(x) \approx (-i)^{l+1}$ и, как видно из (21), в отсутствие корреляции в положении рассеивателей эти коэффициенты обращаются в ноль.)

Формулы (22), (18) переходят в формулы из работы [10] при $Z_0 \rightarrow \infty$ и $\vartheta_0 = 0$. В этом случае

$$A_{L_2 M L L_1}^{(z)(pn)(\mu\nu)} = \chi_{L_2 L L_1}^{(pn)(\mu\nu)} \exp(-\tau z) \delta_{M n-v} \quad (24)$$

и, как видно, в системе уравнений (18) индекс $M = n - v$. Параметры Стокса падающего излучения определены в плоскости векторов \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_0 , а параметры Стокса рассеянного излучения – в плоскости векторов \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_{sc} (рис. 1). Поэтому выражение (22) зависит от разности азимутов направлений распространения падающего и рассеянного излучения. При падении излучения нормально к границе слоя среды параметры Стокса удобно определять в плоскости векторов \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_{sc} . В этом случае формула (22) не зависит от азимутов.

Зависимость уравнения переноса излучения от плотности упаковки частиц определяется коэффициентом G в системе уравнений (18). В этот коэффициент корреляционная функция $g(x)$ входит посредством формулы (21). Если корреляция в среде отсутствует и рассеиватели находятся в дальних зонах друг друга, коэффициент G обращается в ноль. В этом случае полученные формулы значительно упрощаются. Суммирование по L, L_1 в формуле (22) приводит к следующим выражениям [10]:

$$S_{pn\mu\nu}^{(nc)} = \frac{\eta}{k_0} \sum_{L,M} \exp(iM(\varphi - \varphi_0)) d_{MN_0}^L(\theta) \times \int_0^{k_0 Z_0} \alpha_{LM}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)} \exp\left(\frac{\tau \tilde{z}}{\cos \vartheta}\right) d\tilde{z}, \quad (25)$$

где коэффициенты $\alpha_{LM}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)}$ определяются из системы уравнений

$$\alpha_{LM}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)} = \chi_L^{(pn)(\mu\nu)} d_{Mn-v}^L(\vartheta_0) \exp\left(-\frac{\tau \tilde{z}}{\cos \vartheta_0}\right) + \frac{2\pi\eta}{k_0^3} \sum_{q,q_1} \chi_L^{(pq)(\mu q_1)} \times \sum_I \int \alpha_{IM}^{(y)(qn)(q_1\nu)} \exp(-\tau x) d_{MN}^L(\omega) d_{MN}^I(\omega) \sin\omega d\omega dx. \quad (26)$$

Здесь введено обозначение

$$\chi_{L_1}^{(pn)(\mu\nu)} = \sum_{L,l} \frac{(2L+1)(2l+1)}{4} a_L^{(pn)} a_l^{*(\mu\nu)} C_{Ll1-n-v}^{L_1} C_{Ll1-\mu}^{L_1}.$$

Формулы (25), (26) представляют собой векторное уравнение переноса для слоя разреженной среды в базисе круговой поляризации. Вывод этого уравнения из уравнений Максвелла дан в работах [4, 5, 13]. Для скалярных волн уравнение (26) приведено в работе [22] как функция источников в среде. Примеры численного решения уравнения (22) в случае полубесконечной среды и при нормальном падении излучения на границу среды можно найти в [10]. Там же приведен и алгоритм решения системы уравнений (22) для этого случая.

Оценим влияние неоднородностей волн вблизи частиц на интенсивность отраженного излучения оптически тонким слоем среды при нормальном падении излучения на границу слоя. В этом случае коэффициенты (19) записываются в виде (24). Поскольку слой оптически тонкий, в системе уравнений (18) можно приближенно положить $B_{L_2 M L_1}^{(\tilde{z})(pn)(\mu\nu)} \simeq \exp(-\tau \tilde{z}) \tilde{B}_{L_2 M L_1}^{(pn)(\mu\nu)}$, а интеграл в последнем слагаемом справа в (18) записать в виде:

$$\int B_{L_2 M L_1}^{(y)(qn)(q_1\nu)} \exp(-\tau x) d_{MN}^{L_2}(\omega) d_{MN}^{L_1}(\omega) \sin\omega d\omega dx \simeq \frac{\exp(-\tau \tilde{z})}{\tau} \tilde{B}_{L_2 M L_1}^{(pn)(\mu\nu)} d_{MN}^{L_2}(\pi/2) d_{MN}^{L_1}(\pi/2).$$

Введя обозначение для плотности упаковки частиц $\xi = 4\eta\pi\tilde{a}^3/3$, после преобразований получим из (22) и (18):

$$S_{pn\mu\nu}^{(nc)} = \frac{3\xi k_0^2 \cos \vartheta [1 - \exp(-\tau k_0 Z_0 \beta)]}{4\pi\tau \tilde{x}_0^3 (\cos \vartheta - 1)} \times \sum_{L,L_1,L_2} d_{MN_0}^{L_2}(\theta) C_{LpL_1-\mu}^{L_2 N_0} \tilde{B}_{L_2 M L_1}^{(pn)(\mu\nu)}, \quad (27)$$

где $M = n - v$, $N_0 = p - \mu$, $\beta = (\cos \vartheta - 1)/\cos \vartheta$, а коэффициенты $\tilde{B}_{L_2 M L_1}^{(pn)(\mu\nu)}$ находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{L_2MLL_1}^{(pn)(\mu\nu)} &= \chi_{L_2LL_1}^{(pn)(\mu\nu)} \delta_{M,n-\nu} + \\ &+ \frac{3\xi}{\tilde{x}_0^3} \sum_{q,q_1} \frac{(2L+1)(2L_1+1)}{4} a_L^{(pq)} a_{L_1}^{*(\mu q_1)} \times \\ &\times \sum_{l,l_1,l_2} \tilde{B}_{l_2MLl_1}^{(qn)(q_1\nu)} G_{L_2MLL_1ll_1l_2}^{(qq_1)} + \frac{3\xi}{2\pi\tilde{x}_0^3} \sum_{q,q_1} \chi_{L_2LL_1}^{(pq)(\mu q_1)} \times \\ &\times \sum_{l,l_1,l_2} C_{lq_1-l_1}^{l_2N} \tilde{B}_{l_2MLl_1}^{(qn)(q_1\nu)} d_{MN}^{L_2}(\pi/2) d_{MN}^{l_2}(\pi/2). \end{aligned}$$

Здесь $N = q - q_1$.

Интенсивность отраженного излучения характеризуется элементом матрицы отражения $R_{11} = U \sum_{p,n} S_{ppnn}^{(nc)}$, где $U = -\pi / (2k_0^2 \cos \vartheta)$ (см. [4, 10, 13]). Примеры вычисления этого элемента для слоя среды толщиной $k_0 Z_0 = 10$, заполненного частицами с размерами $\tilde{x}_0 = k_0 \tilde{a} = 2$ и показателями преломления $\tilde{m} = 1.5 + i0.0$, приведены на рис. 2. Эффективный показатель преломления

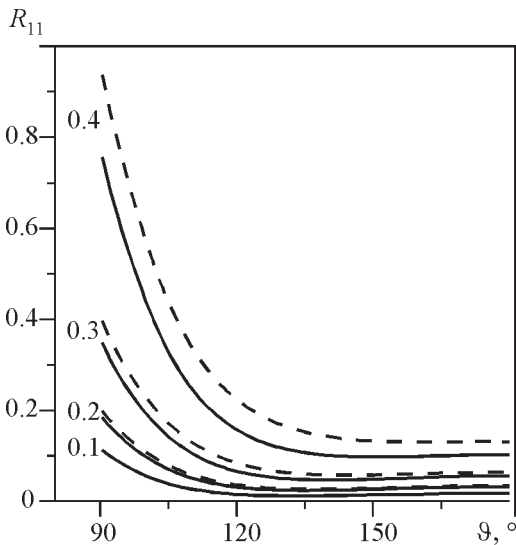


Рис. 2. Зависимость элемента матрицы отражения R_{11} от угла рассеяния при различной плотности упаковки частиц ξ для оптически тонкого слоя среды. Значения ξ указаны у кривых. Параметры частиц: $k_0 \tilde{a} = 2$, $\tilde{m} = 1.5 + i0.0$. Сплошные кривые соответствуют вычислениям с учетом только корреляции между частицами (в приближении однородных волн), пунктирные – с учетом корреляции и неоднородностей волн вблизи частиц

слоя среды вычислен в квазикристаллическом приближении [2]. Значения мнимой части этого показателя преломления для приведенных на рис. 2 плотностей упаковки ξ следующие: $\text{Im}(m_{ef}) = 0.026$ ($\xi = 0.1$), $\text{Im}(m_{ef}) = 0.035$ ($\xi = 0.2$), $\text{Im}(m_{ef}) = 0.033$ ($\xi = 0.3$), $\text{Im}(m_{ef}) = 0.026$ ($\xi = 0.4$). Сплошные кривые на рис. 2 соответствуют вычислениям в приближении однородных волн, т. е. при $\zeta_l(x) = (-i)^{l+1}$ в коэффициентах (21), пунктирные кривые – вычислениям с учетом неоднородностей волн. Увеличение элемента R_{11} с ростом плотности упаковки частиц обусловлено как увеличением ξ (см. формулу (27)), так и усилением вклада многократного рассеяния. Как видно из рис. 2, неоднородности волн вблизи рассеивателей заметно сказываются при плотностях упаковки частиц $\xi \geq 0.3$. Аналогичная оценка для плотности упаковки была получена в работе [10] для полубесконечной среды поглощающих частиц.

4. Заключение

Уравнение для диффузного переноса излучения в слое плотноупакованной среды одинаковых сферических рассеивателей, полученное в настоящей работе, является более общим по сравнению с уравнением из работы [10], последнее соответствует падению излучения на полубесконечный слой среды нормально к границе среды. В усреднении по ансамблю использовалось квазикристаллическое приближение, в котором принимается во внимание двухчастичная корреляция между рассеивателями. В полученном уравнении полностью учитываются неоднородности волн вблизи рассеивателей. Учет этих неоднородностей приводит к значительно более сложному уравнению переноса по сравнению с уравнением для разреженных сред. Уравнение описывает диффузную часть рассеянного средой излучения, соответствующую сумме лестничных диаг-

рамм в диаграммном представлении уравнения Бете–Солпитера. При этом не учитывается интерференция волн, рассеянных ближайшими соседними частицами, и поэтому уравнение применимо для размеров рассеивателей порядка и более длины волны излучения. Не учитывается также интерференция волн, приводящая к эффекту когерентного усиления обратного рассеяния (эффекту слабой локализации) [4, 5, 9, 13]. В дальнейшем предполагается рассмотреть вклад интерференционной части рассеянного излучения в матрицу отражения излучения средой.

Литература

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Том 1 (Пер. с англ.) – М.: Изд. Мир, 1981. – 280 с.
2. Tsang L. and Kong J. A. Scattering of electromagnetic waves. Advanced topics. – New York: Wiley-Interscience, 2001. – 413 p.
3. Borovoi A. G. Multiple scattering of short waves by uncorrelated and correlated scatterers // *Light Scattering Reviews*, ed. A. Kokhanovski. – Chichester: Praxis Publishing Ltd, UK, 2006. – P. 181-248.
4. Mishchenko M. I., Travis L. D., and Lacis A. A. Multiple Scattering of Light by Particles. Radiative Transfer and Coherent Backscattering – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 478 p.
5. Tishkovets V. P. Multiple scattering of light by a layer of discrete random medium: backscattering // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* – 2002. – Vol.72. – P. 123-137.
6. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 660 с.
7. Тишковец В. П. Обратное рассеяние света плотноупакованными системами частиц. // *Оптика и спектроскопия.* – 1998. – Т. 85, №2. – С. 233-238.
8. Тишковец В. П., Литвинов П. В. Оппозиционные эффекты при рассеянии света реголитоподобными средами. // *Астрономический вестник.* – 1999. – Т. 33, №2. – С. 186-192.
9. Varabanenkov Yu. N., Kravtsov Yu. A., Ozrin V. D., and Saichev A. I. Enhanced backscattering in optics. // *Progress in Optics XXIX*, ed. E. Wolf. – Amsterdam: Elsevier, 1991. – Vol. 29. – P.65-197.
10. Tishkovets V. P, and Jockers K. Multiple scattering of light by densely packed random media of spherical particles: Dense media vector radiative transfer equation // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* – 2006. – Vol. 101. – P. 54-72.
11. Tsang L., Chen C.-T., Chang A. T. C., Guo J., and Ding K.-H. Dense media radiative transfer theory on quasi-crystalline approximation with applications to passive microwave remote sensing of snow // *Radio Sci.* – 2000. – Vol. 35. – P. 731-749.
12. Tsang L., Kong J. A., and Shin R. T. Radiative transfer theory for active remote sensing of a layer of nonspherical particles // *Radio Sci.* – 1984. – Vol. 19. – P. 629-642.
13. Tishkovets V. P, and Mishchenko M. I. Coherent backscattering of light by a layer of discrete random medium // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* – 2004. – Vol. 86. – P. 161-180.
14. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. – М.: Мир, 1969. – 607 с.
15. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. – М.: Наука, 1975. – 436 с.
16. Тишковец В. П., Литвинов П. В. Коэффициенты ослабления света хаотически ориентированными кластерами сферических частиц в приближении двукратного рассеяния // *Оптика и спектроскопия* – 1996. – Т. 81. – С. 319-322.
17. Felderhof B. U. and Jones R. B. Addition theorems for spherical wave solutions of the vector Helmholtz equation // *J. Math. Phys.* – 1987. – Vol.28. – P. 836-839.
18. Lax M. Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems // *Phys. Rev.* – 1952. – Vol. 85. – P. 621-629.
19. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. – М.: Наука, 1982. – 357 с.
20. Percus J. K., and Yevick G. J. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates // *Phys. Rev.* – 1958. – Vol.110. – P. 1-13.
21. Brangi V. N., Seliga T. A., Varadan V. K., and Varadan V. V. Bulk propagation characteristics of discrete random media // *Multiple Scattering and Waves in Random Media*, eds. P. L. Chow, W. E. Kohler, G. C. Papanicolaou. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981. – P. 43-75.
22. Яновицкий Э. Г. Рассеяние света в неоднородных атмосферах. – Киев: Наук. думка, 1995. – 399 с.

**Дифузне розсіяння випромінювання
щільноупакованим шаром
сферичних частинок**

В. П. Тишковець

Отримано векторне рівняння для опису дифузного розсіяння випромінювання випадковим щільноупакованим середовищем однакових сферичних частинок. Середовище розглядається у вигляді статистично однорідного плоскопаралельного шару, освітленого плоскою похило падаючою електромагнітною хвилею. В усередненні за ансамблем співвідношень для елементів матриці відбитого випромінювання застосовується квазікристалічне наближення. В отриманому рівнянні цілком враховуються неоднорідності хвиль поблизу розсіювачів. У граничному випадку розріджених середовищ рівняння перетворюється на класичне векторне рівняння переносу випромінювання.

**Radiation Diffuse Scattering
by a Densely Packed Layer
of Spherical Particles**

V. P. Tishkovets

A vector equation for describing the radiation diffuse scattering by a densely packed random medium of identical spherical particles is derived. The medium is supposed to be a statistically homogeneous plane-parallel layer illuminated by an oblique plane electromagnetic wave. The quasi-crystalline approximation is applied in the ensemble averaging of equations for the reflection matrix elements. The inhomogeneity of waves near scatterers are completely taken into account in the obtained equation. In the limiting case of the sparse media, the equation obtained is transformed into a classical vector radiative transfer equation.