

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ПАРАМЕТРАМИ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ

***Анотація.** У представленій роботі пропонується спосіб чисельного диференціювання розв'язку крайової задачі еліптичного типу за параметрами розміщення носіїв джерел фізичного поля. З точки зору практичного застосування, можливість отримання зазначених часткових похідних дозволяє використати методи умовної оптимізації першого порядку до задач оптимального синтезу систем з розподіленими параметрами. Викладена ідея диференціювання може бути просто адаптована і до інших крайових задач, які виникають при оптимізації технічних систем з дискретними джерелами фізичних полів.*

***Ключові слова:** оптимізація технічних систем з розподіленими параметрами, розміщення дискретних джерел фізичного поля, диференціювання за параметрами розміщення.*

***Аннотация.** В представленной работе предлагается способ численного дифференцирования решения краевой задачи эллиптического типа по параметрам размещения источников физического поля. С точки зрения практического использования, возможность получения этих частных производных позволяет использовать методы условной оптимизации первого порядка для задач оптимального синтеза систем с распределенными параметрами. Изложенная идея дифференцирования может быть просто адаптирована для решения других краевых задач, которые возникают при оптимизации технических систем с дискретными источниками физических полей.*

***Ключевые слова:** оптимизация технических систем с распределенными параметрами, размещение дискретных источников физического поля, дифференцирование по параметрам размещения.*

***Abstract.** The paper is devoted to numerical differentiation of elliptic type boundary value problem with respect to parameters of placement of physical field sources. The practical importance of this result is in a possibility of using gradient method of conditional optimization for optimal synthesis of distributed systems. The proposed idea can be easily adapted to other boundary value problems appearing in optimization of technical systems with physical field sources.*

***Keywords:** distributed technical systems optimization, placement of discrete physical field sources, differentiation with respect to placement parameters.*

1. Вступ

Оптимізація технічних систем з розподіленими параметрами займає важливе місце в сучасній теорії синтезу складних систем. Процеси в таких системах мають різну фізичну природу і, як правило, описуються крайовими задачами для диференціальних рівнянь з частковими похідними.

З точки зору практики, існує широкий діапазон різних прикладних задач оптимізації технічних систем з розподіленими параметрами, які можна об'єднати спільною математичною постановкою в межах оптимізації технічних систем, що містять дискретні джерела фізичного поля. Дослідження в цьому напрямку підсумовані в монографії [1], де наведено велику бібліографію джерел, які стосуються даної проблематики, побудовано математичну постановку задачі та розроблені підходи до її розв'язання.

Одним із найбільш наочних прикладів задачі оптимізації системи, яка містить дискретні джерела фізичного поля, є задача, що виникає при компоновочному синтезі мікроелектронних пристроїв. Сучасна мікросхемотехніка має справу з мікросхемами, які містять мільйони транзисторів та працюють на гігагерцових частотах. В результаті чого поглинається велика кількість енергії, частина якої перетворюється на теплоту. Як наслідок, отримуємо підвищення температури. Дані термічні ефекти є небажаними і можуть приводити до серйозних порушень у функціонуванні мікросхем. Значні температурні градієнти мо-

жуть зменшити термін використання мікросхеми та в деяких випадках можуть бути причиною значних напружень і навіть її руйнування. На додаток нерівномірний розподіл температури може індукувати логічні помилки в роботі мікросхеми, оскільки і надійність транзисторів, і провідність металів залежать від температури. Зі зростанням впливу температури на надійність мікросхем особливого значення набувають методи проектування архітектури мікросхем, яка пом'якшує температурний вплив. На сьогоднішній момент головними заходами для запобігання температурному впливові є, наприклад, кілька режимів живлення пристрою. Тобто встановлюються контролери, які переводять мікросхеми на низький рівень споживання енергії у випадку діагностування перевищення температури. Хоча це також є важливими стратегіями пом'якшення температурного впливу, слід докладати зусилля для розробки методів, які дозволяють запобігати небажаним термічним ефектам ще на етапі проектування мікросхеми. Одним із перспективних способів боротьби з тепловими проблемами на етапі проектування є розміщення мікросхем на друкованій платі таким чином, щоб забезпечити заданий розподіл температури.

Змістовна постановка задачі має такий вигляд: необхідно знайти таке розміщення джерел фізичного поля (наприклад, теплоти), при якому заданий критерій якості набуває свого екстремального значення. На розміщення джерел накладаються умови взаємного неперетину та невиходу за межі області. Праці, присвячені цим задачам, відрізняються між собою типом крайових задач, виглядом функції цілі, геометричними та фізичними характеристиками джерел тощо.

Оптимізація розміщення джерел із заданими геометричними характеристиками розглядається в роботі Чувашової С.І. [2]. Дану задачу запропоновано розв'язувати за допомогою градієнтних методів нелінійного програмування. В роботі [3] розглядається задача розміщення об'єктів фізичного поля у випадку, коли область та джерела мають форму n -вимірних прямокутників. Для її розв'язання використовується метод Розена. В статті [4] для розв'язання задачі розміщення джерел фізичного поля застосовується метод штрафних функцій. Автори статті [5] розглядають задачу розміщення орієнтованих геометричних об'єктів, які можна розбити на прямокутники. Її логічним продовженням стала праця [6], присвячена проблемі розміщення геометричних об'єктів в області, яка містить зони заборони. Розглядається задача з такими об'єктами та зонами заборони, які можна розбити на прямокутники. До її розв'язання пропонується застосувати метод можливих напрямків. У роботі [7] розроблено P -алгоритм розв'язання мінімаксної задачі дискретного розміщення джерел фізичного поля, побудовані оцінки функції цілі в точці глобального мінімуму. В роботі [8] розроблено комбінований метод розв'язання мінімаксної задачі дискретного розміщення, який базується на P -алгоритмі та методі вектора спаду. Огляд алгоритмів розміщення компонентів друкованих плат з урахуванням терморежимів їх функціонування наводиться в [9]. Серед запропонованих методів: а) матричний синтез (matrix synthesis problem), який зводиться до задачі розбиття заданої мультимножини цілих чисел на трійки, що мають однакову суму; б) алгоритм імітації відпалу (simulated annealing problem); в) підходи, які базуються на розбитті області розміщення на комірки; г) методи, які базуються на мінімізації енергії системи.

З наведених джерел можна зробити висновок, що одним із найбільш перспективних ідей оптимізації технічних систем з розподіленими параметрами виявились підходи, які базуються на градієнтних методах математичного програмування. Причому часткові похідні для обчислення відповідних градієнтів доводиться обчислювати для функцій, які є розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь з частковими похідними. Розв'язок таких крайових задач, в переважній більшості випадків, здійснюється чисельними методами. Наприклад, методом скінченних елементів. Тому в даній роботі запропоновано спосіб диференціювання розв'язку крайової задачі, який отримано методом зважених нев'язок, за параметрами розміщення джерел.

2. Математична постановка задачі і отримані результати

Нехай $A(x, y)$ – фінітна функція в R^2 , носієм якої є довільний φ -об'єкт [10]. Тоді цей φ -об'єкт будемо називати носієм джерела D фізичного поля і позначати $supp D$. Функція $A(x, y)$ в цьому випадку називається інтенсивною джерела D . Розглянемо в двовимірному евклідовому просторі область Ω , яка містить носії джерел фізичного поля $supp D_i$, $i = 1, \dots, m$. Пов'яжемо з кожним носієм джерела власну локальну систему координат $O_i x_i y_i$, $i = 1, \dots, m$, а з областю Ω – глобальну систему координат $O x y$. Можливість повороту локальних систем координат відносно глобальної не припускається. В результаті положення кожного носія в глобальній системі координат визначається положенням точки відліку O_i власної системи координат. Позначимо координати O_i через $z_i = (\xi_i, \eta_i)$,

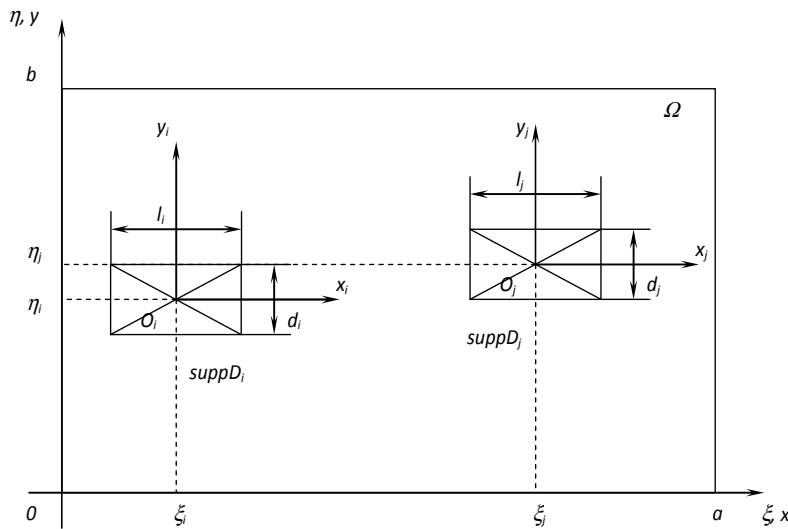


Рис. 1. Область Ω і носії джерел фізичного поля $supp D_i$, $i = 1, 2$

$i = 1, \dots, m$, у глобальній системі координат. Отже, положення усіх носіїв у глобальній системі координат задається вектором $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$. На рис. 1 наведено область Ω та носії фізичного поля у випадку, коли вони є прямокутниками. Як O_i , $i = 1, 2$ обрані перетини діагоналей прямокутників. Осі власних систем координат для зручності обрані паралельними осям глобальної системи координат.

Фізичне поле, що індукується джерелами та навколишнім середовищем, описується такою крайовою задачею:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -f(x, y, Z), \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi, \quad k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = -q, \quad (2)$$

$$f(x, y, Z) = \begin{cases} A_i(x, y, z_i), & \text{if } (x, y) \in supp D_i \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin \bigcup_{i=1}^m supp D_i \end{cases}, \quad (3)$$

де $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ – ділянки границі області Ω , n – нормаль до $\partial\Omega_2$, φ, q – функції, задані на $\partial\Omega_1$ та на $\partial\Omega_2$ відповідно, k – функція, задана в Ω .

Прикладами функцій мети, які залежать від розміщення носіїв джерел фізичного поля, є:

$$F_1(Z) = u(x_0, y_0, Z), \quad (3)$$

$$F_2(Z) = \max_j u(x_j, y_j, Z), \quad j \in \{1, 2, \dots, P\}, \quad (4)$$

$$F_3(Z) = \max_i u(z_i, Z), i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5)$$

$$F_4(Z) = \max_{(x,y)} u(x, y, Z), (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

де $(x_j, y_j), j = 0, 1, 2, \dots, P$ – фіксовані точки області Ω .

Змістовна постановка основної оптимізаційної задачі: необхідно розмістити джерела фізичного поля в області так, щоб задана функція максимуму набула якомога меншого значення при умовах, що носії джерел не перетинаються між собою та не виходять за межі області:

$$\text{supp } D_i \cap \text{supp } D_j = \emptyset, i < j = 1, 2, \dots, m \text{ – умова неперетину носіїв джерел,} \quad (7)$$

$$\bigcup_{i=1}^m \text{supp } D_i \subset \Omega \text{ – умова невиходу джерела за межі області.} \quad (8)$$

Умови (7) – (8) визначають припустиму множину G значень Z . Запишемо задачу оптимізації в такому вигляді:

$$F(Z) \rightarrow \min, Z \in G. \quad (9)$$

Якщо $F(Z)$ має вигляд (4)–(6), то отримана задача оптимізації класифікується як неперервна мінімаксна задача [11]. Використання відповідних методів для відшукування стаціонарних точок функції $F(Z)$ на G вимагає обчислення часткових похідних функції $u(x, y, Z)$ за параметрами розміщення джерел. Факт існування та неперервності перших похідних за параметрами джерел встановлено в [12–14].

Щодо функції мети (3), то вона використовується для тестових прикладів і практичного значення не має. З іншого боку, така задача оптимізації дозволяє скористатися класичними градієнтними методами умовної оптимізації.

В деяких часткових випадках часткові похідні функції $u(x, y, Z)$ за параметрами розміщення обчислюються безпосередньо. Наприклад, коли $u(x, y, Z)$ може бути представлена у вигляді розкладу в тригонометричний ряд. Але для більшості практично важливих крайових задач обчислення $u(x, y, Z)$ здійснюється за допомогою чисельних методів. Зокрема, за допомогою методу скінченних елементів, який де-факто став стандартом для інженерних розрахунків.

З теоретичної точки зору, метод зважених нев'язок представляє розв'язок крайової задачі (1)–(2) у вигляді розкладу за базисними функціями, які можна обрати в залежності від особливостей задачі. Наприклад, в методі скінченних елементів обираються функції, що відмінні від нуля лише в межах невеликих підобластей (скінченних елементів).

При диференціюванні розв'язку крайової задачі $u(x, y, Z)$ за параметрами джерел слід диференціювати саме коефіцієнти розкладу. В результаті часткові похідні також будуть представлені у вигляді розкладу за базисними функціями $N_e(x, y), e = 1, \dots, M$.

Нехай розклад розв'язку крайової задачі за базисними функціями має такий вигляд:

$$\hat{u} = \psi + \sum_{e=1}^M a_e N_e, \quad (10)$$

де ψ та базисні функції обираються таким чином, що $u = \hat{u}$ на $\partial\Omega_1$, тобто $\psi = \varphi$, та $N_e = 0, e = 1, 2, \dots, M$ на $\partial\Omega_2$.

Запишемо рівняння методу зважених нев'язок у вигляді

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right] W_l dx dy + \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \int_{\partial \Omega_2} \left(k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + q \right) \bar{W}_l d\Gamma = 0, \quad (11)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

Використовуючи формулу Гріна, отримаємо

$$-\int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \int_{\partial \Omega_1 + \partial \Omega_2} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} W_l d\Gamma + \int_{\partial \Omega_2} \left[k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + q \right] \bar{W}_l d\Gamma = 0. \quad (12)$$

Обираючи вагові функції таким чином:

$$W_l = 0 \text{ на } \partial \Omega_1, \quad (13)$$

$$\bar{W}_l = -W_l \text{ на } \partial \Omega_2, \quad (14)$$

отримаємо, що інтеграли, які містять похідну по нормалі від \hat{u} , взаємно знищуються і співвідношення набуває вигляду

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \int_{\partial \Omega_2} W_l q d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Якщо підставити в це рівняння розклад u за базисними функціями (10), то приходимо до стандартної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу:

$$Ka = b, \quad (16)$$

де елементи матриці K та правої частини b визначаються таким чином:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad (17)$$

$$b_i = \int_{\Omega} W_i f(x, y, Z) dx dy - \int_{\partial \Omega_2} W_i q d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (18)$$

За Гальоркіним, як вагові функції оберемо базисні функції, тобто $N_i = W_i, 1 \leq i \leq M$. В результаті отримаємо симетричну матрицю K і автоматичне виконання умови (13).

Як видно з формули (18), права частина системи рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу (10) залежить від параметрів розміщення Z . Розв'язуючи систему рівнянь (16), отримаємо коефіцієнти розкладу як функції від параметрів розміщення. Оскільки головною метою дослідження є отримання часткових похідних за параметрами розміщення джерел, то для їх отримання слід продиференціювати за параметрами джерел саме b і розв'язати систему рівнянь (16), підставивши отримані часткові похідні за тим чи іншим параметром як праву частину системи рівнянь (16).

В результаті отримаємо наближення часткової похідної у вигляді розкладу:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_k} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial a(Z)}{\partial \xi_k} N_e. \quad (19)$$

Як видно з (18), залишається запропонувати спосіб диференціювати функцію $f(x, y, Z)$ за параметрами розміщення джерел. Для цього представимо її у вигляді розкладу у подвійний тригонометричний ряд:

$$f(x, y, Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (20)$$

$$d_{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y, Z) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy, \quad (21)$$

де a і b - розміри прямокутника, який містить область Ω .

Тепер для отримання часткових похідних функції $f(x, y, Z)$ слід продиференціювати розклад (20) за потрібним параметром, результат підставити в (18) і розв'язати отриману систему лінійних рівнянь (16).

Тестовий приклад. Розглянемо як тестовий приклад прямокутну область Ω та прямокутні носії джерел фізичного поля (рис. 1), яке описується крайовою задачею виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -f(x, y, Z),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Такий вибір задачі забезпечує можливість порівняти результати, отримані за запропонованим підходом, і відомі результати. Прямокутна форма області і нульові граничні умови дозволяють розв'язок крайової задачі представити у вигляді тригонометричного ряду виду

$$u(x, y, Z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{jk\alpha_{jk}} \sum_{i=1}^m A_i \sin \frac{j\pi\xi_i}{a} \sin \frac{k\pi\eta_i}{b} \sin \frac{j\pi l_i}{2a} \sin \frac{k\pi d_i}{2b} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (22)$$

$$\text{де } \alpha_{jk} = \frac{j^2\pi^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{b^2}.$$

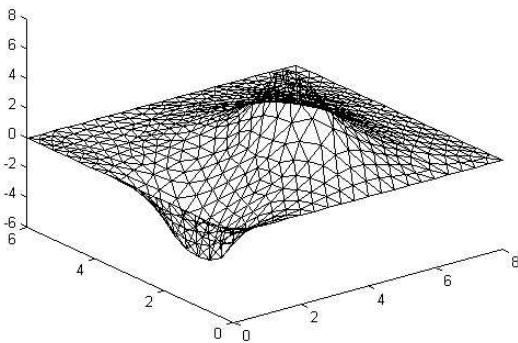


Рис. 2а. Розподіл значень часткової похідної за параметром ξ_1 , отриманий на основі формули (22)

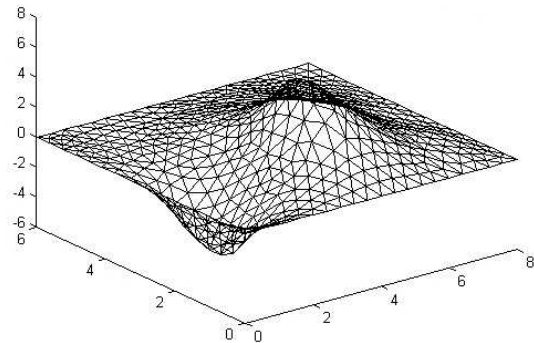


Рис. 2б. Розподіл значень часткової похідної за параметром ξ_1 , отриманий на основі запропонованого підходу

Часткові похідні для такого часткового випадку легко отримати шляхом безпосереднього диференціювання виразу (22) за потрібним параметром розміщення.

Нехай $m = 2$, $a = 8$, $b = 6$, $A_1 = A_2 = 10$, $l_1 = 3$, $l_2 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $k = 1$, $\xi_1 = 2,5$, $\xi_2 = 6,5$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 4,5$. Отриманий за формулою (22) розподіл значень часткової похід-

ної за параметром ξ_1 , наведено на рис. 2а. Розподіл значень часткової похідної ξ_1 , отриманий за запропонованим підходом, наведений на рис. 2б.

3. Висновок

Наукова новизна представленої статті полягає у способі чисельного диференціювання розв'язку крайової задачі еліптичного типу за параметрами розміщення носіїв джерел фізичного поля. З точки зору практичного застосування, можливість отримання зазначених часткових похідних дозволяє використати методи умовної оптимізації першого порядку до задач оптимального синтезу систем з розподіленими параметрами. Викладена ідея диференціювання може бути просто адаптована і до інших крайових задач, які виникають при оптимізації технічних систем з дискретними джерелами фізичних полів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Путятин. – Киев: Наукова думка, 1988. – 192 с.
2. Чувашева С.И. Численные методы решения одного класса оптимизационных задач размещения источников физических полей: дис. ... кандидата физ.-мат. наук: 01.01.07 / Чувашева С.И. – Харьков, 1984. – 107 с.
3. Оптимізація розміщення джерел фізичного поля модифікованим методом Розена / Д.О. Жовновський, Л.В. Рудюк, К.Є. Саваневич [та ін.] // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 2000. – № 13. – С. 188 – 191.
4. Жовновський Д.О. Метод штрафних функцій оптимізації розміщення дискретних джерел фізичного поля / Д.О. Жовновський // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 1998. – № 8. – С. 293 – 298.
5. Яремчук С.І. Оптимізація розміщення об'єктів, які можна розкласти на прямокутники / С.І. Яремчук, Ю.О. Шаповалов // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – № 1. – С. 87 – 90.
6. Яремчук С.І. Оптимізація розміщення об'єктів спеціального виду на області з зонами заборони / С.І. Яремчук, Ю.О. Шаповалов, І.М. Музика // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – (Серія «Технічні науки»). – 2006. – № 4 (39). – С. 258 – 263.
7. Яремчук С.И. Алгоритм решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля / С.И. Яремчук, Р.В. Бурда, С.С. Матущенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 153 – 163.
8. Яремчук С.І. Комбінований метод розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля / С.І. Яремчук, Р.В. Бурда, С.С. Матущенко // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – (Серія «Технічні науки»). – 2009. – № 1. – С. 183 – 189.
9. Temperature-Aware Placement for SOCs / С.С.-Р. Chen, G. Chen, V. Goplen [et al.] // Proc. of the IEEE. – 2006. – N 8 (94). – P. 45 – 62.
10. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – Киев: Наукова думка, 1986. – 268 с.
11. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
12. Стоян Ю.Г. Дифференцируемость поля дискретных источников по параметрам их размещения / Ю.Г. Стоян, С.И. Яремчук, В.Б. Крыжановский // Доповіді НАН України. – 1995. – № 10. – С. 38 – 40.
13. Yaremchuk S. Problem of optimal placement of discrete physical field sources / S. Yaremchuk, V. Kryzhanivskyy // Applied Numerical Mathematics. – 2004. – N 50. – P. 121 – 131.
14. Чувашева С.И. Дифференцируемость решения задачи Коши для уравнения параболического типа по параметрам размещения источников / С.И. Чувашева, В.Б. Крыжановский // Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов. – Киев: Институт кибернетики АН Украины, 1993. – С. 45 – 49.

Стаття надійшла до редакції 21.06.2010