Список використаних джерел:

1. Бочан І.О., Системна трансформація економіки України та шляхи подолання кризових явищ: інституціональний підхід.-Вісник економіки транспорту і промисловості № 29, 2010
2. Веренич О.В.,Подчасова Т.П. Ієрархічні системи управління економічними об'єктами Навчальний посібник, Київський національний торгівельно-економічний університет, 2012 р - 190с
3. Клебанова Т.С. и др. Математические модели трансформационной экономики. – Х: «ИНЖЕК», 2008. – 320с.
4. Світ. Європа. Україна. Трансформація економіки та інтеграція/Ю.В. Гончаров, Ю.О. Петін, О.М. Сальник. – К.: Знання України, 2007
5. Сотула О.В., Перехідні і трансформаційні процеси в економіці України.- Збірник науково-технічних праць
6. Чечетов М., Жадан І. Соціально-економічні аспекти трансформації відносин власності в Україні // Економіка України. – 2004. - № 10. – С. 4-16

УДК 656.13.022 **В.Г. Галушко**

Вероятностные модели определения положительной разности случайных объемов наличия и отправки грузов из терминала

Запропоновані моделі визначення ймовірністних розподілів додатної різниці із двух незалежних випадкових обсягів вантажів, розподілених по різним законам.

Ключові слова: *автомобільні перевезення, випадкові обсяги вантажів, закони розподілу, ймовірністні моделі.*

Предложены модели определения вероятностных распределений положительной разности из двух независимых случайных величин объемов грузов, распределенных по различным законам .
Ключевые слова*: автомобильные перевозки, случайные объемы грузов, законы распределения, вероятностные модели.*

The models of determination of probabilistic divisions of positive difference are offered from two independent casual sizes of volumes of loads, distributed on the different laws of division.
Keywords*: motor-car transportations, casual volumes of loads, laws of division, probabilistic models.*

Актуальность. В решении проблемы оптимального планирования перевозок грузов из грузообразующего пункта (терминала, склада, грузовой автостанции) особое место занимают стохастические модели, среди которых наиболее общими являются модели, базирующиеся на системах массового обслуживания и вероятностных законах распределения. Математические основы теории массового обслуживания описаны в работах Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко [1,2], а использование вероятностных распределений в [3,4,5] .

В основу разработки вероятностных моделей при перевозке грузов автотранспортом из грузообразующего пункта [6.7] положено использование разности из случайных величин наличия объемов и отправки грузов.

Целью статьи является разработка вероятностных моделей определения положительной разности из двух случайных величин, при различных их законах распределения и их практического использования на автотранспорте.

Постановка задачи. Пусть (X,Y) является системой непрерывных случайных величин с плотностью $f(x,y)$, а случайная величина Z равна разности двух случайных величин X -Y, т. е.

$$Z = X - Y. \tag{1}$$

В общем случае плотность распределения случайной величины Z равна [3]

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, x-z))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+z\ x)dx \tag{2}$$

Если случайные величины X *и* Y независимы, то плотность распределения разности будет равна

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(x-z)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y+z)\, f_2(y)dy \tag{3}.$$

В рамках создания методологических основ планирования перевозок грузов на автотранспорте в [6,7] описаны модели распределения случайных величин разности в чистом виде для определения объемов грузов, формируемых в грузообразующем пункте, при различных законах поступления и отправки.

Следует особо отметить, что использование распределения разности случайных величин в чистом виде несколько ограничено из-за возможных завышенных оценок и больший практический интерес представляет величина положительной разности $(\xi\text{-}\eta)_+$.

Описание математических моделей. Пусть ξ — объем груза, а η — грузоподъемность транспорта. Тогда $(\xi\text{-}\eta)_+$— количество груза, на перевозку которого не хватило транспорта.

Будем рассматривать $f_Y(y)$ - плотность (ξ - η) и $g(z)$ - плотность $(\xi - \eta)_+$.

Тогда

$$g(z)= f_Y(y) \quad \text{при} \quad z > 0; \tag{4}$$

$$P\{(\xi-\eta)_+ = 0\} = P\{\xi \le \eta\ ) = 1 - \int_0^{\infty} f_Y(z)dz; \tag{5}$$

$$P\{(\xi-\eta)_+ > 0\} = \int_0^{\infty} f_Y(z)dz. \tag{6}$$

Таким образом, случайная величина нужна только для того, чтобы перейти к $(\xi\text{-}\eta)_+$.

Вариант 1. Пусть заданы независимые случайные величины ξ и η, распределенные по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2.

Тогда при y>0

$$g(y) = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y - x_1)} dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1} e^{-\lambda_1 y};$$

$$P\{(\xi - \eta) = 0\} = 1 - \int_0^{\infty} g(y)dy = 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{8}$$

В частности , при $\lambda_1 = \lambda_2$ $P\{(\xi\text{-}\eta)_+ = 0\} = 1/2$.

Вариант 2. Пусть заданы независимые случайные величины ξ и η, которые распределенные по нормальному закону с параметрами α_1, σ_1^2 и α_2, σ_2^2 .

Тогда случайная величина (ξ-η) будет распределена по нормальному закону с параметрами $\alpha_1 - \alpha_2$ и $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$

Можно записать

$$\xi - \eta = a_1 - a_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\, w,$$

где w— нормальная случайная величина с параметрами 0,1.

$$P\{(\xi - \eta)_+ > 0\} = P\{a_1 - a_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\, w > 0\} =$$

$$P\{w > \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{a_2 - a_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}.dx. \qquad (9)$$

В частности, при $a_1 = a_2$ $P\{(\xi\text{-}\eta)_+ > 0\} = 1/2$.

Рассмотрим более общий подход к определению распределения положительной разности двух случайных величин X и Y.

Пусть выполняются автомобильные перевозки грузов из заданного пункта (терминал, грузовая автостанция, склад, …). Задана случайная величина наличия объемов груза X и грузоподъемность транспорта Y.

Запишем уравнение случайной величины разности Z(остаток груза) при условии, что она должна быть положительной:

$$Z = (X - Y)_+ = \begin{cases} X - Y, & если \quad X \geq Y, \\ 0, & если\ X < Y. \end{cases} \qquad (10)$$

Определим аналитические выражения для распределения случайной величины Z и ее математического ожидания:

$$P(Z > z) = \int\limits_0^{\infty} f_Y(y) P(X > y + z) dy = \int\limits_0^{\infty} f_Y(y)[1 - F_x(y + z)]dy. \qquad (11)$$

Пусть $v = F_Y(y)$, $u = 1\text{-}F_x(y+z)$, тогда $dv = f_y(y)dy$,

$du = -f_x(y+z)\,du,$

$$P(Z>z)=\int_0^{\infty}[1-F_x(y+z)]F_Y(y)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}F_y(y)f_x(y+z)dy=\int_0^{\infty}F_y(y)f_x(y+z)dy. \quad (12)$$

Математическое ожидание

$$M[Z]=\int_0^{\infty}P(Z>z)dz=\int_0^{\infty}[1-F_x(y)]F_Y(y)dy=\int_0^{\infty}[1-(1-F_y(y))][1-F_X(y)]dy=$$

$$=\int_0^{\infty}[1-F_X(y)dy-\int_0^{\infty}(1-F_Y(y)(1-F_X(y))dy=M[X]-M[\min(X,Y)].$$

Таким образом,

$$Z=(X-Y)_+ = X-\min(X,Y). \quad (13)$$

Действительно, если $X<Y$, то $\min(X,Y)=X$, $Z=X-X=0$;
если $X\geq Y$, то $\min(X,Y)=Y$, $Z=X-Y$.

Вариант 3. Пусть случайные величины X и Y распределены по показательным законам

$$f_X(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x},\quad f_Y(x)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 x},\qquad x>0.$$

Известно, что плотность $\min(X,Y)$ равна

$$(\lambda_1+\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x},\qquad x>0.$$

Математическое ожидание равно

$$M[Z]=\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)}. \quad (14)$$

Вариант 4. Пусть случайные величины распределены по показательному и равномерному законам:

$$f_X(x)=\lambda\, e^{-\lambda x},\quad x>0;\quad f_Y(y)=\frac{1}{a},\qquad 0<y<a.$$

$$P(\min(X,Y)>z)=e^{-\lambda z}\,(1-\frac{z}{a}),\qquad 0<z<a. \quad (15)$$

$$M[Z]=\frac{1}{\lambda}-\int_0^a e^{-\lambda z}(1-\frac{z}{a})\,dz. \qquad (16)$$

Введя новые переменные

$$u=1-\frac{z}{a},\quad du=-\frac{1}{a}dz;\qquad v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z},\ dv=e^{-\lambda z}\,dz,$$

получим

$$M[Z]=\frac{1}{\lambda}-[(1-\frac{z}{a})(-\frac{e^{-\lambda z}}{\lambda})\Big|_0^a-\int_0^a(-\frac{e^{-\lambda z}}{\lambda})(-\frac{dz}{a})]=\frac{1}{\lambda}-[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda a}(\frac{1-e^{-\lambda a}}{\lambda})]=\frac{1}{\lambda^2 a}(1-e^{-\lambda a}). \qquad (17)$$

Вариант 5. Пусть случайные величины распределены по равномерным законам:

$$f_X(x)=\frac{1}{a},\quad 0<x<a;\qquad f_Y(y)=\frac{1}{b},\qquad 0<y<b,$$

$$F_X(x)=\frac{x}{a},\quad 0\le x\le a;\qquad F_Y(y)=\frac{y}{b},\quad 0\le y\le b,$$

$$P\,(\min\,(X,Y>z)=(1-\frac{x}{a})_+(1-\frac{z}{b})_+\,. \qquad (18)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\boldsymbol{a<b}$**:**

$$P(\min(X,Y)>z)=\begin{cases}(1-\frac{z}{a})(1-\frac{z}{b}), & \text{если}\quad 0<z<a,\\ 0, & \text{если}\quad z\ge a,\end{cases} \qquad (19)$$

$$M[nin(X,Y)]=\int_0^a(1-\frac{z}{a})(1-\frac{z}{b})dz=\int_0^a(1-\frac{z}{a}-\frac{z}{b}+\frac{z^2}{ab})dz=(a-\frac{z^2}{2a}-\frac{z^2}{2b}+\frac{z^3}{3ab})\Big|_0^a=($$
$$=a-\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2b}+\frac{a^2}{3b}=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{6b}=\quad\frac{a}{2}(1-\frac{a}{3b}). \qquad (20)$$

Математическое ожидание равно

$$M[Z]=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}(1-\frac{a}{3b})=\frac{a^2}{6b}. \qquad (21)$$

Случай 2: $\boldsymbol{a>b}$**:**

$$P(\min(X,Y) > z) = \begin{cases} (1-\frac{z}{a})(1-\frac{z}{b}); & \text{если } 0 < z < b, \\ 0, & \text{если } z > b, \end{cases} \quad (22)$$

$$M[\min(X,Y)] = \int_a^b (1-\frac{z}{a})(1-\frac{z}{b})dz = \frac{b}{2}(1-\frac{b}{3a}). \quad (23)$$

Математическое ожидание равно

$$M[Z] = \frac{b}{2} - \frac{b}{2}(1-\frac{b}{3a}) = \frac{b^2}{6a}. \quad (24)$$

Вариант 6. Пусть случайные величины X и Y независимы и распределены по закону Пуассона [4] с параметрами a_1, a_2. Закон распределения их разности $Z=Z\text{-}Y$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Вероятность того, что Z примет значения $k \geq 0$ равна сумме вероятности того, что X и Y примут два значения различающиеся по k .

При $k \geq 0$

$$P\{Z \geq k\}_+ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_2^m}{m!} \frac{a_1^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a_1+a_2)} \quad (25)$$

Вероятность того, что Z примет отрицательное значение (- k) будет

$$P\{Z = -k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_1^m}{m!} \frac{a_2^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a_1+a_2)} \quad (k > 0) \text{.} \quad (26)$$

Выводы. Предложен комплекс вероятностных моделей для определения распределений положительной разности от двух независимых случайных величин наличия и отправки грузов из терминала. Модели разработаны для следующих законов: показательный с показательным; нормальный с нормальным; показательный с равномерным; равномерный с равномерным; Пуассона с Пуассоном. Выполненные исследования предназначены для оптимального планирования автомобильных перевозок грузов из терминала.

Список использованных источников

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Изд.-во -8 УРСС, 2004. — 446 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и ее инженерные приложения. — М.: Высш. школа, 2000. — 480 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятности. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.
5. Галушко В.Г. Вероятностно-статистические методы на автотранспорте. — К.: Вища школа, 1976. — 232 с.
6. Галушко В.Г. Определение вероятностных объемов грузов, формируемых в грузообразующем пункте, при различных законах их поступления и отправки // Управляющие системы и машины. — 2008. — № 2. — С.78 - 82.
7. Галушко В.Г. Ймовірністна модель визначення обсягів вантажів, що чекають відправки в пунктах транспортної мережі // Системні методи керування, технологія та організація виробництва, ремонту і експлуатації автомобіля. — 2002. — Вип. 15. — С. 58 - 60.

УДК 519.86:330.4(477) **В.В. Глущевський**

Математичне моделювання структурної будови національної економічної системи

Представлено результати авторського дослідження проблем формального опису макроекономічних систем. Описано математичну модель