УДК 519.21:621.86
Л.А.Пономаренко

Визначення оптимальної величини часового інтервалу вільного доступу запитів споживачів

Розглядається одне з практичних завдань оптимального управління процедурою допуску споживачів до обслуговування – визначення тривалості часового інтервалу, протягом якого відбувається прийом споживачів

***Ключові слова**: система масового обслуговування, пріоритети, марковський процес, оптимальна зупинка.*

Рассматривается одно из практических заданий оптимального управления допуска потребителя к обслуживанию – определение продолжительности временного интервала, на протяжении которого осуществляется обслуживание потребителя.

***Ключевые слова:** система массового обслуживания, приоритеты, марковский процесс, оптимальная остановка.*

One of the key practical tasks on customer flow service level optimization is considered: the calculation of the optimal opening hours

***Key words**: queues systems, priority, Markov's process, optimal stop.*

Вступ. Необхідність створення у різних сферах людської діяльності запасів, які гарантують безперебійне забезпечення споживачів товарами або сировиною, стимулювало розвиток численних досліджень з управління такими запасами. Розроблені моделі й методи, як умовно-абстрактні, так і орієнтовані на конкретні структури ресурсозабезпечення, дають змогу з різним ступенем точності розраховувати оптимальні (або ж близькі до них) рівні запасів. У випадках, коли недостатнім є рівень формалізації основних елементів функціонування систем управління запасами, для вироблення методичних рекомендацій на етапах проектування та експлуатації складських систем як інструментарій використовують методи імітаційного моделювання. Відповідні імітаційні моделі, що відбивають структурну специфіку конкретних складських систем, особливості політики керування запасами, багаторазово реалізуються на ЕОМ, а отримані результати підлягають статистичній обробці. Деталізований опис структури складської системи, детальне завдання законів зміни її головних характеристик призводять, як правило, до надзвичайно складних імітаційних моделей. Тому у розробках, які проводяться зараз, досліджуються або окремі ланки складських систем, або спрощені процеси руху ресурсів і технології обробки запитів на отримання матеріалів чи товарів.

Аналіз останніх досліджень. У відомій літературі дуже рідко зустрічаються праці, присвячені пошуку оптимальних стратегій обслуговування споживачів складських систем, хоча, на наш погляд, ця проблема є вельми актуальною, а її вирішення може принести суттєвий економічний ефект.

Процес обслуговування запитів споживачів (покупців) на підприємствах роздрібної торгівлі (в магазинах або дрібнооптових складах (базах) є, як правило, таким, що важко формалізується, і на який суттєво впливають випадкові чинники. Для аналізу функціонування таких складних систем управління запасами як магазини і склади останнім часом широко й успішно застосовують апарат стохастичних процесів, у тому числі теорію масового обслуговування. При цьому спостерігається не просто розширення галузей досліджень в області стохастичних процесів, але й поява нових, викликаних потребами практики постановок теоретичних задач.

У більшості реальних систем управління запасами інтервали часу між вимогами споживачів, що надходять на склад чи в магазин, а також тривалість обробки кожного з них є випадковими величинами, що не дає змоги побудувати синхронний детермінований процес прийому запитів, їх обробки на складах і видачі потрібних товарів споживачам. Аналіз таких процесів, визначення їх характеристик входить до кола задач, що розв'язуються теорією масового обслуговування. Це призводить до необхідності розглядати склади як системи масового обслуговування з одним чи кількома вхідними потоками вимог.

Метою даної статті є розв'язання за допомогою математичних моделей оптимальної зупинки марковських процесів і пріоритетних систем масового обслуговування актуальної проблеми пошуку оптимальної стратегії допуску споживачів до обслуговування.

Постановка завдання. Розглянемо дрібнооптовий склад або магазин (у подальшому склад), куди надходить сумарний пуассонівський потік запитів споживачів з параметром λ ($0 < \lambda < \infty$); запити у порядку надходження або у відповідності з іншою дисципліною обслуговуються з інтенсивністю μ ($0 < \mu < \infty$). Управління допуском споживачів до обслуговування полягає, в першу чергу, у визначенні певного проміжку часу нормальної роботи τ, тривалість якого, взагалі кажучи, залежить від передісторії процесу, що описує функціонування складу. Всі запити, що надійшли поза цим інтервалом, відкидаються із виплатою компенсації розміром b за кожний втрачений запит.

Запити, допущені в систему обслуговування до моменту τ, задовольняються повністю до тих пір, доки система не стане пустою. Проте через певний скінчений час T від початку роботи складу вартість обслуговування зростає на певну постійну величину a, що пов'язано з необхідністю оплати додаткової роботи персоналу складу, а виплата компенсації за втрачені запити після моменту T припиняється. Треба визначити стратегію управління допуском запитів, тобто вибрати випадковий час τ таким чином, щоб мінімізувати сумарні середні втрати.

Основний матеріал. Нехай $Q(t)$ – процес, який описує довжину черги в системі в момент t. Час $W(t)$, необхідний для обслуговування, що очікують у черзі в момент t, пов'язаний із процесом $Q(t)$ таким чином:

$$W(t) = 0, Q(t) = 0,$$

$$W(t) = \nu_1' + \nu_2 + ... + \nu_{Q(t)}, Q(t) \geq 1,$$

де ν_1' – час, що залишився до закінчення обслуговування запиту, яке вже почалося; $\nu_2, \nu_3, ..., \nu_{Q(t)}$ – тривалості обслуговування запитів, які чекають у черзі в момент t.

Розподіл випадкової величини $W_n = \nu_1' + \nu_2 + ... + \nu_n$ є n-кратною згорткою показникових розподілів, тобто гамма-розподілом зі щільністю

$$\gamma_n(x) = \frac{e^{-\mu x} \mu^n x^{n-1}}{(n-1)!}, x \geq 0, n \geq 1.$$

Таким чином, тривалість додаткової роботи обслуговуючого персоналу, якщо допуск запитів на склад був припинений у момент часу t за наявності в черзі n запитів, дорівнює

$$M\eta_n(t) = M\max(0, W_n + t - T) =$$
$$= \int_{T-t}^{\infty} (x + t - T)e^{-\mu x} \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx =$$
$$= (n/\mu)P[n, \mu(T-t)] - (T-t)[n-1, \mu(T-t)],$$

де $P(n, \mu t)$ – функція розподілу Пуассона:

$$P(n, \mu t) = \sum_{k=0}^{n} (\mu t)^k \frac{e^{-\mu t}}{k!}.$$

При $n = 0$ отримуємо, що $W_n = 0$, тоді

$$M\eta_0(t) = \max(0, t - T).$$

Сумарні очікувані втрати, пов'язані із виплатою компенсації запитам, що відкидаються від моменту t, дорівнюють

$$r = \lambda b\max(0, T - t).$$

Тоді загальні очікувані втрати, пов'язані із припиненням доступу запитів в момент t за наявності n запитів, дорівнюють

$$g(t, n) = \lambda b\max(0, T - t) + aM\eta_n(t).$$

Оскільки функція втрат $g(t,n)$ залежить від часу t, запровадимо двовимірний процес $X_t = (t, Q_t)$, де процес Q_t, що описує довжину черги в системі в момент t, є процесом розмноження й загибелі з відбиттям у точці $n = 0$ із фазовим простором

$$\Omega = R^+ \otimes J,$$

де $R^+ = [0, \infty), J = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$.

Перехідна функція процесу X_t має вигляд

$$H(s, m, s', n, t) = P(m, n, t)u(s' - s - t),$$

де $u(y) = 0$ при $y < 0$, $u(y) = 1$ при $y \geq 0$;

$$P(m, n, t) = P(Q_{s+1} = n / Q_s = m) = P(Q_t = n / Q_0 = m).$$

При $h \to 0^+$ маємо

$$P(m,n,h)=\begin{cases}\lambda h+o(h), & n=m+1, \quad m\ge 1;\\ \mu h+o(h), & n=m-1, \quad m\ge 1;\\ 1-(\lambda+\mu)h+o(h), & n=m, \quad m\ge 1.\end{cases}$$

$$P(0,n,h)=\begin{cases}\lambda h+o(h), & n=1;\\ 1-\lambda h+o(h), & n=0;\\ 0, & n>1.\end{cases}$$

Для заданого таким чином випадкового марковського процесу X_t задача визначення оптимального значення інтервалу τ зводиться до класичної задачі про оптимальну зупинку випадкового процесу [1, 2]. Загальна схема розв'язку цієї задачі є такою.

Нехай $X_t = (t, Q)$ – марковський процес у фазовому просторі Ω. Тут (t, n) – стан процесу в момент часу t. До моменту t включно вся сукупність подій, що складають еволюцію процесу, є доступною для спостереження. Передбачається, що зупиняючи процес в момент часу τ ми отримуємо виграш (або несемо збитки) величиною $g(X_t)$. Тоді середній виграш (середні втрати), відповідний початковому стану $(t_0, 0)$, є математичним сподіванням $M_{(t,n)}g(X_\tau)$. Таким чином, τ – випадкова величина, що приймає значення із R^+. Вирішення питання про те, чи зупинити процес в момент часу $t = \tau$, залежить лише від подій, які спостерігаються до моменту t включно.

Припускаючи, що математичне сподівання $M_{(t,n)}g(X_\tau)$ визначене, покладемо $s(t, n) = \sup_\tau M_{(t,n)}g(X_\tau)$.

Функція $s(t, n)$ називається *ціною*, а момент τ, такий, що $s(t, n) \le M_{(t,n)}g(X_\tau)$ для всіх $(t, n) \in \Omega$ називається *оптимальним*. Треба визначити структуру функції $s(t, n)$, способи її обчислювання, області існування оптимальних моментів і методи їх пошуку.

В роботі [1] показано, що для обмеженої функції $g(t,n)$ ціна $s(t, n)$ є найменшою ексцесивною мажорантою функції $g(t,n)$, тобто найменшою із функцій $f(t,n)$, що задовольнять умови

$$g(t,n) \le f(t,n), Tf(t,n) \le f(t,n),$$

де $Tf(t,n) = M_{(t,n)} g(t,n)$.

При цьому момент

$$\tau_0 = \inf\{t \ge 0 : s(\tau,n) = g(\tau,n)\}$$

є оптимальним і ціна $s(t,n)$ задовольняє рівняння

$$s(t,n) = \max\{g(t,n), Ts(t,n)\}.$$

Зв'яжемо з процесом X_t напівгрупу лінійних операторів $\{T_t, t > 0\}$, визначених в [3]:

$$T_t g(s,n) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} g(s',k) dH(s,n,ds,k,t).$$

Отримаємо, що слабкий інфінітезимальний оператор напівгрупи $\{T_t, t > 0\}$

$$Af(t,n) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h f(t+h,n) - f(t,n)}{h}. \qquad (1)$$

Для процесу, що розглядається, $X_t = (t, Q_t)$

$$Af(t,0) = \frac{\partial^+ f(t,0)}{\partial t} + \lambda[f(t,1) - f(t,0)],$$

$$Af(t,n) = \frac{\partial^+ f(t,n)}{\partial t} + \lambda[f(t,n+1) - f(t,n)] -$$

$$- \mu[f(t,n) - f(t,n-1)], n \ge 1.$$

Щоб знайти функцію $\bar{s}(t,n) = \inf M_{(t,n)} g(X_\tau)$ і показати, що момент $\tau_0 = \inf\{t \ge 0 : \bar{s}(X_\tau) = g(X_\tau)\}$є оптимальним, скористаємося результатами роботи [4] щодо зв'язку задач про оптимальну зупинку розривних марковських процесів із задачею Стефана.

Взагалі кажучи, задача Стефана виникає при дослідженні фізичних процесів, пов'язаних із фазовим перетворенням речовини. Найпростіша двофазна задача Стефана у теплофізичних термінах формулюється таким чином [5,6]: знайти розподіл температури $u(x,t)$ і закон руху границі розподілу фаз $\xi = \xi(t)$ (наприклад, границі «лід – вода» всередині замерзаючої води) із рівняння теплопровідності

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < \xi(t), t > 0,$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } \xi(t) < x < +\infty, t > 0,$$

граничної умови

$$u(0,t) = u_1 = \text{const} < T, t > 0,$$

початкової умови

$$u(x,0) = u_2 = \text{const} > \text{T}, \text{t} \geq 0,$$

та умови на границі замерзання

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t), t > 0,$$

$$\lambda_1\rho_1 \frac{d\xi(t)}{dt} = k_1 \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x}, \qquad (2)$$

$$t > 0, \xi(0) = 0,$$

де k_1, k_2 – коефіцієнти теплопровідності; c_1, c_2 – питомі теплоємності; ρ_1, ρ_2 – щільності твердої та, відповідно, рідкої фаз; λ - прихована теплота плавлення, віднесена до одиниці маси; T – температура замерзання.

Ця задача має автомодельний розв'язок

$$u = u(xt^{-1/2}), \xi(t) = \alpha t^{1/2}, \alpha = \text{const} > 0.$$

Достатньо загальна постановка задачі Стефана у просторово-тривимірному випадку зводиться до крайової задачі для параболічного рівняння 2-го порядку із кусочно-неперервними коефіцієнтами із розривами 1-го роду на заздалегідь невідомих і підлягаючих визначенню поверхнях, на яких завдається значення шуканої функції, і, крім того, задовольняючих диференціальному рівнянню (2). Крім того, на границі розділення фаз $\xi = \xi(t)$ температура вважається неперервною, а її значення приймається рівним відомій температурі плавлення (умова склеювання).

Умовами Стефана прийнято називати також аналогічні умови на невідомих границях, які зустрічаються при дослідженні деяких інших процесів і випливають із загальних законів збереження.

Задача Стефана для системи, яку ми досліджуємо, зводиться до розв'язання рівнянь

$$\begin{aligned} &As(t,n) = \frac{ds(t,n)}{dt} + \lambda\left[s(t,n+1) - s(t,n)\right] - \\ &-\mu\left[s(t,n) - s(t,n-1)\right] = 0, (t,n) \in C_0; n \geq 1; \\ &As(t,0) = \frac{ds(t,0)}{dt} + \lambda\left[s(t,1) - s(t,0)\right] = 0; \\ &s(t,n) = g(t,n), (t,n) \in D, \\ &\frac{ds(t,n)}{dt} = \frac{dg(t,n)}{dt}, (t,n) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{3}$$

де D – область визначення оператора A, що складається із функцій $f(x)$, для яких границя у правій частині виразу (1) існує рівномірно по $x \in \Omega; \Gamma = \{(t,n) : s(t,n) = g(t,n)\}$; $C_0 = \Omega \backslash \Gamma$.

Нехай $t \in [t_1, t_0]$, тоді $s(t,1) = g(t,1),$ бо при цьому $(t,n) \in D.$ Вираз (3) перетворюється на рівняння

$$\frac{ds(t,0)}{dt} - \lambda s(t,0) = -\lambda g(t,n),$$

розв'язуючи яке, отримуємо

$$s(t,0)=\lambda b(T-t_0)-b+Ce^{-\lambda t}-\frac{\lambda a e^{-\mu(T-t_0)}}{\mu(\mu-\lambda)},$$

де C – константа інтегрування.

У точці $(t_0,0)$ має виконуватися умова «гладкого склеювання»

$$\frac{\partial g(t,n)}{\partial t}=\frac{\partial s(t,n)}{\partial t},(t,n)\in\Gamma,$$

і, крім того, має місце рівність

$$s(t_0,0)=g(t_0,0)=\lambda b(T-t_0).$$

Таким чином, отримуємо систему двох рівнянь для визначення двох невідомих параметрів C і t_0, розв'язком якої є

$$t_0=T+\frac{1}{\mu}\ln\frac{b\mu}{a}.$$

Аналогічно визначається послідовність $t_1,t_2,...,t_n,...$, доводиться існування та єдність оптимального рішення та еквівалентність задачі Стефана та задачі оптимальної зупинки марковського процесу. Таким чином, для кожного стану n (n = 0,1,…) процесу $Q(t)$ ми визначили явний вираз моменту часу τ, коли необхідно припинити прийом запитів до системи при мінімальних сумарних втратах.

Висновки. Використання у практичній діяльності при експлуатації складських і торговельних систем оптимальних значень інтервалів допуску запитів споживачів дозволяє суттєво зменшити внутрішні витрати на їх обслуговування при одночасній максимізації прибутку від виконання запитів.

Список використаних джерел

1. Ширяев А.Н. Стохастический последовательный анализ. – М.: Наука, 1976. – 272 с.

2. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
3. Григелионис Б.И. Об оптимальной остановке марковских процессов // Литовский математический сборник. – 1967. – Т.VII, № 2. – С. 265–279.
4. Григелионис Б.И., Ширяев А.Н. О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – Т.XI, № 4. – С. 612–631.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 436 с.
6. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш.шк., 1964. – 364 с.

УДК 330:652:519.2 **Л.І. Бажан**

Концептуальні засади ідентифікації проблемних ситуацій функціонування транспортно-логістичної системи в умовах невизначеності та ризику.

Описані концептуальні засади ідентифікації проблемних ситуацій функціонування транспортно-логістичної системи, які обумовлені господарським ризиком. в умовах невизначеності та ризику

***Ключові слова**: невизначеність, господарський ризик, ідентифікація, транспортно-логістична система.*

Описаны концептуальные основы идентификации проблемных ситуаций функционирования транспортно-логистической системы, которые обусловлены хозяйственным риском. в условиях неопределенности и риска