УДК 519.14+519.168

Н.К. Тимофієва, В.І. Гриценко

Моделювання та розв'язання прикладних задач комбінаторної оптимізації, які виникають в інтелектуальних георозподілених динамічних системах

С использованием теории комбинаторной оптимизации сформулированы математические постановки таких прикладных задач геораспределенных динамических систем, как распределение сервисных объектов на определенной территории, и задача сохранения окружающей среды. Для них смоделирована целевая функция и определен ее аргумент. Среди рассматриваемых классов задач выделены подклассы, решаемые методом структурно-алфавитного поиска.

Using the theory of combinatorial optimization the mathematical formulation of such applications of the geodistribution dynamical systems as distribution of objects service in a territory definite and the problem of environment are formulated. The objective function is modeled, its argument is determined. Among the considered classes of problems the subclasses solved by a structure-alphabetical search method are identified.

З використанням теорії комбінаторної оптмізації сформульовано математичні постановки таких прикладних задач георозподілених динамічних систем, як розподілення сервісних об'єктів на певній території, та задача збереження довкілля. Для них змодельовано цільову функцію та визначено її аргумент. Із розглянутих класів задач виділено підкласи, які розв'язуються методом структурно-алфавітного пошуку.

Вступ. Основними складовими сучасної економіки з-поміж інших є такі промислові комплекси, як транспортні та телекомунікаційні мережі, системи нафта- та газовидобутку, розподілені сервісні об'єкти на певній території, зрошувальні системи тощо [1–20]. Вони потребують розроблення багаторівневих розподілених комп'ютерних систем керування. Такі комплекси називають георозподіленими виробничими системами. В процесі їх проектування та експлуатації необхідно вирішувати багато проблем, пов'язаних з наявністю земельного ресурсу для розташування технологічних об'єктів та інженерних споруд, з оптимальним розміщенням цих об'єктів на певній території, вирішувати економічні проблеми; необхідно враховувати і екологічний стан довкілля, а також приймати оптимальне рішення за умов невизначеності різної природи та прогнозувати поведінку системи в часі. Для вирішення ситуації невизначеності використовують різні підходи, зокрема і способи, пов'язані з обчислювальним інтелектом.

Оскільки георозподілені системи одержують ресурси з навколишнього середовища, то вони є відкритою динамічною структурою. Як правило, в них розглядаються динамічні задачі, що належать до управлінських проблем. До того ж, прикладні задачі оптимізації, які зводяться до задач комбінаторної оптимізації, можуть бути як статичними, так і динамічними.

Назвемо інтелектуальними георозподіленими динамічними системами виробничі або сервісні промислові комплекси, розподілені на певній території, які мають координати та керуються як централізовано, так і в автономному режимі за допомогою розподілених комп'ютерних систем керування і є відкритими динамічними структурами. Для розроблення та експлуатації вони потребують використання різних підходів, зокрема і способів, пов'язаних з обчислювальним інтелектом. При розміщенні нових виробничих комплексів можна використовувати існуючі ресурси (транспортні мережі, телекомунікації тощо). Серед них виділимо такі:

- магістральні виробничі комплекси (залізниці, автомобільні дороги, нафто- та газовидобуток);
- сервісні об'єкти, розміщені на певній території, в яких використано існуючі транспортні та інші ресурси. Це – ремонтні майстерні, банки, мережа аптек, магазинів тощо;
- авіаперевезення, при яких використано як земельні ресурси, так і повітряний простір;

Ключові слова: георозподілені динамічні системи, комбінаторна оптимізація, розміщення сервісних об'єктів, транспортна задача, метод структурно-алфавітного пошуку.

• телекомунікаційні мережі, які для передачі інформації потребують земельних ресурсів, прокладання каналів зв’язку під землею та під водою, використання повітряного простору та телекомунікаційних космічних систем;

• зрошувальні системи, які займають певну територію та потребують розміщення на ній датчиків для збору поточної інформації про стан ґрунту.

Розроблення та експлуатація інтелектуальних георозподілених динамічних систем потребує вирішення проблем оптимізації, серед яких виділимо:

• вирішення низки оптимізаційних задач, які зводяться до задач комбінаторної оптимізації;

• оптимальне використання земельних ресурсів;

• розроблення баз знань та інтелектуалізація систем керування для прийняття рішень в умовах невизначеності;

• розроблення способів прогнозування роботи георозподілених динамічних систем;

• оптимізація витрат на розробку та експлуатацію георозподілених динамічних систем;

• оптимальне вирішення екологічної проблеми.

Далі розглянемо задачі оптимізації, що виникають при розробці та експлуатації георозподілених динамічних систем і які зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Різні класи задач потребують спеціальних підходів до їх розв’язання. Побудова математичних моделей прикладних задач у межах теорії комбінаторної оптимізації дозволяє виявити їхні характерні властивості, сформулювати для них адекватну математичну постановку, завдяки якій нескладно розробляти нові або використовувати відомі алгоритми для ефективного вирішення.

Загальна характеристика задачі розподілення мережі сервісних об’єктів

Проблему розміщення підприємств, до якої належить задача розподілення мережі сервісних об’єктів на певній території, досліджено досить ґрунтовно [2, 9–15, 18, 19]. Математичні моделі цих задач розроблялися і розробляються в межах цілочислового лінійного програмування. Побудовані моделі мають властивості, характерні для транспортної задачі та її узагальнення, тому їх інколи зводять до цієї задачі. Деякі з них моделюються в межах теорії масового обслуговування [5, 21]. Для розв’язання задачі оптимального розміщення підприємств застосовуються методи декомпозиції, універсальні та спеціальні методи математичного програмування як точні, так і наближені [2, 19]. Оскільки в задачі розміщення підприємств спостерігається перебір варіантів, то вона належить до задач комбінаторної оптимізації. У [18] описано спосіб розв’язання задачі розміщення складів, в якому використано апроксимаційно-комбінаторний підхід. У [3, 9–11, 19] для моделювання задач розміщення підприємств використовують теорію графів, а в [4] – перелічувальну комбінаторику, застосовуючи яку визначають кількість варіантів їхнього розміщення. Але при розв’язанні прикладних задач цього класу важливо не знайти кількість варіантів, а змоделювати цільову функцію та визначити її аргумент (комбінаторну конфігурацію), для якого вона набуває оптимального значення.

Отже, задача розподілення мережі сервісних об’єктів на певній території полягає у пошуку такої їхньої оптимальної кількості, за якої усі потенційні замовники, що належить до цієї території, могли б скористатися послугами таких об’єктів за умови мінімальної віддалі між ними та мінімальними витратами на обслуговування, наприклад ремонт приладів. Для мінімізації витрат на перевезення та ремонт необхідно побудувати математичну модель «замовник–виконавець», в якій основною умовою може бути зменшення віддалі від замовника до виконавця, що впливає на зниження ціни на послуги.

В задачі розподілення мережі сервісних об’єктів виділимо такі варіанти:

• кількість замовників і кількість сервісних об’єктів відома;

• кількість замовників і кількість сервісних об’єктів невідома;

• кількість замовників відома, а кількість сервісних об’єктів необхідно визначити;

• кількість замовників невідома, а кількість сервісних об'єктів відома.

В літературі описано задачі розміщення підприємств, кількість яких наперед задано і територія для їх розташування відома [2, 18]. За умов конкуренції розміщення підприємств проводиться в динамічному режимі. Поруч може бути розміщено кілька однотипних обслуговуючих центрів [10, 11]. У [15] задача розміщення центрів обслуговування розглядається як гра двох учасників.

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації і сформулюємо її, як у роботі [22]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A і B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,..., n\}$, $t \in \{1,..., \widetilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\widetilde{n}$ – кількість елементів множини B. Приймемо, що $n = \widetilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо *вагами*. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними і задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,..., n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач з елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень, тобто функціонал $F(w^*) = \mathrm{glob} \operatorname*{extr}_{w \in W^0 \subset W} F(w)$, де $\mathrm{extr} = \{\min, \max\}$, W^0 – підмножина, яка визначається обмеженнями задачі.

За способом обчислення цільової функції виділимо задачі, в яких для певного варіанту розв'язку її значення обчислюється одночасно. Такі задачі назвемо *статичними*. Задачі, в яких в процесі розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язання проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції, назвемо *динамічними*.

Змоделюємо вхідні дані задачі комбінаторної оптимізації першого типу скінченними послідовностями. Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = = \left(\beta_1(f(1), w^k),..., \beta_m(f(m), w^k)\right)$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = = (\varphi(1),..., \varphi(m))$, де $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C і $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1,..., q\}$) в w^k – порядковий номер w^k в W. Якщо матриці $Q(w^k)$ і C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\,\widetilde{n}$). Функція цілі $F(w^k)$ набуде вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j). \qquad (1)$$

Побудова математичних моделей задач комбінаторної оптимізації, як правило, проводиться з використанням задачі цілочислового лінійного програмування, яка формулюється в такому вигляді. Знайти екстремум функції $\sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_l x_l$ за умов $\sum_{l=1}^{n} \widetilde{a}_{sl} x_l = \widetilde{b}_s$, $s = \overline{1, p}$, $x_l \geq 0$, $l = \overline{1, n}$, x_l – цілі для $l = \overline{1, p}$, $p \leq n$, $\widetilde{c}_l, \widetilde{a}_{sl}, \widetilde{b}_s$ – задані цілі числа, x_l – змінні. Виходячи з цієї моделі, вважають, що цільова функція в комбінаторній оптимізації залежить від багатьох змінних, а x_l є елементами комбінаторної конфігурації $w = (w_1, ..., w_n)$ і перемножуються на задані числа $\widetilde{c}_l, \widetilde{a}_{sl}$. Але це неможливо, оскільки w_l можуть мати будь-яку природу. Змінні x_l не є елементами w, а модель цілочислового лінійного програмування не відображає суті задач комбінаторної оптимізації. Цілочислове лінійне програмування розроблялося для економічних задач, що належить до другого типу, для яких математична постановка формулюється так: задано одну множину *A*, елементи $a_l \in A$ якої не мають між собою зв'зків. Натомість кожен елемент $a_l \in A$, $l \in \{1, ..., n\}$, характеризується певною властивістю (вагою) x_l. Аргументом цільової функції в них, як правило, є вибірки (сполучення, розміщення), а вхідні дані – послідовність значень ваг $x_1, ..., x_n$ елементів a_l заданої множини *A*, кількість яких збігається з кількістю елементів у w. Звідси твердження, що аргументом цільової функції в цих задачах є послідовність вхідних даних $x_1, ..., x_n$, а не комбінаторна конфігурація $w = (w_1, ..., w_n)$. Відповідно вважають, що цільова функція в задачах комбінаторної оптимізації залежить від багатьох змінних.

Послідовність $x_1, ..., x_n$ є вхідними даними певної задачі, а значення x_l неявно залежить від комбінаторної конфігурації $w = (w_1, ..., w_n)$, тобто вираз $\sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_l x_l$ слід записати у такому вигляді: $F(w) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_l x_l(w)$. Тоді постає проблема визначення цієї залежності в задачах комбінаторної оптимізації. Для цього необхідно розробляти їхні математичні постановки з урахуванням комбінаторної природи. До того ж при використанні цільової функції $F(w) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_l x_l(w)$ на комбінаторних множинах, які складаються з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій, виникає ситуація невизначеності [23].

Для моделювання прикладних задач в межах теорії комбінаторної оптимізації необхідно:

- визначити вид задачі (статична або динамічна) за способом обчислення цільової функції;
- визначити базові множини, якими задається певна задача;
- визначити тип задачі за вхідними даними;
- визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію);
- змоделювати цільову функцію.

Уточнимо такі поняття, як *критерій* і *цільова функція*.

Критерій – ознаки або властивості, які характеризують певний об’єкт або зв’язки між об’єктами, і є вхідними даними.

Цільова функція – вираз, який формулюється на основі заданих критеріїв з урахуванням особливостей задачі, за яким обчислюється і оцінюється результат її розв’язку.

Як правило, цільову функцію ототожнюють з критеріями, а за її аргумент приймають вхідні дані. Але для одних і тих же критеріїв цільову функцію можна змоделювати по-різному, тобто оцінка проводиться за різними виразами і отримується різний результат. Її аргументом є комбінаторні конфігурації різних типів (перестановки, сполучення, розбиття n-елементної множини на підмножини та ін.). До того ж вона може залежати як від однієї змінної, так і від багатьох (комбінаторних конфігурацій). За цією ознакою задачі комбінаторної оптимізації розділяються на підзадачі. В цьому випадку для їхнього розв’язання необхідно розробляти гібридні алгоритми.

Враховуючи сказане, змоделюємо задачу розподілення мережі сервісних об’єктів на певній території як задачу комбінаторної оптимізації.

Побудова математичної моделі задачі розподілення мережі сервісних об’єктів з використанням теорії комбінаторної оптимізації

Побудуємо математичну модель розподілення мережі сервісних об’єктів за умови, що їхня кількість наперед невідома, але відома кількість замовників і їхнє місцезнаходження. Модель має враховувати транспортні витрати та розподілення замовлень між сервісними об'єктами. Вважатимемо, що поставка матеріалу проводиться централізовано як з одного центру, так і з розподілених пунктів постачання.

Моделювання задачі розподілення сервісних об'єктів на певній території з використанням теорії комбінаторної оптимізації свідчить, що вона ділиться на кілька підзадач: задачу кластеризації, транспортну задачу і задачу з теорії масового обслуговування. Розглянемо ці підзадачі.

Задача кластеризації. Для визначення кількості сервісних об'єктів необхідно виходити з кількості усіх відомих замовників на певній території, які позначимо множиною $A = \{a_1, ..., a_n\}$.

В результаті розв'язання задачі кластеризації кількість сервісних об'єктів дорівнюватиме кількості одержаних кластерів. Сформулюємо математичну постановку цієї задачі, вхідними даними в якій є віддалі між замовниками. Аргументом цільової функції в ній є розбиття *n*-елементної множини на підмножини, яке позначимо $\rho^k \in \Theta$, де Θ – множина розбиттів.

Задача кластеризації задається на одній множині $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Числові значення зв'язків між елементами $a_l, a_t \in A$ (вхідні дані), якими є віддалі між замовниками, подамо симетричною матрицею $C = \left\| c_{l\,t} \right\|_{n \times n}$ (або функцією $\varphi(j)\,|_1^m$). Для задання розподілення елементів множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ між підмножинами (кластерами) ρ_s^k фіксованого розбиття $\rho^k \in \Theta$ введемо симетричну комбінаторну (0,1)-матрицю розподілення $Q(\rho^k) = \left\| g_{lt}(\rho^k) \right\|_{n \times n}$ (або функцію $\beta(f(j), \rho^k)|_1^m$). Якщо $\beta(f(j), \rho^k) = 1$ (або $g_{ls}(\rho^k) = 1$), то елементи $a_l, a_t \in A$ знаходяться в одному кластері. В іншому разі $\beta(f(j), \rho^k) = 0$. Задача кластеризації полягає у пошуку такого розбиття $\rho^k \in \Theta$ на неперетинні кластери, для якого цільова функція (1) набуває максимального значення.

Оскільки пошук оптимального розв'язку проводиться на усій множині розбиттів Θ, то при використанні для оцінки результату цільової функції (1) виникає ситуація невизначеності. Тобто, для певного впорядкування підмножин ізоморфних розбиттів закономірність зміни значень виразу (1) змінюється однаково незалежно від вхідних даних. Для виходу з цієї ситуації необхідно ввести додаткові цільові функції, критерії або обмеження.

Математична постановка транспортної задачі як задачі комбінаторної оптимізації. Для оптимізації перевезень необхідно розв'язати транспортну задачу як всередині утворених кластерів, так і між кластерами. Це – друга підзадача, аргументом цільової функції в якій є перестановка $\omega^i \in \Omega$, де Ω – множина перестановок. При цьому необхідно врахувати в залежності від віддалі вартість перевезень матеріалів від центрального постачальника матеріалів та приладів, що потребують ремонту, до цих об'єктів (наприклад, ремонтних майстерень).

Транспортна задача була формалізована ще у 1781 р. [24]. Як проблему лінійного програмування її вперше розглянуто у роботі [25], тому цю задачу розглядають як задачу лінійного програмування спеціального виду, і вона є підмножиною задач лінійного програмування. Для розв'язання транспортної задачі використовують симплекс-метод, метод одночасного розв'язання прямої та двоїстої задачі, метод потенціалів, угорський метод, динамічне програмування, метаеврістичні підходи [2, 26, 27]. Цю задачу ще зводять до задачі комівояжера або до задачі про ранець. Для пошуку початкового розв'язку використовують метод північно-західного кута, метод мінімальних тарифів, а для остаточної оптимізації – метод потенціалів. У [27] зазначено, що задача про призначення є частковим випадком класичної транспортної задачі. Задача про призначенння поліноміально розв'язується угорським алгоритмом.

Сформулюємо однокритеріальну транспортну задачу закритого виду, в якій оптимізується вартість перевезення, як задачу комбінаторної оптимізації. Вона задається двома множинами A і B, де елементи $a_l \in A$, відповідають продукції, яку необхідно перевезти, а $b_t \in B$ – продукцію, яка споживається заданим об'єктом. Між елементами цих множин визначено зв'язки, $c_{lt} \in R$ – їхнє числове значення (ваги). Величини c_{lt} (вхідні дані) задамо несиметричною матрицею.

Із елементів однієї із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворимо комбінаторну множину Ω – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (в даному випадку це – перестановки). На елементах ω комбінаторної множини Ω введемо цільову функцію $F(\omega)$. Необхідно знайти елемент ω^* множини Ω, для якого $F(\omega)$ набуває екстремального значення за виконання заданих обмежень.

Для розв'язання транспортної задачі методом структурно-алфавітного пошуку [22] зведемо її до задачі про призначення. Множину $A=\{a_1,...,a_n\}$ подамо множиною $A^{'}=\{a^{'}_{1_1},...$ $\dots,a^{'}_{1_{s^*}},..., a^{'}_{n_1},..., a^{'}_{n_{s^*}}\}$, де елемент $a^{'}_{l_\chi}$ визначає найменшу частину продукції від загальної $a_l \subset A$, яка в будь-якій комбінації з іншими $a^{'}_{l_r}$ повністю задовольняє попит будь-якого пункту $b_t \subset B$, тобто умовно приймемо, що $a^{'}_{l_r}=1$, $\chi, r \in \{l_1,...,l_{s^*}\}$, а $\sum_{\zeta=1}^{1_{s^*}} a^{'}_{1_\zeta}=a_1,...,\sum_{\zeta=1}^{n_{s^*}} a^{'}_{n_\zeta}=a_n$, де l_{χ^*} – кількість елементів $a^{'}_{l_\chi}$ в $a_l \subset A$. Аналогічно, множину $B=\{b_1,..., b_{\tilde{n}}\}$ подамо упорядкованою множиною $B^{'}=\{b^{'}_{1_1},..., b^{'}_{1_p},..., b^{'}_{\tilde{n}_1},..., b^{'}_{\tilde{n}_p}\}$, де елемент $b^{'}_{t_\tau}$, $\tau \in \{s_1,...,s_p\}$, дорівнює одній одиниці продукції від загальної $b_t \subset B$, а $\sum_{\zeta=1}^{1_p} b^{'}_{1_\zeta}=b_1,...,\sum_{\zeta=1}^{n_p} b^{'}_{n_\zeta}=b_n$, де s_p – кількість елементів $b^{'}_{t_\tau}$ у $b_t \subset B$.

Вартість перевезень в транспортній задачі задається несиметричною комбінаторною матрицею $Q(\omega^k)$ (комбінаторна функція $\beta\big(f(j),$ $\omega^k)|_1^m\big)$, а для ω^k-го варіанта розв'язання задачі введемо (0,1)-матрицю C (функція $\varphi(j)|_1^m$), де $m=n\cdot\tilde{n}$. Її елемент $c^{'}_{l_\sigma t_\tau}=1$, якщо з a_l вибирається одиниця продукції $a^{'}_{l_\chi} \in a_l \subset A$ і перевозиться в пункт споживання, якому необхідно $b^{'}_{t_\tau} \in b_t \subset B$ одиниць. В іншому разі $c^{'}_{l_\chi t_\tau}=0$. Тобто, одному елементу продукції з $A^{'}$ відповідає один пункт споживання з $B^{'}$. Розв'язання цієї задачі знаходиться на множині перестановок, причому виконується транспозиція або стовпців, або рядків матриці $Q(w^k)$. Цільова функція зводиться до виразу $F(\omega^k)=\sum_{j=1}^m \beta_j\big(f(j), \omega^k\big)\varphi(j)$. Аналогічно формулюється задача про призначення, яка також задається на двох множинах: $A=\{a_1,..., a_n\}$, де $a_l \in A$ відповідає l-му претенденту, і $B=\{b_1,...$ $...,b_{\tilde{n}}\}$, де $b_t \in B$ відповідає t-й посаді. Між елементами $a_l \in A$ і $b_t \in B$ визначено зв'язки. Таким чином транспортна задача зводиться до задачі про призначення.

Задача з теорії масового обслуговування. Третя підзадача, яку отримуємо після розбиття основної задачі, належить до теорії масового обслуговування і полягає у визначенні потужності сервісних об'єктів (ремонтних майстерень) в залежності від заявок, що надходять від замовника. Позначимо підмножиною $Z^t=\{z_1^t,...,z_{\xi^t}^t\}$ заявки, що надходять в t-у майстерню від ξ^t замовників, а $z_r^t=\{\tilde{z}_{r1}^t,...,\tilde{z}_{r\tilde{\xi}^t}^t\}$ – заявки від r-го замовника в t-у майстерню, де $\tilde{z}_{r\gamma}^t$ – одна заявка, $\tilde{\xi}^t$ – кількість заявок, $\gamma \in \{1,...,\tilde{\xi}^t\}$. Оскільки $\tilde{\xi}^t$ – величина випадкова, то виникає ситуація невизначеності. Вважатимемо, що $z_r^{'t}=\{z_{r1}^{'t},...,z_{r\xi^{'t}}^{'t}\} \subset$ $\subset Z^t$ – найбільша кількість заявок, яка може надійти в t-у майстерню від r-го замовника. Тоді необхідно визначити таке сполучення без повторень $\mu^\lambda \in M$ елементів $z_{r\gamma}^{'t}$ з множини Z^t, коли потужність майстерні була б збалансована, тобто $\Phi_t(\mu^\lambda) \approx \sum_{r=1}^{\xi^t}\sum_{\gamma=1}^{\tilde{\xi}^t}\tilde{\Phi}_{r\gamma}$, де $\Phi_t(\mu^\lambda)$ – потужність t-ї майстерні, $\tilde{\Phi}_{r\gamma}$ – кількість заявок від r-го замовника, які надійшли в t-у майстерню, M – множина сполучень без повторень. Для розв'язання аналогічних задач в теорії масового обслуговування розроблено багато підходів [21].

Отже, задача розподілення мережі сервісних об'єктів полягає у визначенні такої їхньої кількості на певній території (пошук такого ρ^k), за яких мінімізуються витрати на перевезення продукції і матеріалів (пошук перестановки $\omega^i \in \Omega$). При цьому необхідно визначити потужність майстерень, яку можна збалансувати з кількістю ймовірних заявок. В результаті необхідно знайти такі $\rho^{k^*} \in \Theta$, $\omega^{i^*} \in \Omega$, $\mu^{\lambda^*} \in M$, для яких

$$\tilde{F}(\rho^{k^*},\omega^{i^*},\mu^{\lambda^*}) = \\ = \min_{\substack{\rho^k\in\Theta \\ \omega^i\in\Omega \\ \mu^\lambda\in M}}(f_1(\rho^k,\omega^i,\mu^\lambda) + f_2(\rho^k,\omega^i,\mu^\lambda) + v + \tilde{v}),$$

де $f_1(\rho^k,\omega^i,\mu^\lambda)$ – вартість перевезень матеріалів з центру до сервісних об'єктів, $f_2(\rho^k,\omega^i,\mu^\lambda)$ – вартість перевезень приладів, які потребують ремонту, до сервісних об'єктів, v_t – вартість матеріалу, $v_ç$ – вартість витрат на зарплатню, енергію, технологічне устаткування тощо.

Розв'язання задачі розподілення мережі сервісних об'єктів методом структурно-алфавітного пошуку

Описані в літературі методи і алгоритми ґрунтуються на частковому переборі варіантів. Але існують підходи, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, наприклад метод найближчого сусіда, «жадібний» алгоритм тощо. До них належить і метод північно-західного кута. Ці методи і алгоритми ефективні за швидкодією, але розв'язок при цьому може бути далекий від оптимального. З цієї причини другому підходу в літературі достатньої уваги не приділяють. Описаний далі метод структурно-алфавітного пошуку також ґрунтується на розпізнаванні структури вхідної інформації. Цей метод, з використанням значної переваги за швидкодією, за структурою вхідних даних, дозволяє поліноміально знаходити аргумент, для якого цільова функція набуває глобального або наближеного до нього розв'язання.

Знаходження оптимального розв'язання в задачах комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку проводиться за функціями натурального аргументу, упорядкованими за зростанням або спаданням значень. За розробленими правилами знаходять послідовність локальних екстремумів $F = (F(w^1), ..., F(w^{k^*}), ..., F(w^{q^*}))$ таких, що $F(w^{k^*}) = \text{glob} \operatorname*{extr}_{w^k\in W} F(w^k)$, де $\text{extr} = \{\min, \max\}$, $w^{q^*}, w^{k^*} \in W$, $k,\ k^*,\ q^* \in \{1,...,n!\}$, q^* – кількість локальних екстремумів.

Метод структурно-алфавітного пошуку ефективний для задач, аргументом цільової функції в яких є перестановка, а також на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій, оскільки цільова функція на цих підмножинах змінюється так, як і на множині перестановок. В задачі розподілення мережі сервісних об'єктів цим методом знаходимо розв'язання на підмножині ізоморфних розбиттів n-елементної множини на підмножини для задачі кластеризації і на перестановках в транспортній задачі. Оптимальне розв'язання для цієї задачі визначається на двох комбінаторних множинах: на множині розбиттів n-елементної множини на підмножини знаходять за однією обчислювальною схемою, а на множині перестановок – за іншою.

Розглянемо $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \ldots$ $\ldots, \beta_m(f(m), w^k)) \in H$ – комбінаторну функцію, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1,...,a_n\}$, $\beta(f(j),\ w^{'i})|_1^m \in H'$ – комбінаторну функцію, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w^{'i} \in W'$, утворена з елементів базової множини $\widetilde{A}_m = \{\widetilde{a}_1,...,\widetilde{a}_m\}$, H і H' – відповідно системи цих функцій. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w^{'1})|_1^m$, а $w^1, w^{'1}$ – комбінаторні конфігурації одного типу і $\beta(f(j),w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j),w^{'1})|_1^m \in H^{'}$, то $H \subset H^{'}$ і $W \subset W^{'}$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою. Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\vec{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$), де $\vec{\beta}(f(j), w^{'i}) \geq \vec{\beta}(f(j+1), w^{'i})$ (або $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\vec{\varphi}(j)|_1^m$), де $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\vec{\varphi}(j) \geq \vec{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$, назвемо упорядкованою.

Методом структурно-алфавітного пошуку за упорядкованими комбінаторною та числовою функціями за розробленими правилами, починаючи з найменших або найбільших значень з урахуванням структури вхідних даних і комбінації елементів у рядках і стовпцях заданої матриці, знаходимо локальний оптимум і для нього визначаємо підмножину комбінаторних конфігурацій, яка містить глобальне розв'язання. Потім у знайденій підмножині за другим, третім і подальшими елементами варіанту розв'язання задачі знаходимо другий, третій і наступні локальні оптимуми, значення яких зменшуються або не змінюються. У кожній одержаній підмножині комбінаторних конфігурацій виділяються менші підмножини, які можуть містити глобальне розв'язання. Тим самим звужуються межі його пошуку. Пошук оптимального розв'язання за цією схемою виконується так, як пошук слова у словнику. Доведення твердження, що за допомогою цього методу поліноміально знаходимо глобальний або близький до глобального оптимум, проводиться з використанням підкласів розв'язних задач.

Отже, методом структурно-алфавітного пошуку розв'язуємо транспортну задачу на множині перестановок і задачу кластеризації на підмножині ізоморфних розбиттів n-елементної множини на підмножини. Оскільки на всій множині Θ з використанням функції (1) маємо ситуацію невизначеності, оптимальне розв'язання знаходимо самоналагоджувальним алгоритмом [23].

Моделювання цільової функції в задачі збереження довкілля з використанням теорії комбінаторної оптимізації

При моделюванні процесів, пов'язаних із збереженням довкілля розглядають наслідки впливу людської діяльності на природу. Цю задачу інколи відносять до антагоністичних ігор двох учасників з прямо протилежними інтересами і називають іграми проти природи [28]. Задача полягає в тому, що при переході від однієї ситуації до іншої з збільшенням (зменшенням) виграшу одного з гравців чисельно однаково зменшується (збільшується) виграш другого гравця. Їх ще називають іграми двох осіб з нульовою ставкою. Розумна поведінка гравців здійснюється на підставі принципу максиміну. Далі наведемо математичну постановку задачі збереження довкілля, розроблену з використанням теорії комбінаторної оптимізації [29].

Задачу збереження довкілля розглянемо як гру двох гравців:

- мораль суспільства,
- збагачення суспільства (зокрема збагачення його правлячої верстви).

Вважатимемо, що рівень моралі та спосіб збагачення суспільства – критерії, за якими оптимізується цільова функція. Під цією функцією розумітимемо таке її числове значення, яке визначає рівень здоров'я довкілля, людини і суспільства загалом. Задача полягає у знаходженні між цими критеріями такої рівноваги, щоб суспільство і природа співіснували комфортно. Як відомо, на певному етапі збагачення суспільства його мораль починає знижуватися. Наступає момент, коли заради збагачення нехтують законами природи, відповідно і законами моралі, що призводить до руйнації суспільства загалом, втрачаються всі накопичені матеріальні цінності. В літературі аналогічну ситуацію названо «трагедией общин» [30, 31].

Введемо множини $A = (a_1, \ldots, a_n)$, кожен елемент $a_j, j \in (1, \ldots, n)$ якої відповідає ознакам, які характеризують рівень моралі суспільства; $B = \{b_1, ..., b_n\}$, кожен елемент b_j якої визначає числову оцінку рівня моралі суспільства; $\tilde{A} = (\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n)$, кожен елемент $\tilde{a}_l$, $l \in \{1, ..., n\}$, відповідає ознакам, які характеризують способи збагачення суспільства; $\tilde{B}=\{\tilde{b}_1,...,\tilde{b}_n\}$, кожен елемент якої $\tilde{b}_l$ визначає числову оцінку способу збагачення суспільства.

Отже, задача збереження довкілля задається двома множинами A і $\tilde{A}$, між елементами яких відсутні зв'язки. Вхідними даними є скінченні послідовності $B=\{b_1,...,b_n\}$ і $\tilde{B}=\{\tilde{b}_1,...,\tilde{b}_n\}$. Ця задача належить до другого типу.

Змоделюємо цільову функцію і визначимо її аргумент.

Вважатимемо, що кожному елементу b_j множини B відповідає елемент $\tilde{b}_j$ з множини $\tilde{B}$ і $b_j,\ \tilde{b}_j \in \{-1,...,0,...,1\}$, $b_j, \tilde{b}_j$ – дійсні числа. Якщо добробут суспільства забезпечує гармонійний його розвиток і не шкодить природі, то ці величини додатні і $b_j, \tilde{b}_j \geq \varepsilon$, $b_j = \tilde{b}_j$, $\varepsilon > 0$ – мінімальне значення, коли можлива розумна поведінка гравців. Якщо $b_j,\ \tilde{b}_j \in \{\tilde{\varepsilon},...,\varepsilon\}$, де $\tilde{\varepsilon} < 0$ – найбільше значення, за якого не руйнується природа, то маємо антагоністичну гру двох учасників з протилежними інтересами. Якщо $b_j, \tilde{b}_j < \tilde{\varepsilon}$, тоді руйнується мораль суспільства, знищується природа, втрачаються всі накопичені матеріальні цінності. Тобто, виникає ситуація, коли виграє один гравець (який збагачується), але в результаті програють обидва.

В процесі розв'язання задачі з кожної множини $A=(a_1,...,a_n)$ і $\tilde{A}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n)$ вибиранням певної кількості елементів утворюються сполучення без повторення, що є аргументом цільової функції. З елементів множин $A=(a_1,...,a_n)$ і $\tilde{A}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n)$ утворимо дві комбінаторні множини W і $\tilde{W}$. На цих множинах уведемо цільову функцію $F(w,\tilde{w})$, де $w \in W$ і $\tilde{w} \in \tilde{W}$ – сполучення без повторень. Задача полягає в пошуку таких $w^* \in W$ і $\tilde{w}^* \in \tilde{W}$, для яких уведена цільова функція $F(w,\tilde{w})$ набуває максимального значення за умови, що $F(w^*,\tilde{w}^*) \geq \delta$, де δ – мінімальна величина, за якої природа і суспільство існують комфортно, добробут суспільства використовується на його розвиток і не руйнується довкілля.

Змоделюємо вхідні дані функціями натурального аргументу $\varphi(j)|_1^n$, $\tilde{\varphi}(j)|_1^n$ та комбінаторними функціями $\beta(f(j), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$ і $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$. Якщо з множини A вибрати елемент a_j, то $\beta_j(f(j), w^k, \tilde{w}^i)=1$. В іншому разі $\beta_j(f(j), w^k, \tilde{w}^i)=0$. Відповідно, якщо з множини $\tilde{A}$ вибрати елемент $\tilde{a}_l$, то $\tilde{\beta}_l(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)=1$. В іншому разі $\tilde{\beta}_l(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)=0$. Оскільки поставлена задача розв'язується на двох комбінаторних множинах, то функції $\beta(f(j), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$ і $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$ залежать від двох змінних: $w \in W$ і $\tilde{w} \in \tilde{W}$.

Цільова функція в цій задачі оптимізується за двома критеріями, які змоделюємо як середню величину сумарного добутку значень функції натурального аргументу та комбінаторної функції:

$$F^{(1)}(w^k, \tilde{w}^i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j(f(j), w^k, \tilde{w}^i)\,\varphi(j)}{q'}$$ і

$$F^{(2)}(w^k, \tilde{w}^i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_j(\tilde{f}(j), w^k, \tilde{w}^i)\,\tilde{\varphi}(j)}{q''},$$ а

$F(w^k, \tilde{w}^i) = \sum_{t=1}^{2} F^{(t)}(w^k, \tilde{w}^i)$; де q' – кількість одиниць в $\beta(f(j), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$, q'' – кількість одиниць в $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$.

Множини W і $\tilde{W}$ складаються з підмножин ізоморфних сполучень без повторень. Оскільки пошук оптимального розв'язання проводиться на всіх їхніх елементах, то в процесі розв'язання задачі з використанням виразів $F^{(1)}(w^k, \tilde{w}^i)$ і $F^{(2)}(w^k, \tilde{w}^i)$ може виникнути ситуація невизначеності, пов'язана зі структурою аргументу цільової функції [32]. Тому задача полягає в знаходженні такої підмножини ізоморфних сполучень без повторень, яка містить оптимальний розв’язок, що збігається з метою дослідження за умови $F(w^k, \widetilde{w}^i) > \delta$.

Отже, якщо значення цільової функції дорівнює двом або не менше за величину δ, то природа і суспільство існують комфортно, добробут суспільства використовується на його розвиток. В іншому разі руйнується мораль суспільства, знищується природа. Цільова функція в задачі збереження довкілля залежить від двох змінних, якими є сполучення без повторень. На відміну від інших задач комбінаторної оптимізації, які за цією ознакою розділяються на підзадачі з послідовним розв’язанням, розв’язання цієї задачі знайдемо одночасно на двох комбінаторних множинах.

Висновки. Системний аналіз прикладних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації дозволяє вивчати властивості георозподілених динамічних систем на загальному рівні, виявляти задачі оптимізації комбінаторного типу, будувати математичні моделі та на основі останніх розробляти ефективні алгоритми для їх розв’язання. Так, задача розподілення мережі сервісних об’єктів розділяється на три підзадачі: задачу кластеризації, аргументом цільової функції в якій є розбиття *n*-елементної множини на підмножини; транспортну задачу, аргументом цільової функції в якій є перестановка, і задачу з теорії масового обслуговування. Ця задача потребує для розв’язання розроблення гібридних алгоритмів. В процесі розв’язання підзадачі кластеризації та визначення потужності сервісних об’єктів виникає ситуація невизначеності. Для її вирішення необхідно розробляти самоналагоджувальні алгоритми, що характерно для проектування систем обчислювального інтелекту.

1. *Размещение* отраслей народного хозяйства СССР / Под ред. А.Д. Данилова, Г.И. Мухина – М.: Госпланиздат, 1960 – 331 с.
2. *Михалевич В.С.*, *Трубин В.А.*, *Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
3. *Геопространственные* производственные системы. Ч. 1. Анализ, моделирование, проектирование / В.М. Ілюшко, О.Э. Федорович, О.Н. Замирец и др. – Харьков: ХАИ, 2011. – 249 с.
4. *Греков Л.Д.* Методологічні основи створення георозподілених виробничих систем: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Харків, 2012. – 37 с.
5. *Гриценко В.И.*, *Панченко А.А.*, *Лапа А.П.* Проблемно-ориентированное моделирование производственно-транспортных систем. – Киев: Наук. думка, 1987. – 158 с.
6. *Зайдельман Ф.Р.* Мелиорация почв. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 448 с.
7. *Поливода О.В.*, *Рудакова А.В.* Методы оперативного управления влагообеспечением в ирригационных системах с прогнозирующей моделью // System Analysis and Inform. Technol., 15-th Inter. Conf. SAIT 2013, Kyiv, Ukraine, May 27–31, 2013. Proc. Inst. for Applied System Analysis of National Techn. Univ. of Ukraine «KPI» – Kyiv, Ukraine. 2013. – P. 165.
8. *Бардась О.О.* Використання експертних систем при прогнозуванні прибуття поїздів на станцію // Матем. та прогр. забезпеч. інтел. систем (*MPZIS*–2012). X Ювілейна Міжнар. наук.-практ. конф. Тези доп. 21–23 лист. 2012 р. Дніпропетровськ. Дніпропетровськ. ун-т ім. Олеся Гончара. 2012. – С. 20–21.
9. *Агеев А.А.*, *Гимарди Э.Х.*, *Курочкин А.А.* Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на цепи с одинаковыми производственными мощностями предприятий // Дискет. анализ и исслед. операций. – 2009. – Т. 16, № 5. – С. 3–16.
10. *Береснев В.Л.*, *Мельников А.А.* Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Там же. – 2010. – Т. 17, № 6. – С. 3–19.
11. Васильев И.Л., Климентова К.Б. Метод ветвей и отсечений для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Там же. – 2009. – Т. 16, № 2. – С. 21–41.
12. *Горбачевская Л.Е.* Полиномиально разрешимые и *NP*-трудные двухуровневые задачи стандартизации: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск. – 2007. – 18 с.
13. *Федорович О.Е.*, *Греков Л.Д.*, *Западня К.О.* Оптимизация размещения георaспределенной производственной системы на земной поверхности // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2011. – № 2 (50). – С. 107–111.
14. *Baumrucker B.T.*, *Biegler L.T.* MPEC strategies for cost optimization of pipeline operations / Comput. and Chem. Eng. – 2010. – **34**, № 6. – P. 900–913.
15. *Godinho Pedro*, *Dias Joana*. A two-player competitive discrete location model with simultaneous decisions / Eur. J. Oper. Res. – 2010.– **207**, № 3. – P. 1419–1432.
16. *Атаян Н.Х.* Макроэкономическая концептуальная оценка эффективного развития российского нефтегазового комплекса и моделирование синергетики межгосударственной и межрегиональной мэзоорганизации // Управление и высокие технологии – 2008. – № 3 – С. 19–26.

17. *Орешин А.Н., Тукелев А.В.* Методика оптимизации организации контроля технического состояния объектов телекоммуникаций // Телекоммуникации. – 2006. – № 8. – С. 2–5.
18. *Занчева Ф.Н.* Применение аппроксимационно-комбинаторного метода для решения задачи размещения складов (с учетом потерь) с ограниченными объектами. // Оптимизация и моделирование сложных систем: Сб. науч. тр. – Алма-Ата, 1976. – С. 3–6.
19. *Гимарди Э.Х., Курочкин А.А.* Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19, № 6. – С. 9–22.
20. *Петров Э.Г., Писклакова В.П., Бескоровайный В.В.* Территориально-распределенные системы обслуживания. – К.: Техника, 1992. – 208 с.
21. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
22. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: Автореф. дис... докт. техн. наук. – Київ. – 2007. – 32 с.
23. *Тимофеева Н.К.* О природе неопределенности и переменных критериях в задачах разбиения // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 88–99.
24. *Monge G.* Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais // Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année M. DCCLXXXI, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique, pour la même Année, Tirés des Registres de cette Académie. – Paris, 1781. – P. 666–704.
25. *Данциг Д.Б.* Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
26. *Канторович Л.В., Гавурин М.К.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – С. 110–138.
27. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
28. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1984. – 496 с.
29. *Тимофієва Н.К.* Моделювання цільової функції в задачі збереження навколишнього середовища з використанням теорії комбінаторної оптимізації // «Автоматика–2012»: Матеріали XIX міжнар. конф. з автоматичного управління, 26–28 верес. 2012 р. – Київ, Україна. – К.: НУХТ, 2012. – С. 65–66.
30. *Hardin G.* The Tragedy of the Commons // Science. – 1968. – **162**, N 3859. – P. 1243-1248.
31. *Рыжкова М.В., Иваненкова Е.Д.* Экспериментальная проверка «Трагедии общин» // Современ. пробл. науки и образов. – 2013. – № 2. – *www.science-education.ru*/108-8820
32. *Тимофієва Н.К.* Про розв'язання задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності // Вісн. Вінницьк. політехн. ін-ту. 2012 – № 6. – С. 157–162.

Поступила 25.11.2013
Тел. для справок: (044) 502-6365 (Киев)
E-mail: *tymnad@gmail.com*

●

Н.К. Тимофеева, В.И. Гриценко

Моделирование и решение прикладных задач комбинаторной оптимизации, возникающих в интеллектуальных georаспределенных динамических системах

Введение. Одной из основных составляющих современной экономики есть такие промышленные комплексы, как транспортные и телекоммуникационные сети, системы нефте- и газодобычи, распределенные сервисные объекты на определенной территории, оросительные системы и др. [1–20]. Им для работы необходимы разработки многоуровневых распределенных компьютерных систем управления. Такие комплексы называют георaспределенными производственными системами. В процессе их проектирования и эксплуатации необходимо решать много проблем, связанных с наличием земельного ресурса для расположения технологических объектов и инженерных сооружений, оптимальным размещением этих объектов на определенной территории, решать проблемы экономического характера, необходимо учитывать и экологическое состояние окружающей среды, а также принимать оптимальное решение в условиях неопределенности разной природы и прогнозировать поведение системы во времени. Для решения ситуации неопределенности используют разные подходы, в частности и способы, связанные с вычислительным интеллектом.

Поскольку геораспределенные системы получают ресурсы из окружающей среды, то они есть открытой динамической структурой. Как правило, в них рассматриваются динамические задачи, которые относятся к управленческим проблемам. К тому же, прикладные задачи оптимизации, которые сводятся к задачам комбинаторной оптимизации, могут быть как статическими так и динамическими.

Интеллектуальными геораспределенными динамическими системами назовем производственные, или сервисные промышленные комплексы, которые распределены на определенной территории, имеют координаты и управляются как централизованно, так и в автономном режиме с помощью распределенных компьютерных систем управления и есть открытыми динамическими структурами. Для разработки и эксплуатации они нуждаются в разнообразных подходах, в частности и способах, связанных с вычислительным интеллектом. При размещении новых производственных комплексов можно использовать существующие ресурсы (транспортные сети, телекоммуникации и др.). Среди них выделим:

- магистральные производственные комплексы (железные и автомобильные дороги, нефте- и газодобычу);
- сервисные объекты, размещенные на определенной территории и использующие существующие транспортные и другие ресурсы. Это – ремонтные мастерские, банки, сеть аптек и магазинов и др.;
- авиаперевозки, в которых используются как земельные ресурсы, так и воздушное пространство;
- телекоммуникационные сети, которым для передачи информации необходимы земельные ресурсоы, прокладки каналов связи под землей и под водой, воздушное пространство и телекоммуникационные космические системы;
- оросительные системы, занимающие определенную территорию и требуют размещения на ней датчиков для сбора текущей информации о состоянии почвы.

Разработка и эксплуатация интеллектуальных геораспределенных динамических систем требует решения проблем оптимизации, среди которых выделим такие:

- решение ряда оптимизационных задач, которые сводятся к задачам комбинаторной оптимизации;
- оптимальное использование земельных ресурсов;
- разработку баз знаний и интеллектуализацию систем управления для принятия решений в условиях неопределенности;
- разработку способов прогнозирования работы геораспределенных динамических систем;
- оптимизацию затрат на разработку и эксплуатацию геораспределенных динамических систем;
- оптимальное решение экологической проблемы.

Далее рассмотрим задачи оптимизации, возникающие при разработке и эксплуатации геораспределенных динамических систем и сводимые к задачам комбинаторной оптимизации. Разные классы задач нуждаются в специальных подходах к решению. Построение математических моделей прикладных задач в рамках теории комбинаторной оптимизации позволяет выявить их характерные свойства, сформулировать для них адекватную математическую постановку, которая упростит разработку новых или использование известных алгоритмов для эффективного решения.

Общая характеристика задачи распределения сети сервисных объектов

Проблема размещения предприятий, к которой относится задача распределения сети сервисных объектов на определенной территории, исследована достаточно основательно [2, 9–15, 18, 19]. Математические модели этих задач разрабатывались и разрабатываются в рамках целочисленного линейного программирования. Построенные модели имеют свойства, характерные для транспортной задачи и ее обобщения, поэтому их иногда сводят к этой задаче. Некоторые из них моделируются в рамках теории массового обслуживания [5, 21]. Для решения задачи оптимального размещения предприятий используются методы декомпозиции, универсальные и специальные методы математического программирования как точные, так и приближенные [2, 9–11, 19]. Поскольку в задаче размещения предприятий имеется перебор вариантов, то она относится к задачам комбинаторной оптимизации. В [18] описан способ решения задачи размещения складов, в котором использован аппроксимационно-комбинаторный подход. В [3, 19] для моделирования задачи размещения предприятий используют теорию графов, а в [4] – перечислительную комбинаторику, при использовании которой определяют количество вариантов их размещения. Но при решении прикладных задач этого класса необходимо найти не количество вариантов, а смоделировать целевую функцию и определить ее аргумент (комбинаторную конфигурацию), для которого она принимает оптимальное значение.

Следовательно, задача распределения сети сервисных объектов на определенной территории заключается в нахождении такого их оптимального количества, при котором все потенциальные заказчики, которые относятся к этой территории, могли бы воспользоваться услугами таких объектов при условии минимального расстояния между ними и минимальными затратами на обслуживание, например ремонт приборов. Для минимизации затрат на перевозку и ремонт необходимо построить математическую модель «заказчик–исполнитель», в которой основным условием может быть уменьшение расстояния от заказчика к исполнителю, что влияет на снижение цены на услуги.

В задаче распределения сети сервисных объектов выделим такие варианты:

- количество заказчиков и количество сервисных объектов известно;
- количество заказчиков и количество сервисных объектов неизвестно;
- количество заказчиков известно, а количество сервисных объектов необходимо определить;
- количество заказчиков неизвестно, а количество сервисных объектов известно.

В литературе описаны задачи размещения предприятий, в которых их количество заранее задано и известна территория для их расположения [2, 18]. В условиях конкуренции размещение предприятий проводится в динамическом режиме. Рядом может быть размещено несколько однотипных обслуживающих центров [10, 11]. В [15] задача размещения обслуживающих центров рассматривается как игра двух игроков.

Приведем общую постановку задачи комбинаторной оптимизации и сформулируем ее [22]. Задачи этого класса, как правило, задаются одним или несколькими множествами, например A и B, элементы которых имеют любую природу. Назовем эти множества *базовыми*. Имеются два типа задач. В *первом* типе каждое из этих множеств можно подать в виде графа, вершинами которого есть его элементы, а каждому ребру поставим в соответствие число $c_{lt} \in R$, которое называют *весом* ребра (R – множество вещественных чисел); $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – количество элементов множества A, $\tilde{n}$ – количество элементов множества B. Положим, что $n = \tilde{n}$. Между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых назовем *весами*. Величины c_{lt} назовем *входными* данными и зададим их матрицами. Во *втором* типе задач между элементами заданного множества связей не существует, а весами есть числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов, числовые значения которых задаются конечными последовательностями, которые также – входные данные. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одной или нескольких заданных множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1,... ...,n\}$, образуется комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки разных типов, разбиния и пр.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого $F(w)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений, т.е. функционал $F(w^*) = \operatorname{glob} \operatorname*{extr}_{w \in W^0 \subset W} F(w)$, где $\operatorname{extr} = \{\min, \max\}$, W^0 – подмножество, определяемое ограничениями задачи.

Выделим задачи по способу вычисления целевой функции, в которых для определенного варианта решения ее значение вычисляется одновременно. Такие задачи назовем *статическими*. Задачи, в которых в процессе решения генерируется текущая информация, по которой оценивается результат, а поиск оптимального решения проводится поэтапно с вычислением частичных сумм целевой функции, назовем *динамическими*.

Смоделируем входные данные задачи комбинаторной оптимизации первого типа конечными последовательностями. Представим элементы h наддиагоналей симметричной комбинаторной матрицей $Q(w^k)$ комбинаторной функцией $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),..., \beta_m(f(m), w^k))$, а элементы h наддиагоналей симметричной матрицей c – функцией натурального аргумента $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, где $m = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$ – количество элементов h наддиагоналей матриц C и $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхний индекс k ($k \in \{1,...,q\}$) в w^k – порядковый номер w^k в W. Если матрицы $Q(w^k)$ и C – несимметричные, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$ содержат все их элементы, а $m = n^2$ (или $m = n\tilde{n}$). Функция цели $F(w^k)$ примет вид

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\,\varphi(j). \qquad (1)$$

Построение математических моделей задач комбинаторной оптимизации, как правило, проводится с использованием задачи целочисленного линейного программирования, которая формулируется в таком виде. Найти экстремум функции $\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_l\, x_l$ при условиях $\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{sl}\, x_l = \tilde{b}_s$, $s = \overline{1, p}$, $x_l \geq 0$, $l = \overline{1, n}$, x_l – целые для $l = \overline{1, p}$, $p \leq n$, $\tilde{c}_l, \tilde{a}_{sl}, \tilde{b}_s$ – заданные целые числа, x_l – переменные. Исходя из этой модели, считаем, что целевая функция в комбинаторной оптимизации зависит от многих переменных, а x_l – элементы комбинаторной конфигурации $w = (w_1,..., w_n)$ и перемножаются на заданные числа $\tilde{c}_l, \tilde{a}_{sl}$. Но это невозможно, поскольку w_l могут иметь любую природу. Переменные x_l не являются элементами w, а модель целочисленного линейного программирования не отражает сути задач комбинаторной оптимизации. Целочисленное линейное программирование разрабатывалось для экономических задач, относящихся ко второму типу, для которых математическая постановка формулируется так: задано одно множество A, элементы $a_l \in A$ которого не имеют между собой связей. Зато каждый элемент $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, характеризуется определенным свойством (весом) x_l. Аргументом целевой функции в них, как правило, есть выборки (сочетания, размещения), а входные данные – последовательность значений весов $x_1,..., x_n$ элементов a_l заданного множества A, количество которых совпадает с количеством элементов w. Отсюда утверждение, что аргументом целевой функции в этих задачах есть последовательность входных данных $x_1,..., x_n$, а не комбинаторная конфигурация $w = (w_1,..., w_n)$. Соответственно считают, что целевая функция в задачах комбинаторной оптимизации зависит от многих переменных.

Последовательность $x_1, \ldots, x_n$ – входные данные определенной задачи, а значение x_l неявно зависит от комбинаторной конфигурации w, т.е. выражение $\sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_l\, x_l$ необходимо записать так: $F(w) = \sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_l\, x_l(w)$. Тогда возникает проблема определения этой зависимости в задачах комбинаторной оптимизации, для чего необходимо разрабатывать их математические постановки с учетом комбинаторной природы. К тому же при использовании целевой функции $F(w) = \sum_{l=1}^{n} \tilde{c}_l \, x_l(w)$ на комбинаторных множествах, состоящих из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций, возникает ситуация неопределенности [23].

Для моделирования прикладных задач в рамках теории комбинаторной оптимизации необходимо:

• по способу вычисления целевой функции определить вид задачи (статическая или динамическая);

• определить базовые множества, которыми задается определенная задача;

• по входным данным определить ее тип;

• определить аргумент целевой функции (комбинаторную конфигурацию);

• смоделировать целевую функцию.

Уточним такие понятия, как критерий и целевая функция.

Критерий – признаки или свойства, характеризующие определенный объект или связи между объектами и служат входными данными.

Целевая функция – выражение, формулируемое на основе заданных критериев с учетом особенностей задачи, по которым вычисляется и оценивается результат ее решения.

Как правило, целевую функцию отождествляют с критериями, а в качестве ее аргумента принимают входные данные. Но для одних и тех же критериев целевую функцию можно смоделировать по-разному, т.е. оценка проводится по разным выражениям и дает разный результат. Ее аргументы – комбинаторные конфигурации разных типов (перестановки, сочетания, разбиение *n*-элементного множества на подмножества и др.). К тому же она может зависеть как от одной переменной, так и от многих (комбинаторных конфигураций). По этому признаку задачи комбинаторной оптимизации разделяются на подзадачи.

Учитывая сказанное, смоделируем задачу распределения сети сервисных объектов на определенной территории как задачу комбинаторной оптимизации.

Построение математической модели задачи распределения сети сервисных объектов с использованием теории комбинаторной оптимизации

Построим математическую модель распределения сети сервисных объектов при условии, что их количество заранее неизвестно, зато известно количество заказчиков и их местонахождение. Модель должна учитывать транспортные расходы и распределение заказов между сервисными объектами. Положим, что поставка материала проводится как централизованно из одного центра, так и из распределенных пунктов снабжения.

Моделирование задачи распределения сервисных объектов на определенной территории с использованием теории комбинаторной оптимизации показывает, что она разделяется на несколько подзадач: задачу кластеризации, транспортную задачу и задачу по теории массового обслуживания. Рассмотрим эти подзадачи.

Задача кластеризации. Для определения количества сервисных объектов необходимо исходить из количества всех известных заказчиков на определенной территории, которые обозначим множеством $A = \{a_1, ..., a_n\}$.

В результате решения задачи кластеризации количество сервисных объектов будет равно количеству полученных кластеров. Сформулируем математическую постановку этой задачи, входными данными в которой будут расстояния между заказчиками. Аргументом целевой функции в ней есть разбиение *n*-элементного множества на подмножество, которое обозначим $\rho^k \in \Theta$, где Θ – множество разбиений.

Эта задача задается одним множеством $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Числовые значения связей между элементами a_l, $a_t \in A$ (входные данные), которыми служат расстояния между заказчиками, представим симметричной матрицей $C = \| c_{lt} \|_{n \times n}$ (или функцией $\varphi(j)|_1^m$). Для задання распределения элементов множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ между подмножествами (кластерами) ρ_s^k фиксированного разбиения $\rho^k \in \Theta$ введем симметричную комбинаторную (0,1)-матрицу распределения $Q(\rho^k) = \| g_{lt}(\rho^k) \|_{n \times n}$ (или функцию $\beta(f(j), \ \rho^k)|_1^m$). Если $\beta(f(j), \rho^k) = 1$ (или $g_{ls}(\rho^k) = 1$), то элементы $a_l, a_t \in A$ находятся в одном кластере. Иначе $\beta(f(j), \rho^k) = 0$. Задача кластеризации заключается в поиске такого разбиения $\rho^k \in \Theta$ на непересекаемые кластеры, для которого целевая функция (1) принимает максимальное значение.

Поскольку нахождение оптимального решения проводится на всем множестве разбиений, то при использовании для оценки результата целевой функции (1) возникает ситуация неопределенности, т.е. для определенного упорядочения подмножеств изоморфных разбиений закономерность изменения значений выражения (1) изменяется одинаково независимо от входных данных. Для выхода из этой ситуации необходимо ввести дополнительные целевые функции, критерии или ограничения.

Математическая постановка транспортной задачи как задачи комбинаторной оптимизации. Для оптимизации перевозок необходимо решить транспортную задачу как внутри образованных кластеров, так и между кластерами. Это – вторая подзадача, аргументом целевой функции в которой будет перестановка $\omega^i \in \Omega$, где Ω – множество перестановок. При этом необходимо учитывать в зависимости от расстояния стоимость перевозок материалов от центрального поставщика и приборов, требующих ремонта, к этим объектам (например, ремонтных мастерских).

Транспортная задача формализирована еще в 1781 г. [24]. Как проблема линейного программирования она впервые рассмотрена в работе [25], поэтому эту задачу рассматривают как задачу линейного программирования специального вида и она есть подмножеством задач линейного программирования. Для решения транспортной задачи используют симплекс-метод, метод одновременного решения прямой и двойственной задачи, метод потенциалов, венгерский метод, динамическое программирование, метаэвристические подходы [2, 26, 27]. Эту задачу сводят еще к задаче коммивояжера или к задаче о ранце. Для поиска начального решения используют метод северо-западного угла, метод минимальных тарифов, а для окончательной оптимизации – метод потенциалов. Задача о назначениях – это частный случай классической транспортной задачи [27]. Задача о назначениях полиномиально решается венгерским алгоритмом.

Сформулируем однокритериальную транспортную задачу закрытого вида, в которой оптимизируется стоимость перевозки, как задачу комбинаторной оптимизации. Она задается двумя множествами A и B, где элементы $a_l \in A$, сооответствуют продукции, которую необходимо перевезти, а $b_t \in B$ – продукцию, которая потребляется заданным объектом. Между элементами этих множеств определены связи, $c_{lt} \in R$ – числовое их значение (веса). Величины c_{lt} (входные данные) зададим несимметричной матрицей.

Из элементов одного из заданных множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, образуем комбинаторное множество Ω – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (в данном случае это – перестановки). На элементах ω комбинаторного множества Ω введем целевую функцию $F(\omega)$. Необходимо найти элемент ω^* множества, для которого $F(\omega)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений.

Для решения транспортной задачи методом структурно-алфавитного поиска [22] сведем ее к задаче о назначениях. Множество $A = \{a_1,...,a_n\}$ представим множеством $A' = \{a'_{1_1},..., a'_{1_{s^*}},..., a'_{n_1},..., a'_{n_{s^*}}\}$, где элемент a'_{l_χ} определяет наименьшую часть продукции от общей $a_l \subset A$, которая в любой комбинации с другими a'_{l_r} полностью удовлетворяет спросу любого пункта $b_t \subset B$, т.е. условно примем, что $a'_{l_r} = 1$, $\chi, r \in \{l_1,...,l_{s^*}\}$, а $\sum_{\zeta=1}^{1_{s^*}} a'_{1_\zeta} = a_1,...,\sum_{\zeta=1}^{n_{s^*}} a'_{n_\zeta} = a_n$, где l_{χ^*} – количество элементов a'_{l_χ} в $a_l \subset A$. Аналогично множество $B = \{b_1, ...$ $..., b_{\tilde{n}}\}$ представим упорядоченным множеством $B' = \{b'_{1_1},...$ $..., b'_{1_p},..., b'_{\tilde{n}_1},..., b'_{\tilde{n}_p}\}$, где элемент b'_{t_τ}, $\tau \in \{s_1,...,s_p\}$, равен одной единице продукции от общей $b_t \subset B$, а $\sum_{\zeta=1}^{1_p} b'_{1_\zeta} = b_1,...,\sum_{\zeta=1}^{n_p} b'_{n_\zeta} = b_n$, где s_p – количество элементов b'_{t_τ} в $b_t \subset B$.

Стоимость перевозок в транспортной задаче задается несимметричной комбинаторной матрицей $Q(\omega^k)$ (комбинаторная функция $\beta(f(j), \omega^k)|_1^m$), а для ω^k-го варианта решения задачи введем (0,1)-матрицу C (функция $\varphi(j)|_1^m$). Ее элемент $c'_{l_\sigma t_\tau} = 1$, если из a_l выбирается единица продукции $a'_{l_\chi} \in a_l \subset A$ и перевозится в пункт потребления, которому необходимо $b'_{t_\tau} \in b_t \subset B$ единиц. В другом случае $c'_{l_\chi t_\tau} = 0$, т.е. одному элементу продукции из A' соответствует один пункт потребления из B'. Решение этой задачи находится на множестве перестановок, причем проводится транспозиция или столбцов, или строк матрицы $Q(w^k)$. Целевая функция сводится к выражению $F(\omega^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), \omega^k)\, \varphi(j)$. Аналогично формулируется задача о назначениях, которая также задается на двух множествах: $A = \{a_1,...,a_n\}$, где $a_l \in A$ отвечает l-му претенденту, и $B = \{b_1,..., b_{\tilde{n}}\}$, где $b_t \in B$ соответствует t-й должности. Между элементами $a_l \in A$ и $b_t \in B$ определены связи. Таким образом транспортная задача сводится к задаче о назначениях.

Задача по теории массового обслуживания. Третья подзадача основной задачи, относится к теории массового обслуживания и заключается в определении мощности сервисных объектов (ремонтных мастерских) в зависимости от заявок, поступающих от заказчика. Обозначим подмножеством $Z^t = \{z_1^t,..., z_{\xi^t}^t\}$ заявки, поступающие в t-ю мастерскую от ξ^t заказчиков, а $z_r^t = \{\tilde{z}_{r1}^t,..., \tilde{z}_{r\tilde{\xi}^t}^t\}$ – заявки от r-го заказчика в t-ю мастерскую, где $\tilde{z}_{r\gamma}^t$ – одна заявка, $\tilde{\xi}^t$ – их количество $\gamma \in \{1,..., \tilde{\xi}^t\}$. Поскольку $\tilde{\xi}^t$ – величина случайная, то возникает ситуация неопределенности. Положим, что $z_r'^t = \{z_{r1}'^t,..., z_{r\tilde{\xi}'^t}'^t\} \subset Z^t$ – наибольшее количество заявок, которое может поступить в t-ю мастерскую от r-го заказчика. Тогда необходимо определить такое сочетание без повторений $\mu^\lambda \in M$ элементов $z_{r\gamma}'^t$ из множества Z^t, при котором мощность мастерской была бы сбалансирована, т.е. $\Phi_t(\mu^\lambda) \approx \sum_{r=1}^{\xi^t} \sum_{\gamma=1}^{\tilde{\xi}^t} \tilde{\Phi}_{r\gamma}$, где $\Phi_t(\mu^\lambda)$ – мощность t-й мастерской, $\tilde{\Phi}_{r\gamma}$ – количество заявок от r-го заказчика, которые поступили в t-ю мастерскую, M – множество сочетаний без повторений. Для решения аналогичных задач в теории массового обслуживания разработано много подходов [21].

Следовательно, задача распределения сети сервисных объектов заключается в определении такого их количества на определенной территории (поиск такого ρ^k), при которых минимизируются затраты на перевозку продукции и материалов (нахождение перестановки $\omega^i \in \Omega$). При этом необходимо определить мощность мастерских, которая может быть сбалансирована с количеством возможных заявок. В результате необходимо найти такие $\rho^{k*} \in \Theta$, $\omega^{i*} \in \Omega$, $\mu^{\lambda*} \in M$, для которых $\tilde{F}(\rho^{k*}, \omega^{i*}, \mu^{\lambda*}) = \min\limits_{\substack{\rho^k \in \Theta \\ \omega^i \in \Omega \\ \mu^\lambda \in M}} (f_1(\rho^k, \omega^i, \mu^\lambda) + f_2(\rho^k, \omega^i, \mu^\lambda) + v + \tilde{v})$,

где $f_1(\rho^k, \omega^i, \mu^\lambda)$ – стоимость перевозок материалов из центра к сервисным объектам, $f_2(\rho^k, \omega^i, \mu^\lambda)$ – стоимость перевозок приборов, требующих ремонта, к сервисным объектам, v – стоимость материала, $\tilde{v}$ – стоимость затрат на зарплату, энергию, технологическое оборудование и пр.

Решение задачи распределения сети сервисных объектов методом структурно-алфавитного поиска

Описанные в литературе методы и алгоритмы основаны на частичном переборе вариантов. Но существуют подходы, базирующиеся на распознавании структуры входной информации, например метод ближайшего соседа, «жадный» алгоритм и др. К ним относится и метод северо-западного угла. Эти методы и алгоритмы эффективны по быстродействию, но результат решения при этом может быть далек от оптимального. По этой причине второму подходу в литературе достаточного внимания не уделяют. Далее описан метод структурно-алфавитного поиска, который также базируется на распознавании структуры входной информации. Этот метод при использовании значительного преимущества по быстродействию по структуре входных данных позволяет полиномиально находить аргумент, для которого целевая функция принимает глобальное или приближенное к нему решение.

Нахождение оптимального решения в задачах комбинаторной оптимизации методом структурно-алфавитного поиска проводится по функциям натурального аргумента, упорядоченным по возрастанию или убыванию их значений. По разработанным правилам находится последовательность локальных экстремумов $F = (F(w^1), \ldots$ $\ldots, F(w^{k*}), \ldots, F(w^{q^*}))$ таких, что $F(w^{k*}) = \operatorname{glob} \operatorname{extr}\limits_{w^k \in W} F(w^k)$,

где $\operatorname{extr} = \{\min, \max\}$, $w^{q^*}, w^{k*} \in W$, $k, k^*, q^* \in \{1 \ldots, n!\}$, q^* – количество локальных экстремумов.

Метод структурно-алфавитного поиска эффективен для задач, аргументом целевой функции в которых есть перестановка, а также на подмножестве изоморфных комбинаторных конфигураций, поскольку целевая функция на этих подмножествах изменяется так же, как и на множестве перестановок. В задаче распределения сети сервисных объектов этим методом находим решение на подмножестве изоморфных разбиений n-элементного множества на подмножества для задачи кластеризации и на перестановках в транспортной задаче. Оптимальное решение для этой задачи определяется на двух комбинаторных множествах: на множестве разбиений n-элементного множества на подмножества находимя по одной вычислительной схеме, а на множестве перестановок – по другой.

Рассмотрим $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \ldots, \beta_m(f(m), w^k)) \in H$ – комбинаторную функцию, аргумент которой – комбинаторная конфигурация $w^k \in W$, образованная из элементов базового множества $A_n = \{a_1, \ldots \ \ldots, a_n\}$, $\beta(f(j), w^{'i})|_1^m \in H'$ – комбинаторную функцию, аргументом которой есть комбинаторная конфигурация $w^{'i} \in W'$, образованная из элементов базового множества $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m\}$, H и H' – соответственно системе этих функций. Если $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w^{'1})|_1^m$, а $w^1, w^{'1}$ – комбинаторные конфигурации одного типа и $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$ и $W \subset W'$. Задачу комбинаторной оптимизации, входные данные в которой заданы функциями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем *базовой*. Задачу, входные данные в которой заданы функциями $\bar{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m$ (или $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$), где $\bar{\beta}(f(j), w^{'i}) \geq \bar{\beta}(f(j+1), w^{'i})$ (или $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$), и $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (или $\bar{\varphi}(j)|_1^m$), где $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (или $\bar{\varphi}(j) \geq \bar{\varphi}(j+1)$), образованных из $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем *упорядоченной*.

Методом структурно-алфавитного поиска по упорядоченным комбинаторной и числовой функциям по разработанным правилам, начиная с наименьших или наибольших их значений с учетом структуры входных данных и комбинации элементов в строках и столбцах заданной матрицы, находится локальный оптимум и для него определяется подмножество комбинаторных конфигураций, которое содержит глобальное решение. Затем в найденном подмножестве по второму, третьему и другим элементам варианта решения задачи находят второй, третий и последующие локальные оптимумы, значения которых уменьшаются или не изменяются. В каждом полученном подмножестве комбинаторных конфигураций выделяются меньшие подмножества, которые могут содержать глобальное решение. Тем самым сужается область его поиска. Поиск оптимального решения по этой схеме проводится так, как поиск слова в словаре. Доказательство утверждения, что этим методом полиномиально находят глобальный оптимум или близкий к таковому, проводится с использованием подклассов разрешимых задач.

Следовательно, методом структурно-алфавитного поиска решаем транспортную задачу на множестве перестановок и задачу кластеризации на подмножестве изоморфных разбиений n-элементного множества на подмножества. Поскольку на всем множестве Θ с использованием функции (1) наблюдается ситуация неопределенности, оптимальное решение находим самонастраивающимся алгоритмом [23].

Моделирование целевой функции в задаче сохранения окружающей среды с использованием теории комбинаторной оптимизации

При моделировании процессов, связанных с сохранением окружающей среды рассматривают последствия влияния человеческой деятельности на природу. Эту задачу иногда относят к антагонистическим играм двух участников с противоположными интересами и называют играми против природы [28]. Она заключается в том, что при переходе от одной ситуации к другой с увеличением (уменьшением) выигрыша одного из игроков численно одинаково уменьшается (увеличивается) выигрыш второго. Их еще называют играми двух лиц с нулевой ставкой. Разумное поведение игроков осуществляется на основании принципа максимина. Приведем математическую постановку задачи сохранения окружающей среды, разработанную с использованием теории комбинаторной оптимизации [29].

Задачу сохранения окружающей среды рассмотрим как игру двух игроков:

- мораль общества,
- обогащение общества (в частности обогащение его правящего слоя).

Положим, что уровень морали и способ обогащения общества – критерии, по которым оптимизируется целевая функция. Под целевой функцией понимаем ее числовое значение, определяющее уровень здоровья окружающей среды, человека и общества в целом. Задача заключается в поиске между этими критериями такого равновесия, при котором общество и природа сосуществовали бы комфортно. Как известно, на определенном этапе обогащения общества его мораль начинает снижаться. Наступает момент, когда ради обогащения пренебрегают законами природы, соответственно и законами морали, что приводит к разрушению природы и общества в целом. В результате общество теряет все накопленные материальные ценности. В литературе описана аналогичная ситуация, которая названа «трагедия общин» [30, 31].

Введем множества: $A=(a_1,...,a_n)$, каждый элемент a_j, $j\in\{1,...,n\}$, которого соответствует признакам, характеризующим уровень морали общества; $B=\{b_1,...,b_n\}$, каждый элемент b_j которого определяет числовую оценку уровня морали общества; $\tilde{A}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n)$, каждый элемент $\tilde{a}_l$, $l\in\{1,...,n\}$, соответствует признакам, которые характеризуют способы обогащения общества; $\tilde{B}=\{\tilde{b}_1,...,\tilde{b}_n\}$, каждый элемент которого $\tilde{b}_l$ определяет числовую оценку способа обогащения общества.

Следовательно, задача сохранения окружающей среды задается двумя множествами A и $\tilde{A}$, между элементами которых отсутствуют связи. Входными данными выступают конечные последовательности $B=\{b_1,...,b_n\}$ и $\tilde{B}=\{\tilde{b}_1,...,\tilde{b}_n\}$. Эта задача относится ко второму типу.

Смоделируем целевую функцию и определим ее аргумент.

Положим, что каждому элементу b_j множества B соответствует элемент $\tilde{b}_j$ из множества $\tilde{B}$ и $b_j,\tilde{b}_j\in\{-1,...,0,...,1\}$, $b_j,\tilde{b}_j$ – вещественные числа. Если благосостояние общества обеспечивает его гармоническое развитие и не вредит природе, то эти величины положительные и $b_j,\tilde{b}_j\geq\varepsilon$, $b_j=\tilde{b}_j$, $\varepsilon>0$ – минимальное значение, при котором возможно разумное поведение игроков. Если b_j, $\tilde{b}_j\in\{\tilde{\varepsilon},...,\varepsilon\}$, где $\tilde{\varepsilon}<0$ – наибольшее значение, при котором не разрушается природа, то происходит антагонистическая игра двух участников с прямо противоположными интересами. Если $b_j,\tilde{b}_j<\tilde{\varepsilon}$, то разрушается мораль общества, уничтожается природа, теряются все накопленные материальные ценности, т.е. возникает ситуация, при которой выигрывает один игрок (который обогащается), но в результате проигрывают оба.

В процессе решения задачи из каждого множества $A=(a_1,...,a_n)$ и $\tilde{A}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n)$ выбором определенного количества элементов образуются сочетания без повторений, которые есть аргументом целевой функции. Из элементов множеств $A=(a_1,...,a_n)$ и $\tilde{A}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_n)$ образуем два комбинаторные множества W и $\tilde{W}$. На этих множествах введем целевую функцию $F(w,\tilde{w})$, где $w\in W$ и $\tilde{w}\in\tilde{W}$ – сочетания без повторений. Задача состоит в поиске таких $w^*\in W$ и $\tilde{w}^*\in\tilde{W}$, для которых введенная целевая функция $F(w,\tilde{w})$ принимает максимальное значение при условии, что $F(w^*,\tilde{w}^*)\geq\delta$, где δ – минимальная величина, при которой природа и общество существует комфортно, благосостояние общества используется на его развитие и не разрушается окружающая среда.

Смоделируем входные данные функциями натурального аргумента $\varphi(j)|_1^n$, $\tilde{\varphi}(j)|_1^n$ и комбинаторными функциями $\beta(f(j),w^k,\tilde{w}^i)|_1^n$ и $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l),w^k,\tilde{w}^i)|_1^n$. Если из множества A выбирается элемент a_j, то $\beta_j(f(j),w^k,\tilde{w}^i)=1$. В противном случае $\beta_j(f(j),w^k,\tilde{w}^i)=0$. Соответственно, если из множества $\tilde{A}$ выбирается элемент $\tilde{a}_l$ то $\tilde{\beta}_l(\tilde{f}(l),$

$w^k, \tilde{w}^i) = 1$. В противном случае $\tilde{\beta}_l(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i) = 0$. Поскольку поставленная задача решается на двух комбинаторных множествах, то функции $\beta(f(j), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$ и $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$ зависят от двух переменных: $w \in W$ и $\tilde{w} \in \tilde{W}$.

Целевая функция в этой задаче оптимизируется по двум критериям, которые смоделируем как среднюю величину суммарного произведения значений функции натурального аргумента и комбинаторной функции:

$$F^{(1)}(w^k, \tilde{w}^i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j(f(j), w^k, \tilde{w}^i)\, \varphi(j)}{q'} \quad \text{и}$$

$$F^{(2)}(w^k, \tilde{w}^i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{\beta}_j(\tilde{f}(j), w^k, \tilde{w}^i)\, \tilde{\varphi}(j)}{q''},$$

а $F(w^k, \tilde{w}^i) = \sum_{t=1}^{2} F^{(t)}(w^k, \tilde{w}^i)$; где q' – количество единиц в $\beta(f(j), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$, q'' – количество единиц в $\tilde{\beta}(\tilde{f}(l), w^k, \tilde{w}^i)|_1^n$.

Множества W и $\tilde{W}$ состоят из подмножеств изоморфных сочетаний без повторений. Поскольку нахождение оптимального решения проводится на всех элементах, то в процессе решения задачи с использованием выражений $F^{(1)}(w^k, \tilde{w}^i)$ и $F^{(2)}(w^k, \tilde{w}^i)$ может возникать ситуация неопределенности, связанная со структурой аргумента целевой функции [32]. Поэтому задача состоит в поиске такого подмножества изоморфных сочетаний без повторений, которое содержит оптимальное решение, совпадающее с целью исследования при условии, что $F(w^k, \tilde{w}^i) > \delta$.

Итак, если значение целевой функции равно двум или не меньше величины δ, то природа и общество существует комфортно, благосостояние общества используется на его развитие. В противном случае разрушается мораль общества, уничтожается природа. Целевая функция задачи сохранения окружающей среды зависит от двух переменных, которыми будут сочетания без повторений. В отличие от других задач комбинаторной оптимизации, которые по этому признаку разделяются на подзадачи с последовательным их решением, решение этой задачи находится одновременно на двух комбинаторных множествах.

Заключение. Системный анализ прикладных задач с использованием теории комбинаторной оптимизации позволяет изучать свойства интеллектуальных геораспределенных динамических систем на общем уровне, выявлять задачи оптимизации комбинаторного типа, формулировать их математические модели и на основе последних разрабатывать эффективные алгоритмы решения. Так, задача распределения сети сервисных объектов разделяется на три подзадачи: задача кластеризации, аргументом целевой функции в которой есть разбиение *n*-элементного множества на подмножества; транспортная задача, аргумент целевой функции в которой – перестановка, и задача по теории массового обслуживания. Эта задача требует для решения разработки гибридных алгоритмов. В процессе решения подзадачи кластеризации и определения мощности сервисных объектов возникает ситуация неопределенности. Для ее решения необходимо разрабатывать самонастраивающиеся алгоритмы , что характерно для проектирования систем вычислительного интеллекта.

●