

УДК 681.3: 658.56.

Ю.А. Кулаков, В.В. Воротников

## Стохастическая модель оценки параметров структурной живучести *mesh*-сетей в условиях воздействия разрушающих факторов

Рассмотрен подход, используемый в теории сложных сетей и перколяции для оценки структурной живучести случайных однородных сетей. Его применение основывается на классических случайных графах и позволяет управлять формированием сети при случайном удалении любых узлов (связей) или удалении узлов с высокой степенью связности.

The approach in-use in the theory of difficult networks and percolation for the estimation of structural vitality of casual homogeneous networks is considered. Application of this approach is based on classic casual columns and allows to manage forming of network at the casual delete of any knots (connections) or delete of knots with the high degree of connectedness.

Розглянуто підхід, який застосовується у теорії складних мереж та перколяції для оцінювання структурної живучості випадкових однорідних мереж. Його застосування базується на класичних випадкових графах і дозволяє керувати формуванням мережі за випадкового видалення будь-яких вузлів (зв'язків) або видаленні вузлів високого ступеня зв'язності.

**Введение.** Распространение стандартов беспроводных технологий обусловило острую потребность решения задач системного анализа, разработки и исследования принципов построения и архитектуры *mesh*-сети, в составе специализированных систем управления разного уровня, методов анализа и оптимизации показателей их качества [1, 3]. Одним из признаков сложной системы управления есть показатель живучести: при отказе определенного количества элементов система продолжает выполнять свои функции, хотя и с меньшей эффективностью (простая система может быть лишь в двух состояниях работоспособности и отказа) [2, 4].

### Постановка проблемы

Проектирование новых и развитие существующих информационных систем связаны с проблематикой определения связности и живучести сетевых информационных систем большой размерности и сложной структуры; выбора пропускных способностей каналов связи; распределения потоков в сетевых информационных системах и т.д. [1–3].

Наиболее перспективное направление использования сетевых технологий в составе специализированных систем управления сложных информационных систем – использование телекоммуникационных сетей, построенных по

*mesh*-топологии. *Mesh*-сети есть оптимальным решением для поддержки работы оперативных служб и подразделений тактического звена в экстремальных ситуациях, во время выполнения специальных заданий. Высокая надежность такой сети обусловлена отсутствием общего центра управления, который может выйти из строя в результате разрушающих внешних или внутренних воздействий.

*Mesh*-сети способны автоматически обнаруживать отключение или выход из строя отдельных элементов, при этом осуществляется мгновенное перенаправление трафика в обход поврежденных участков по свободным каналам связи. Пропускная способность таких сетей составляет до десятков Мбит/с и позволяет их использовать для трафико-емкостных дополнений, таких как передача потокового видео.

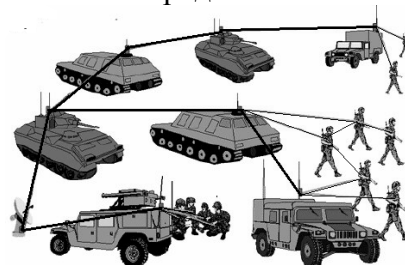


Рис. 1. Концепция *mesh*-сети управления спецподразделениями

А такие дополнительные возможности, как определение местонахождения абонентских уст-

роиств относительно маршрутизаторов сети, дают возможность рассматривать децентрализованные сети как основу АСУ таких подразделений и служб.

Требования, выдвигаемые к таким системам, а именно: автоматическое развертывание системы за ограниченное время; высокая пропускная способность каналов связи для обеспечения работоспособности системы видеонаблюдения; возможность использования конечного оборудования для нахождения места расположения абонентских устройств, а также для аудио- и видеофиксации событий, происходящих на месте дислокации, повышают актуальность вопросов, связанных с обеспечением высокой живучести системы, которая гарантирует ее работоспособность в случае выхода из строя нескольких узлов [1, 3].

#### **Обзор последних исследований и публикаций**

До недавнего времени использовались два основных подхода относительно определения и измерения живучести. Первый – основан на вычислении связности графа, моделирующего структуру сети. В рамках данного подхода развивались как аналитические методы эффективного вычисления связности для сетей большой размерности, так и имитационные.

Другой подход основан на оценке живучести систем в терминах производительности сетей связи. При этом анализируется потеря производительности в результате техногенной катастрофы, естественного катаклизма или преднамеренного разрушающего влияния. В частности, за меру живучести принимается отношение уровня производительности системы после аварии или атаки до уровня производительности в нормальном состоянии.

В работе [5] рассмотрена общая процедурная модель оценки живучести информационных сетей, позволяющая оценить как структурную (количество работоспособных после влияния внешних воздействующих факторов транзитных узлов сети, центрального узла управления, коммуникационных каналов), так и функциональную живучесть информационной сети (перераспределение потоков в сети после

воздействия внешних факторов). Процедурная модель помогает обнаруживать основные недостатки проектируемой или эксплуатируемой сети и принимать решения по их устранению.

Сетевая информационная система [6] подана в виде многоуровневой иерархической структуры, включающей в себя множественное число узлов, связанных между собой установленным образом. Такой конструкции присуще свойство саморазрушения, определяемое тем, что за счет большой численности узлов и связей между ними нередко проявляется *каскадный эффект*, когда сбой в любом месте провоцирует перегрузку и выход из строя других элементов сети.

Взаимодействие элементов сложных систем [7] описывается случайными сетями Ердеша–Реньи, а стойкость к ошибкам и повреждениям предложено исследовать методами теории перколяции. Исследования показывают, что при произвольном удалении узлов из случайного графа существует определенное критическое значение, измеряемое отношением количества удаленных узлов к их общему количеству в сети. Превышение этого значения приводит к тому, что сеть распадается на отдельные кластеры.

В работе [8] рассмотрена структурная живучесть – способность системы выполнять цель функционирования с заданным качеством при условиях наличия нежелательных влияний путем механизмов поддержки необходимой системной структуры.

Адаптированная методика оценивания живучести, показанная в работе [9], на основе логико-вероятностных моделей к системе защиты информации корпоративной сети связи для определения поведения элементов и системы защиты в целом после влияния на нее дестабилизирующих факторов, усовершенствованы и исследованы математические модели оценивания живучести на основе логико-вероятностных и коковых моделей.

В работе [10] отмечено, что одной из сильных сторон первичных *SDH*-сетей есть разнообразный набор средств отказоустойчивости, позволяющей сети быстро (за десятки милли-

секунд) возобновлять работоспособность в случае отказа любого элемента сети – канала связи, порта или карты мультиплексора, мультиплексора, в целом.

В SDH-сетях как общее название механизмов отказоустойчивости используется термин *автоматическое защитное переключение (Automatic Protection Switching – APS)*, отображающее факт перехода (переключения) на резервный путь или резервный элемент мультиплексора при отказе основного. Сети, поддерживающие такой механизм, в стандартах SDH называются *самовосстанавливающимися (selfhealing)*.

Определению оптимального соотношения иерархических уровней аппаратных ресурсов, обеспечивающих системы в условиях внешних деструктивных воздействий, посвящена работа [11].

Для всех источников при анализе живучести технической системы рассматривается структурная и функциональная живучесть и, соответственно, авторы предлагают несколько видов моделей анализа: теоретико-игровые, вероятностные, детерминированные и графовые. При исследовании структурной живучести наиболее целесообразно – использование графовых моделей [6–9, 11].

Цель статьи – оценка показателей структурной живучести *mesh*-сетей в условиях влияния разрушающих факторов и формирования предложений относительно их повышения.

### **Изложение основного материала**

Системы, элементы которых находятся в жестких структурных соотношениях, в теории систем называют упорядоченными со свойствами наблюдения и управления. В работах [12, 13] в состав таких систем отнесены все технические и организационно-технические системы, системы связи и управления в том числе. В теории живучести такие системы относят к структурным или *s*-системам. Однако построение систем управления на базе *mesh*-сетей, поддерживающих иерархический принцип управления, позволяет отнести такие системы к ассоциативно-структурным (*AS*-систем), когда элементы системы объединены в ассоциации, а

между ассоциациями существуют структурные отношения.

В сравнении с ассоциативными системами, ассоциативно-структурным системам присущ более сложный механизм идентификации состояния работоспособности. Суть заключается в том, что структурные отношения между ассоциациями вызваны потребностью обеспечения функционирования системы в определенном «технологическом цикле». Поэтому система способна решать поставленное задание, когда ее окончательный ресурс будет содержать необходимое количество элементов в каждой ассоциации. В таком случае если сеть описать *AS*-системой, которая состоит из  $n$  – элементов, включенных в  $k$ -ассоциаций ( $n_k$ ), то механизм идентификаций состояний работоспособности предусматривает выполнения условий:

$$m_k \leq t_k \leq n_k, k = 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

где  $t_k$  – количество элементов  $k$ -й ассоциации, сохранивших работоспособность после воздействия разрушающего фактора;  $m_k$  – необходимый ресурс  $k$ -й ассоциации;  $K$  – общее количество ассоциаций.

В таком случае обобщенная модель живучести *AS*-системы может быть представлена выражением [13]:

$$P : P(m_k \leq t_k), k = 1, 2, \dots, K, \quad (2)$$

обуславливающим вероятностью события того, что после воздействия разрушающего фактора остаточный ресурс системы содержит элементы всех  $K$ -ассоциаций, а их количество не менее необходимого ( $m_k$ ).

### **Формулировка задачи исследования**

Пусть совокупность компонент системы  $G(V, R)$  задана в виде вершин графа  $v \in V$ , а ребра графа  $r \in R$  соответствуют связям между ними [5, 6, 11]. Систему, моделируемую при помощи графа, будем считать разрушенной, если, в случае удаления вершин или ребер, граф не будет удовлетворять одному или большему количеству условий [12]:

- граф состоит минимум из двух компонент;

- не существует ориентированных направлений для определенных множеств вершин;
- количество вершин в наибольшей компоненте графа  $G(V, R)$  меньше некоторого определенного числа;
- кратчайший путь превышает некоторое заданное значение.

Математическая модель сети уровня морфологического описания предлагается в виде неориентированного графа  $G(V, R)$  с множеством узлов  $V = \{v_i\}, i = 1 \dots n$  и множеством соединяющих ребер (каналов связи)  $R = \{r_i\}, i = 1 \dots m$ . Структура сети задается структурной матрицей (матрицей инцидентностей)  $B = [b_{ij}]$ , в которой ребра  $b_{ij} = 1$ , если узлы  $v_i$  и  $v_j$  непосредственно связаны, и  $b_{ij} = 0$  в противоположном случае [14].

Кроме этого, задается матрица надежностей ребер  $P = [p_{ij}]$ , в которой ребрам  $p_{ij}$  устанавливается вероятность безотказной работы в течение некоторого времени  $\Delta t$ . Тогда вероятность отказа ребра (канала связи)  $q_{ij} = 1 - p_{ij}$ .

Систему управления сетью будем считать децентрализованной, что позволяет узлы сети рассматривать как маршрутизаторы.

Обмен данными между узлами сети может быть осуществлен по разным каналам  $\mu_{ij}^k$ : по прямым и, в случае отказа или перегрузки трафика, по обходным каналам связи через соседние узлы. Выбор путей в каждом узле может быть случайным, приоритетным, игровым и т.д. Индекс  $k$  определяет число транзитных узлов, которое не должно превышать некоторое допустимое значение  $k \leq k_{\text{доп}}$ :

$$\mu_{ij}^k = \sum_{\forall b_{mn} \in \mu_{ij}^k} b_{mn} \quad (3)$$

Для оценки живучести сети введем следующие ограничения:

- все узлы абсолютно надежные;
- пропускная способность каналов связи и узлов не ограничена;

- сообщения между узлами передаются по любым работоспособным каналам и направлениям через любой узел в соответствии с (3);
- в начальном состоянии граф рассматривается как связанный (нет изолированных вершин).

Пусть  $Q_i, i = \overline{1, n}$  – это событие, при котором отсутствуют поврежденные ребра, инцидентные  $V_i$ .

Объединением событий  $\{Q_i\}, i = \overline{1, n}$  есть событие, при котором хотя бы одна вершина графа не имеет поврежденных ребер. Поэтому дополнительным условием будет следующее: каждая вершина имеет, по крайней мере, одно инцидентное ребро.

Таким образом, вероятность распада начального графа на  $\rho$  компонент или вероятность того, что стохастический граф есть связным, определяется как:

$$P(\rho = 1) \leq 1 - P\{Q_i\} \quad (4)$$

Пусть  $d_i$  – степень  $V_i$  и  $q = 1 - p$  – это вероятность разрушения ребра. Очевидно, что  $P\{Q_i\} = q^{d(i)}$ .

Условием того, что рассмотренные значения реализуются в виде графа, будет отношение:

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m, \text{ откуда: } \langle d \rangle = \frac{2m}{n}.$$

Используя дисперсионные отношения для случайной величины  $d(i)$ :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d(i) - \langle d \rangle)^2$$

получают верхнюю границу вероятности связности графа

$$P(\rho = 1) \leq 1 - nq^d \left[ 1 - \frac{n-1}{2} q^{d(1-\frac{1}{n})} \right] \quad (5)$$

На практике ограничиваются достаточным значением  $P(\rho = 1) \geq \frac{3}{4}$  [14]. Для таких значений  $P$  множитель в квадратных скобках в предыдущем выражении можно заменить значением 0,5.

Выражение (5) принимает вид:

$$P(\rho = 1) \leq 1 - \frac{n}{2} q^d, d \ll n. \quad (6)$$

Выражение (6) – критерий живучести стохастического однородного графа с заданными  $n$ ,  $d$ ,  $q$ . Если задано  $P(\rho = 1)$ , тогда

$$d \geq \frac{1}{\ln q} \left[ \ln(1 - P) - \ln \frac{n}{2} \right]$$

есть необходимым условием для степени вершины, чтоб граф был связным (с каждой вершины в среднем должно выходить  $d$  ребер при заданных  $q$  и  $n$ ).

Обозначим  $g_k^b(\eta)$ ,  $g_k^p(\eta)$  как ожидаемые части вершин и ребер, которые подверглись разрушающему воздействию с частотой появлений последствий  $\eta$ .

Вероятности того, что некоторая вершина  $k_s$  и некоторое ребро  $k_l$  не будут разрушены равна  $\sum_{k=0}^{k_s-1} g_k^b(\eta)$  и  $\sum_{k=0}^{k_l-1} g_k^p(\eta)$  соответственно.

Пусть  $\pi_b$  и  $\pi_p$  – вероятности того, что влияние внешнего фактора разрушает данные вершину и ребро, тогда по распределению Пуассона вероятности будут определяться как:

$$g_k^b(\eta) = e^{-\pi_b \eta} \frac{(\pi_b \eta)^k}{k!}, \quad (7)$$

$$g_k^p(\eta) = e^{-\pi_p \eta} \frac{(\pi_p \eta)^k}{k!}. \quad (8)$$

Допустим, что после воздействия остались в среднем  $\alpha$  неповрежденных ребер, направленных из случайно взятой вершины.

Для графов, удовлетворяющим условиям (5–6), существует соотношение [6]:

$$\beta = 1 - e^{-\alpha \beta} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{-\ln(1 - \beta)}{\beta};$$

$$P\{Q_i\} = q^d.$$

Учитывая вышеизложенное:

$$\beta = 1 - \exp \left\{ -d \left[ \sum_{k=0}^{k_s-1} g_k^b(\eta) \right] \left[ \sum_{k=0}^{k_l-1} g_k^p(\eta) \right] \beta \right\}. \quad (9)$$

Таким образом, выражение (9) определяет среднее количество вершин, которые не повреждены под воздействием разрушающего фактора, а  $\sum_{k=0}^{k_s-1} g_k^b(\eta)$  – среднее число вершин

начального графа, которые могут установить связь с другими вершинами после повреждения, и выражение (9) можно использовать для определения коэффициента живучести.

В таком случае значение  $\alpha$  можно рассчитать как:

$$d \left[ \sum_{k=0}^{k_s-1} g_k^b(\eta) \right] \left[ \sum_{k=0}^{k_l-1} g_k^p(\eta) \right] = \frac{-\ln(1 - \beta)}{\beta}.$$

Задав в соответствии с (2)  $\beta \geq \beta_0$  как ограничения коэффициента живучести:

$$d \left[ \sum_{k=0}^{k_s-1} g_k^b(\eta) \right] \left[ \sum_{k=0}^{k_l-1} g_k^p(\eta) \right] \geq \frac{-\ln(1 - \beta_0)}{\beta_0}, \quad (10)$$

получим:

$$d \left[ \sum_{k=0}^{k_s-1} \frac{(\pi_b \eta)^k}{k!} \right] \left[ \sum_{k=0}^{k_l-1} \frac{(\pi_p \eta)^k}{k!} \right] \geq e^{(\pi_b + \pi_p) \eta} \left( \frac{-\ln(1 - \beta_0)}{\beta_0} \right). \quad (11)$$

Из выражения (11) находят минимальные значения  $d$ .

Например, оценим показатель живучести беспроводной телекоммуникационной сети специализированной системы управления. Будем различать два типа устройств: маршрутизаторы (роутеры), которые автоматически объединяются в сеть, и конечные абонентские устройства. Для связи с абонентскими устройствами определен частотный диапазон. Маршрутизаторы распределяют всю зону покрытия на кластеры (ассоциации), каждому кластеру соответствует свое частотное покрытие. Кластеры могут перекрываться, в таком случае обслуживание абонентских устройств передается маршрутизатору с наиболее устойчивым сигналом. При отсутствии связи с маршрутизатором любое другое абонентское устройство может быть использовано для этих целей – выступать в роли вспомогательного маршрутизатора.

Зависимость показателей средней связности узлов в сети  $d(n)$  (11) при разных значениях вероятностей связности кластера  $P_{cb}$  (0,25; 0,5; 0,75; 0,9;) от количества узлов в кластере  $n$  показаны на рис. 2.

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что для содержания кластера в актуальном состоянии при вероятности связности  $P_{cb} = 0,9$  необходимо, чтобы в среднем

каждый узел кластера имел две–три связи, а при связности от  $P_{св} = 0,25$  и менее необходимо, чтобы в среднем каждый узел кластера был связан с 10–16 соседними узлами.

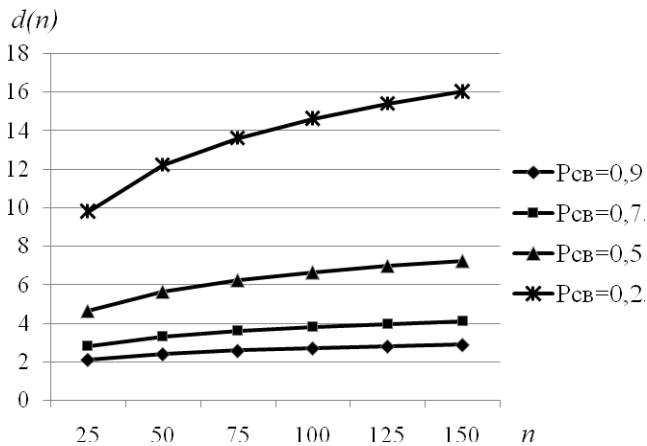


Рис. 2. Зависимость средней связности  $d(n)$  от количества узлов  $n$  в кластере

**Заключение.** Полученные результаты позволяют в условиях постоянного изменения топологии сети оперативно определять возможность установления логического соединения (маршрута передачи данных) между любой парой абонентов и, как следствие, адекватно управлять нагрузкой, поступающей на ее входы; решать комплекс задач по оптимальному восстановлению сетевой связности между отдельными абонентами разрушенной сети и предохранять от ошибок при проведении оперативных восстановительных работ.

1. Лисенко О.І., Валуйський С.В. Підвищення структурної надійності безпроводових епізодичних мереж шляхом застосування повітряних ретрансляторів // Системні технології. – 2010. – 6(71). – С. 115–130.
2. Dressler F. Self-Organization in Ad Hoc Networks: Overview and Classification. – Technical report. –

Univ. of Erlangen. – Dept. of computer science 7. – Feb., 2006. – N 02/06. – P. 102–114.

3. *Survivable Network Systems: An Emerging Discipline* / R.J. Ellison, D.A. Fisher, R.C. Linger et al. // Software Engin. Inst. Carnegie Mellon Univ. Pittsburgh, PA 15213 Nov. 1997. – P. 48.
4. Графов Р.П., Медзатий Д.Н., Малай А.Г. Системологический подход к синтезу *cloud*-систем. / Вісн. Хмельн. нац. ун-ту. Хмельницьк: ХНУ. – 2011. – № 3. – С. 275–282.
5. Анализ живучести информационных сетей / Ю.Ю. Громов, Д.Е. Винокуров, Т.Г. Самхарадзе и др. // Информационные процессы и управление. – 2006. – № 1. – С. 138–155.
6. Синтез и анализ живучести сетевых систем / Ю.Ю. Громов, В.О. Драчев, К.А. Набатов и др. – М.: Машиностроение-1, 2007. – 152 с.
7. Евин И.А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – 2, № 2. – С. 121–141.
8. Додонов О.Г., Горбачик О.С., Кузнецова М.Г. Живучість інформаційно-аналітичних систем: понятійний апарат, моделі аналізу та оцінки // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. – 2007. – 9, № 3. – С. 61–72.
9. Дудикевич В.Б., Гарасим Ю.Р. Дослідження та вдосконалення математичних моделей оцінювання живучості системи захисту інформації корпоративної мережі зв'язку // Автоматика, вимірювання та керування: Вісн. Нац. ун-ту. «Львівська політехніка». – 2011. – № 695 – С. 9–21.
10. Дансмор Б., Скандьєр Т. Справочник по телекоммуникационным технологиям. – М.: Вильямс, 2004. – 640 с.
11. Дженюк Н.В. Визначення рівня живучості технічних систем критичного призначення // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 5(46) – С. 292–295.
12. Додонов А.Г., Ландэ Д.В. Живучість інформаційних систем. – К.: Наук. думка, 2011. – 256 с.
13. Стекольников Ю.И. Живучість систем. Теоретические основы. – СПб.: Политехника, 2002. – 155 с.

Поступила 29.04.2013

Тел. для справок: +38 044 454-9292, +38 0412 25-1296,  
+38 096 373-4865 (Киев, Житомир)

E-mail: ya.kulakov@gmail.com, vvvorotnik@ukr.net

© Ю.А. Кулаков, В.В. Воротников, 2013