

А.В. Павлов, Н.В. Кондрашова

О сходимости обобщенного релаксационного итерационного алгоритма метода группового учета аргументов

Доказана сходимость Обобщенного Релаксационного Итерационного Алгоритма метода группового учета аргументов. Показана сходимость алгоритма к истинной модели при наличии фиктивных аргументов в матрице данных.

A proof of for the convergence of the Generalized Relaxational Iterative Algorithm of the GMDH. is given. The algorithm convergence to the true model has been shown via the numerical experiment in case if the input matrix had a fictitious factor.

Доведено збіжність Узагальненого Релаксаційного Ітераційного Алгоритму методу групового урахування аргументів. Показано збіжність алгоритму до істинної моделі за наявності фіктивних аргументів в матриці даних.

Введение. В работе [1] выполнен анализ результатов доказательства сходимости итерационных алгоритмов метода группового учета аргументов (МГУА), а также доказывается внутренняя сходимость одного из них – *CML*-алгоритма (*Convergence Multilayered*). Однако в доказательстве не рассматривается случай наличия фиктивных аргументов в исходной матрице данных, а также ситуация, когда число истинных аргументов в модели превышает количество наблюдений. В предлагаемой работе теоретически доказывается сходимость Обобщенного Релаксационного Итерационного Алгоритма (ОРИА) МГУА [2] для более общего случая, кроме того, приведены результаты численных экспериментов.

Постановка задачи

Пусть имеем выборку данных, заданную матрицей $W = (X:y)$, $\dim X = n_W \times m$, $\dim y = n_W \times 1$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_W}$, $i = \overline{1, m}$, где n_W – количество наблюдений (точек), m – число аргументов (вектор-столбцов матрицы X). Предполагается, что истинный сигнал \tilde{y} – некоторая функция $\tilde{f}(\tilde{X}_M, \tilde{\Theta}_M)$ от истинных аргументов $\tilde{X}_M \subseteq X$ и вектора параметров $\tilde{\Theta}_M$, $\dim \tilde{X}_M = n_W \times \tilde{M}$, $\dim \tilde{\Theta}_M = \tilde{M} \times 1$. Множество аргументов матрицы X выбирается из условий конкретной задачи, но, кроме истинных аргументов, может содержать и фиктивные. Элементы вектора y – результат наложения на истинный сигнал \tilde{y} аддитивного шума ξ , который есть случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и неизвестной конечной дисперсией

$$y = \tilde{y} + \xi = \tilde{f}(\tilde{X}_M, \tilde{\Theta}_M) + \xi.$$

По данным выборки наблюдений необходимо построить функцию

$$\hat{y}^* = f^*(X_{M^*}^*, \hat{\Theta}_{M^*}^*), \quad (1)$$

при которой критерий принимает оптимальное значение $CR^*(y, \hat{y}^*)$. Оптимальному значению критерия соответствует тройка:

$$\begin{aligned} & \{f^*, X_{M^*}^*, \hat{\Theta}_{M^*}^*\} = \\ & = \arg \min_{f \in \Phi, X_M \subseteq X, \Theta_M \in \mathbb{R}^M, M \in [1, m]} CR(y, \hat{y}) = \\ & = \arg \min_{f \in \Phi, X_M \subseteq X, \Theta_M \in \mathbb{R}^M, M \in [1, m]} CR(y, f(X_M, \hat{\Theta}_M)), \end{aligned}$$

где Φ – множество функций заданного класса, генерируемых соответствующим алгоритмом МГУА (примеры классов – тригонометрические, полиномиальные и другие функции, линейные или нелинейные разностные уравнения); X_M – некоторая подматрица матрицы X , $\dim X_M = n_W \times M$, $M \leq m$; $\hat{\Theta}_M$ – вектор оценок параметров конкретной функции f , $\dim \Theta_M = M \times 1$; \mathbb{R}^M – M -мерное пространство действительных значений вектора параметров Θ_M . Задача (1) называется задачей структурно-параметрической идентификации.

В данной постановке выделим две задачи:

1) задачу дискретной оптимизации множества аргументов матрицы X , преобразованных в заданном классе функций

$$\begin{aligned} & \{f^*, X_{M^*}^*, \hat{\Theta}_{M^*}^*\} = \arg \min_{f \in \Phi, X_M \subseteq X, M \in [1, m]} CR(y, \hat{y}) = \\ & = \arg \min_{f \in \Phi, X_M \subseteq X, M \in [1, m]} CR(y, f(X_M, \hat{\Theta}_M)), \quad (2) \end{aligned}$$

2) задачу оптимизации непрерывных значений параметров Θ_M функции f , зависящей от множества аргументов X_M :

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_M &= \arg \min_{\Theta \in \mathbb{R}^M} QR(y, \hat{y}) = \\ &= \arg \min_{\Theta \in \mathbb{R}^M} QR(y, f(X_M, \Theta_M)). \end{aligned} \quad (3)$$

Структурой модели будем называть функцию $f(X_M, \Theta_M)$, заданную с точностью до значений параметров Θ_M . Функцию $f(X_M, \hat{\Theta}_M)$ будем называть некоторым решением или моделью, а функцию $f^*(X_M^*, \hat{\Theta}_M^*)$ – оптимальным решением задачи (оптимальной моделью). В (3) QR есть критерий, в соответствии с которым определяются оптимальные значения вектора параметров $\hat{\Theta}_M$ для некоторой структуры модели; в (2) CR – критерий для определения оптимальной структуры модели и, в итоге, – оптимальной модели. Под построением модели понимается генерация ее структуры и оценивание параметров, соответствующих этой структуре.

Задачу 1), в которой точно известен класс функций, где находится функция \check{f} , в данных выхода y не содержится шум, функция $\check{f}(\check{X}_M, \check{\Theta}_M)$ – линейная по параметрам $\check{\Theta}_M$, назовем задачей Идентификации Истинного Сигнала (ИИС). Если алгоритм МГУА реализует построение всех моделей множества Φ , он решает данную задачу, используя критерий остаточной суммы квадратов RSS .

Первым алгоритмом МГУА, решающим задачу ИИС на ограниченном множестве Φ , есть комбинаторный алгоритм *COMBI* [3]. При этом количество перебираемых моделей экспоненциально возрастает при увеличении числа одноклассов полного полинома k : $|\Phi| = 2^k$. Поскольку в реальных задачах количество аргументов измеряется десятками, сотнями, а то и тысячами, то очевидно, что комбинаторные алгоритмы здесь неприменимы.

Для решения задач с таким количеством аргументов разработаны итерационные алгорит-

мы МГУА. Определим итерационный алгоритм МГУА.

Итерационные алгоритмы МГУА

В [1] дано строгое определение итерационного алгоритма МГУА, строящего модели, линейные по параметрам Θ . Определим итерационный алгоритм МГУА в более общем виде.

Пусть g – вектор-функция, отображающая подмножество векторов решения (далее – решения) r -й итерации и подмножество вектор-столбцов матрицы X в вектор решения $(r+1)$ -й итерации $\hat{y}_{i,r}$, $i = \overline{1, F}$; $\hat{Y}_r = (\hat{y}_{1,r} : \hat{y}_{2,r} : \dots : \hat{y}_{F,r})$ – матрица решений, полученных на r -й итерации, $\dim \hat{Y}_r = n_W \times F$, F – свобода выбора решений алгоритма; g_1 – вектор-функция, отображающая подмножество вектор-столбцов матрицы X в решении первой итерации.

Вектор-функции g_1 и g , называемые функциями частного описания алгоритма, имеют вид

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k, \Omega), \quad k \leq m, r = 1, \\ g(x_1, x_2, \dots, x_k, \hat{y}_{1,r}, \hat{y}_{2,r}, \dots, \hat{y}_{p,r}, \Omega), \\ r > 1, k \leq m, p \leq F, \end{aligned}$$

где Ω – вектор параметров, $\dim \Omega = Q \times 1$. Они могут быть нелинейными как по аргументам $\hat{y}_{i,r}$, $i = \overline{1, F}$, x_j , $j = \overline{1, m}$, так и по параметрам Ω .

Алгоритм оперирует векторами матрицы решений \hat{Y}_r и матрицы X , а также функциями g_1 , g , получая решение следующей итерации до тех пор, пока не удовлетворено правило останова. Оценки параметров Ω определяются по некоторому методу.

Таким образом, для определения итерационного алгоритма МГУА следует задать:

- вектор-функцию отображения подмножества векторов матрицы X_k в векторы решения первой итерации, $g_1: X_k \rightarrow \hat{y}_{1,i}$, $i = \overline{1, F}$, $X_k \subseteq X$.
- вектор-функцию отображения матрицы $(X_k : \hat{Y}_r)$ в векторы решения $(r+1)$ -й итерации, $g: (X_k : \hat{Y}_r) \rightarrow \hat{y}_{r+1,i}$, $i = \overline{1, F}$, $(r \geq 1)$;

- правило останова.

Правилom останова может быть, например, условие: $CR_{r+1} > CR_r$, где CR_r – минимальное значение критерия моделей r -й итерации.

Задачу ИИС можно решить точно, если потребовать, чтобы функции множества Φ обладали определенными свойствами:

- функции $f \in \Phi$ линейны по параметрам Θ ;
- любая функция из Φ есть одной из следующих функций: 1) константа; 2) один из столбцов матрицы X ; 3) может быть получена из 1) и 2) подстановкой в g и g_1 ; 4) результат суперпозиции функций g и g_1 ;
- функции частного описания g и g_1 не выводят за пределы класса Φ , т.е. если $f_1, f_2, \dots, f_p \in \Phi$, то $g_1(f_1, f_2, \dots, f_p, \Omega) = f_i(\bullet, \Theta) \in \Phi$.

Сходимость итерационных алгоритмов МГУА

Теоретической проблеме сходимости итерационных алгоритмов МГУА (далее – алгоритмов) в литературе уделено крайне мало внимания. В работе [1] подытожены результаты, полученные в этой области, и формулируются следующие определения основных типов сходимости алгоритмов МГУА.

Различают три типа сходимости: *к предельной точке*, *к решению (вектору y)* и *по структуре*.

Пусть $\hat{y}_{i,r}$ – вектор решения i -й модели, $i = \overline{1, F}$, полученный на итерации r некоторого алгоритма МГУА.

Если последовательность $\{\hat{y}_{1,r}\}$ при $r \rightarrow \infty$ имеет пределом вектор $y^* \neq y$, то алгоритм МГУА сходится к предельной точке. Наличие предельной точки – наиболее слабый тип сходимости.

Более сильной есть сходимость к решению. Алгоритм сходится к решению, если для последовательности векторов $\{\hat{y}_{1,r}\}$ при $r \rightarrow \infty$ существует предел и он равен y .

Наиболее сильна сходимость по структуре. Пусть Φ – множество функций, удовлетворяющее условиям *a)*, *b)*, *c)*. И пусть в Φ существует единственная функция \check{f} такая, что при не-

котором значении параметров Θ выполнены равенства

$$\check{f}(\check{x}_{i,1}, \check{x}_{i,2}, \dots, \check{x}_{i,\bar{M}}, \check{\Theta}) = y_i, \quad i = 1, \dots, n_W.$$

Алгоритм сходится по структуре, если у последовательности моделей $\{\hat{y}_{1,r}\}$ при $r \rightarrow \infty$ существует предел и он равен $\check{f}(\check{X}, \check{\Theta})$.

Все три вида сходимости зависят от критерия CR , определяющего структуру модели. В зависимости от его типа, сходимость *к предельной точке*, *к решению* и *по структуре* может быть *внутренней* или *внешней*.

Внутренней сходимостью (к решению, предельной точке, по структуре) называется сходимость, когда критерием CR есть остаточная сумма квадратов RSS_A , а значения параметров Θ получены по методу наименьших квадратов (МНК). Традиционно в алгоритмах МГУА исходная выборка W делится на обучающую A и проверочную B , но для анализа внутренней сходимости разбиение не применяется, будем считать, что $W = A$.

Если в выходной переменной наблюдается аддитивный шум ($y = \check{y} + \xi$), сходимость к решению \check{y} как с привлечением внешнего, так и внутреннего критерия, очевидно, невозможна (на данный момент неизвестны критерии, обеспечивающие такую сходимость). В этом случае алгоритм сходится к предельной точке.

Сегодня среди всех алгоритмов МГУА только для алгоритма *SML* [1] доказана как *сходимость к решению*, так и – для данных без шума – *сходимость по структуре*. Под решением автор понимает проекцию y^* вектора y в гиперплоскость, натянутую на вектор–столбцы матрицы X . Если в поиске структуры модели участвуют только аргументы истинной модели \check{y} , которая есть регрессией:

$$\check{y} = \check{f}(\check{X}, \check{\Theta}) = \sum_{i=1}^m \check{\theta}_i \check{x}_i, \quad (4)$$

то алгоритм сходится к ней по структуре и, следовательно, по параметрам Θ .

Доказательство сходимости ОРИА

Как известно, при $n_W < t$ имеем некорректную задачу оценивания параметров. При дока-

зательстве сходимости алгоритма *CML* этот случай не рассматривается, т.е. считается, что $n_W \geq m$. В [1] не исследован также вопрос скорости сходимости алгоритма *CML*.

В данной статье доказана *сходимость к решению* релаксационного итерационного алгоритма МГУА, который может быть получен из ОРИА как для случая $n_W < m$, так и для случая $n_W \geq m$. В [4] численно исследована его скорость сходимости.

В ОРИА функции частного описания имеют вид

$$g_1(z_i, \omega_1) = \omega_1 z_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$g(y_r, z_i, \omega_1, \omega_2) = \omega_2 y_r + \omega_2 z_i,$$

где z_i – мультипликативный одночлен от входных аргументов $x_j, j = \overline{1, m}$. Поскольку любой из алгоритмов оценивания параметров и расчета критерия селекции ОРИА дает один и тот же результат, доказательство сходимости справедливо для любого из них.

Приведем доказательство для РИА, генерирующего Полное Дерево Структур (ПДС) [2], в котором свобода выбора $F = 1$. Очевидно, что, если алгоритм сходится при $F = 1$, он сходится и при $F > 1$. Поэтому в доказательстве индекс лучшей модели будем опускать.

Утверждение. Алгоритм РИА ПДС имеет внутреннюю сходимость к решению при условии, что матрица X_A содержит только истинные аргументы, $X_A = \tilde{X}_A$.

Доказательство. Не ограничивая общности, проведем доказательство для варианта построения линейных по аргументам моделей. Основная идея алгоритма состоит в построении на каждой итерации модели

$$\tilde{y}_{A,r+1} = \omega_{A,r+1}^{r+1} \tilde{x}_{A,r+1} + \omega_{A,r+1} \hat{y}_{A,r},$$

где $\omega_{A,r+1}^{r+1}, \omega_{A,r+1}$ – коэффициенты, оцениваемые по методу наименьших квадратов (МНК); $\tilde{y}_{A,r+1}, \hat{y}_{A,r}$ – центрированные на выборке обучения A векторы выходной переменной на текущей и предыдущей итерациях; $\tilde{x}_{A,r+1}$ – центрированный аргумент матрицы X_A .

При доказательстве рассмотрим три случая: 1) $n_A = m$; 2) $n_A < m$; 3) $n_A > m$.

1) Пусть $n_A = m = 3$ (рис. 1). В этом случае применение МНК при получении оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ модели

$$\tilde{y}_A = \theta_1 \tilde{x}_{A,1} + \theta_2 \tilde{x}_{A,2} + \theta_3 \tilde{x}_{A,3} \quad (5)$$

гарантирует нулевую ошибку (невязку):

$\|\tilde{y}_A - \tilde{X}_{A,3} \hat{\Theta}_{A,3}\|^2$. Поскольку в релаксационном итерационном алгоритме (РИА) на полном дереве структур (ПДС) оценки коэффициентов первых двух итераций совпадают с оценками МНК, они гарантируют получение решения с минимальной невязкой $|\overline{OB}|$ при проектировании \tilde{y}_A в плоскость векторов $\tilde{x}_{A,1}, \tilde{x}_{A,2}$. Решение $\hat{y}_{A,2}$ – проекция вектора \tilde{y}_A в плоскость этих векторов. Невязка $\|\tilde{y}_{A,2}^{pj} - \hat{y}_{A,2}\|$ будет нулевой ($\tilde{y}_{A,2}^{pj}$ – проекция вектора \tilde{y}_A в плоскость упомянутых векторов). Коэффициенты на следующей итерации вычисляются путем проектирования вектора \tilde{y}_A в плоскость векторов $\hat{y}_{A,2}, \tilde{x}_{A,3}$. Получаем вектор $D\vec{E} = \hat{y}_{A,3}$.

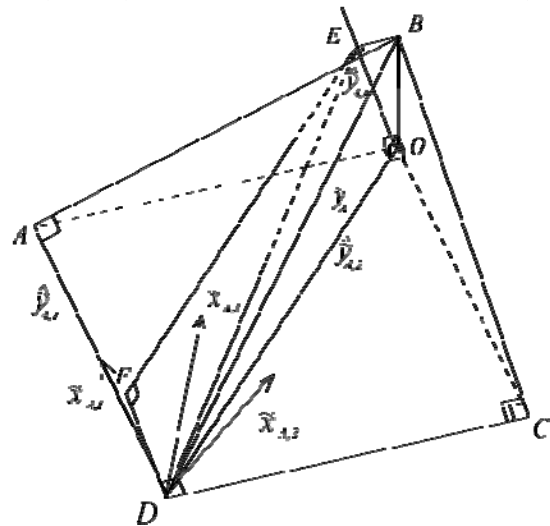


Рис. 1. Процесс построения решения $m = n_A = 3$

При этом в общем случае невязка $|\overline{EB}|$ не равна нулю и не совпадает с невязкой, полученной при оценивании коэффициентов модели (5) по МНК.

Рассмотрим общий случай $(r+1)$ -й итерации (рис. 2). Очевидно, что вектор невязки r -й итерации – $\overline{OB} = \tilde{y}_A - \hat{y}_{A,r}$. Вектором невязки

$(r+1)$ -й итерации будет $\overline{EB} = \tilde{y}_A - \tilde{y}_{A,r+1}$. Поскольку в прямоугольном треугольнике $\triangle OEB$, EB – катет, а OB – гипотенуза, с каждой итерацией расстояние между векторами $\tilde{y}_{A,r+1}$ и \tilde{y}_A сокращается, откуда при $r \rightarrow \infty$ вектор решения совпадет с вектором выхода. Следует отметить, что в данном случае оценки коэффициентов Θ_A РИА ПДС сходятся к оценкам МНК. Здесь и далее подразумеваются оценки МНК, полученные при оценивании коэффициентов модели, содержащей все аргументы.

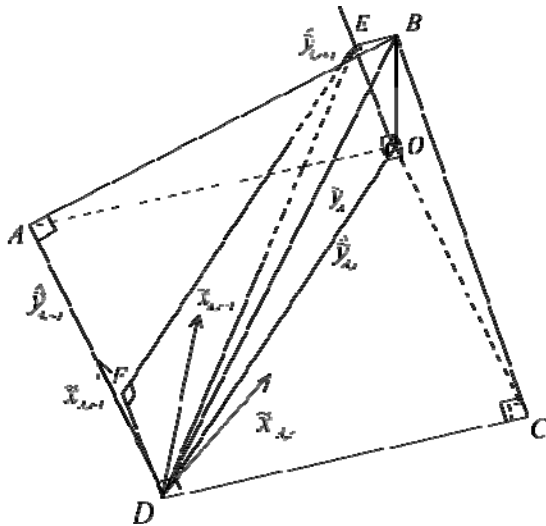


Рис. 2. Процесс построения решения на $(r+1)$ -й итерации $m = n_A = 3$

На практике условием останова РИА ПДС есть $RSS_A(r) - RSS_A(r+1) < \varepsilon$, где $RSS_A(r) = \sum_{i=1}^{n_A} (\tilde{y}_{A,r,i} - \tilde{y}_{A,i})^2$; ε – заданная точность моделирования. Здесь критерием CR есть RSS_A .

2) Пусть $n_A < m$, т.е. матрица имеет неполный ранг, так как система условных уравнений недоопределена. Определитель матрицы нормальных уравнений для такой системы равен нулю. Рассмотрим пример, когда истинная модель \tilde{y}_A^{act} описывается, например, тремя входными векторами

$$\tilde{y}_A^{\text{act}} = \theta_1 \tilde{x}_{A,1}^{\text{act}} + \theta_2 \tilde{x}_{A,2}^{\text{act}} + \theta_3 \tilde{x}_{A,3}^{\text{act}}.$$

Однако фактически имеем данные \tilde{X}_A^{prj} , \tilde{y}_A^{prj} , $\dim \tilde{X}_A^{\text{prj}} = 2 \times 3$, $\dim \tilde{y}_A^{\text{prj}} = 2 \times 1$ (рис. 3), т.е., переходя от матрицы \tilde{X}_A^{act} , $\dim \tilde{X}_A^{\text{act}} = 3 \times 3$,

и вектора \tilde{y}_A^{act} , $\dim \tilde{y}_A^{\text{act}} = 3 \times 1$ к матрице \tilde{X}_A^{prj} , $\dim \tilde{X}_A^{\text{prj}} = 2 \times 3$, и вектору \tilde{y}_A^{prj} , $\dim \tilde{y}_A^{\text{prj}} = 2 \times 1$, проектируем векторы \tilde{y}_A^{act} , $\tilde{x}_{A,1}^{\text{act}}$, $\tilde{x}_{A,2}^{\text{act}}$, $\tilde{x}_{A,3}^{\text{act}}$ в двумерное пространство, определяемое двумя координатами, оставшимися после «отбрасывания» наблюдения.

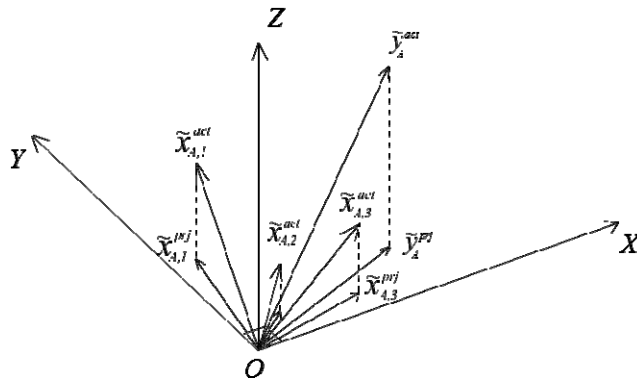


Рис. 3. Геометрическая интерпретация процесса «отбрасывания» наблюдения

В общем случае, имея $n_A < m$, переходим к проекции всех векторов матрицы W из m -мерного пространства в пространство размерности n_A . Таким образом, на вход алгоритма в качестве выходного подается не вектор \tilde{y}_A^{act} размерности m , а его проекция \tilde{y}_A^{prj} в n_A -мерное пространство. Поэтому РИА ПДС сходится не к решению \tilde{y}_A^{act} , а к предельной точке \tilde{y}_A^{prj} , если применить ход доказательства для случая $n_A = m$. Причем, как показали численные эксперименты, в зависимости от значений параметров алгоритма, например свободы выбора F , предельная точка может меняться.

3) Пусть $n_A > m$. Разобьем доказательство на два случая:

а) вектор \tilde{y}_A^{act} точно описывается m вектор-столбцами матрицы \tilde{X}_A ;

б) вектор \tilde{y}_A^{act} неточно описывается m вектор-столбцами матрицы \tilde{X}_A , т.е. для точного описания зависимости выхода от входов (с нулевой суммой квадратичных отклонений) отсутствуют нужные вектор-столбцы в матрице \tilde{X}_A . Таким образом, имеется задача построения регрессии m аргументов, аппроксими-

мирующей \tilde{y}_A^{act} с минимальной суммой квадратичных отклонений (не равной нулю) в заданных n_A точках.

Рассмотрим случай *a*). Здесь при добавлении в матрицу W $\dim W = m \times m$ нового наблюдения ее вектор–столбцы остаются в гиперплоскости размерности m . При этом меняется только ее наклон в $(m + 1)$ -мерном пространстве (при условии, что добавляется ненулевая вектор–строка наблюдения). Если это обобщить на случай добавления любого количества наблюдений, то, поскольку взаимная конфигурация вектор–столбцов матрицы \tilde{X}_A в гиперпространстве n_A ($n_A > m$) не меняется, алгоритм при поиске решения фактически работает в гиперпространстве размерности m . Тогда РИА ПДС сходится к решению \tilde{y}_A^{act} , если применить ход доказательства для случая $n_A = m$. Очевидно, что в данном случае оценки коэффициентов Θ_A , полученные по РИА ПДС, сходятся к оценкам МНК.

Рассмотрим случай *b*). Применяя МНК, находим оптимальное решение с минимальным расстоянием между проекцией \hat{y}_A^* и вектором \tilde{y}_A^{act} . Это решение будет проекцией вектора \tilde{y}_A^{act} в n_A -мерном пространстве в гиперплоскость, определяемую m аргументами, $\hat{y}_A^* = \tilde{y}_A^{\text{prj}}$. С каждой итерацией РИА ПДС приближается к \tilde{y}_A^{act} , добавляя в модель аргументы из матрицы \tilde{X}_A . Следовательно, текущее построенное решение не может «выйти» за пределы гиперплоскости, определяемой аргументами этой матрицы. Поэтому алгоритм сходится к лучшему решению, которое может быть получено в данной гиперплоскости, а именно – к проекции \tilde{y}_A^{prj} . Таким образом, оценки коэффициентов РИА ПДС сходятся к оценкам МНК.

Отметим, что алгоритм повторяет решение предыдущей итерации в случаях, если:

- на третьей итерации в модель вводится один из присутствующих в модели аргументов;
- на $(r + 1)$ -й итерации в модель добавляется аргумент, введенный на r -й итерации, $r > 3$.

Численное исследование сходимости РИА ПДС при наличии фиктивных аргументов в исходных данных

Приведем численный пример. Выборка данных $X = (\tilde{X} : \bar{X})$, \tilde{X} – матрица истинных аргументов, $\dim \tilde{X} = n_A \times \bar{M} = 25 \times 5$; \bar{X} – матрица фиктивных аргументов, $\dim \bar{X} = 25 \times 50$. Идентифицировалась следующая линейная модель:

$$\tilde{y} = 6,29447 - 7,29046 \cdot x_1 + 8,11584 \cdot x_2 + 6,70017 \cdot x_3 - 7,46026 \cdot x_4 + 9,37736 \cdot x_5. \quad (6)$$

Свобода выбора алгоритма $F = 5$, точность моделирования $\varepsilon = 10^{-8}$. В качестве критерия выбора лучшей модели использован нормированный критерий RSS_A :

$$NRSS_A = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_{A,i} - \hat{y}_{A,i})^2 / \sum_{i=1}^n \tilde{y}_{A,i}^2,$$

где \tilde{y}_A , \hat{y}_A – центрированные на выборке A значения векторов исходного и моделируемого выхода y и \hat{y} . Процесс сходимости по структуре и решению алгоритма для модели (6) представлен в таблице.

Расчеты выполнены на компьютере с процессором *Core i3 M 350 2.27Hz*. Время построения модели всего 0,004 с, что свидетельствует о высоком быстродействии алгоритма. В процессе идентификации модели (6) РИА ПДС построено 5315 моделей. Как видим из таблицы, алгоритм не содержит ни одного фиктивного аргумента из 50, приведенных в матрице X .

Процесс сходимости РИА ПДС

№ итерации	$NRSS_A$	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$
5	0,022072	6,51158	-6,85546	7,65062	6,28491	-6,99882	8,92644
7	0,00163264	6,30332	-7,23425	8,07101	6,63807	-7,40443	9,35477
9	0,000106288	6,2928	-7,28274	8,11344	6,68978	-7,4525	9,37792
11	$5,25 \cdot 10^{-6}$	6,29417	-7,28982	8,11585	6,699	-7,45937	9,37762
13	$2,40 \cdot 10^{-7}$	6,29435	-7,29036	8,11582	6,70008	-7,46008	9,37742
15	$6,48 \cdot 10^{-9}$	6,29447	-7,29044	8,11584	6,70016	-7,46026	9,37736
16	$2,02 \cdot 10^{-9}$	6,29446	-7,29045	8,11584	6,70016	-7,46026	9,37736
Истинная модель:		6,29447	-7,29046	8,11584	6,70017	-7,46026	9,37736

Окончание на стр. 38

Заключение. Для релаксационного итерационного алгоритма МГУА, строящего полное дерево структур, теоретически доказана внутренняя сходимость: *к решению* при условии, что исходная матрица содержит только истинные аргументы, а число наблюдений больше или равно количеству аргументов; *к неподвижной точке*, когда число аргументов больше, чем число наблюдений.

Экспериментально показана сходимость как *к решению*, так и *по структуре* при наличии фиктивных аргументов в матрице исходных данных.

1. *Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. – М.: Радио и связь, 1987.– 120 с.

2. *Павлов А.В.* Обобщенный релаксационный итерационный алгоритм МГУА // Индуктивне моделювання складних систем: Зб. наук. пр. // К.: МННЦІТтаС, 2011. – 3. – С. 130–143.
3. *Ивахненко А.Г., Степашико В.С.* Помехоустойчивость моделирования. – Киев: Наук. думка, 1985. –214 с.
4. *Павлов А.В., Павлов В.А.* Методика экспериментальных исследований сходимости итерационных алгоритмов метода группового учета аргументов // Вісн. НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – 2011. – № 54, С. 36–40.

Поступила 21.12.2011

Тел. для справок: (044) 412-05-97, 0636863474 (Киев)

E-mail: me_ovechka@bigmir.net

© А.В. Павлов, Н.В. Кондрашова, 2012

