УДК 519.6

О.М. Литвин, О.В. Ярмош

Наближення спеціальними функціями визначених двох змінних з використанням дискретних даних

Сформулированы и доказаны теоремы относительно свойств операторов приближения функции суммами определенного вида в норме для случая, когда заданы значения функции на системе точек.

The theorems are formulated and proved concerning the properties of the approach of the function by the sums of the kind the norm for a case, when the values of the function on the system of points are specified.

Сформульовано та доведено теореми відносно властивостей операторів наближення функції сумами визначеного вигляду в нормі для випадку, коли задано значення функції на системі точок.

Вступ. Задача наближення функцій двох змінних $f(x,y)$ сумами $\varphi_0(x)\psi_0(y)+...+\varphi_N(x)\psi_N(y)$ виникає, наприклад, при розв'язанні інтегральних рівнянь – заміна ядра $G(x,y)$ інтегрального рівняння $y(x)=\lambda\int_a^b G(x,t)y(t)dt+f(x)$ вказаною сумою дає можливість знайти розв'язання рівняння в аналітичній формі. В теорії і на практиці розв'язання граничних задач широко використовується класичний метод розділення змінних, який зображує розв'язання граничної задачі у вигляді ряду $\varphi_0(x)\psi_0(y)+...+\varphi_N(x)\psi_N(y)+\dots$.

У працях [1–4] та інших розглянуто знаходження найкращого наближення $f(x,y)$ із заданих класів з допомогою сум добутків функцій однієї змінної на функцію кількох змінних. В працях [5–7] досліджено мішану апроксимацію сумами Фур'є, а в працях [6, 7] – також мішана апроксимація поліномами Бернштейна та сумами вейвлетів.

Постановка задачі

В роботі [6] отримано формули для знаходження функцій $\varphi_k(x)$, $\psi_l(y)$, $k,l=\overline{0,N}$ та невідомих сталих $C_{k,l}$ у виразі

$$Z(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)+ \\ +\sum_{l=0}^{N}\psi_l(x)h_{2,l}(y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y) \quad (1)$$

з умови

$$J(Z)=\| f(x,y)-Z(x,y)\|_{L_2[0,1]^2}\to\min_{z\in B_N}, \quad (2)$$

де B_N – клас функцій вигляду (1).

При цьому вважається, що $h_{1,k}$ та $h_{2,l}$ – задана система лінійно незалежних функцій; функції $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$ і сталі $C_{k,l}$ вважаються невідомими.

Тобто, ці невідомі мають знаходитися шляхом розв'язання наступної мінімізаційної задачі

$$J(Z)=\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]^2dxdy\to\min_{\phi_k,\psi_l,C_{k,l}}. \quad (3)$$

В результаті доведено теорему.

Теорема 1. [6]. Сталі $C_{k,l}$ та функції $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$, $k,l=\overline{0,N}$, які є розв'язанням задачі (3), задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь (лінійних відносно $C_{k,l}$):

$$\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{1,p}(x)h_{2,q}(y)dxdy=0, \\ p,q=\overline{0,N} \quad (4)$$

та двом системам функціональних рівнянь:

$$\int_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{1,p}(x)dx=0,\ p=\overline{0,N}, \quad (5)$$

$$\int_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{2,q}(y)dy=0,\ q=\overline{0,N}. \quad (6)$$

При цьому єдине розв'язання задачі (3) має вигляд:

$$Z^*(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)+ \\ +F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)-h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y), \quad (7)$$

де

$$h_1(x)=\left\lfloor h_{1,1}(x),...,h_{1,N}(x)\right\rfloor,$$

$$h_2(y)=\left\lfloor h_{2,1}(y),...,h_{2,N}(y)\right\rfloor,$$

$$F=\int_0^1\int_0^1 h_1^T(x)f(x,y)h_2(y)dxdy;$$

$$F_1^T(y)=\int_0^1 h_1^T(x)\,f(x,y)dx\,,$$

$$F_2(x)=\int_0^1 f(x,y)\,h_2(y)dy\,,\; B_1=\int_0^1 h_1^T(x)\,h_1(x)dx\,,$$

$$B_2=\int_0^1 h_2^T(y)\,h_2(y)dy\,.$$

Авторами статті сформульовано і доведено низку теорем стосовно іншого представлення $Z^*(x,y)$, а також стосовно розв'язання аналога мінімізаційної задачі (3), що дозволяє дослідити похибку наближення побудованими конструкціями. Зокрема доведено, що

$$Z^*(x,y)=Z^*f(x,y)=(A_1+A_2-A_1A_2)\,f(x,y)\,,$$

де

$$A_1f(x,y)=h_1(x)\varphi^T(y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)\,,$$
$$A_2f(x,y)=\psi(x)h_2^T(y)=F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)\,,$$
$$A_1A_2f(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y)\,.$$

Оператори A_1, A_2 отримуються шляхом розв'язання мінімізаційних задач

$$\int_0^1\left[f(x,y)-h_1(x)\varphi^T(y)\right]^2dx\to\min_{\varphi(y)}$$

та

$$\int_0^1\left[f(x,y)-\psi(y)h_2^T(y)\right]^2dy\to\min_{\psi(x)}\,.$$

Однак на практиці функція $f(x,y)$ рідко буває відомою в аналітичній формі. Найчастіше бувають відомими її значення $f(x_i,y_j)=f_{i,j}$, $0\le i$, $j\le M$. Тому актуальними є знаходження явних формул для розв'язання задач, аналогічних наведеним, але для випадку, коли $f(x,y)$ задано її слідами $f(x_i,y)$ та $f(x,y_j)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x=x_i$, $y=y_j$, тобто відомі її значення $f(x_i,y_j)$.

Основні твердження

В даній статті поширюються результати [6, 8] на випадок дискретного задання $f(x,y)$.

Теорема 2. У випадку, якщо функцію $f(x,y)$ задано матрицею значень $f_{p,q}=f\left(\dfrac{p}{M},\dfrac{q}{M}\right)$ ($p,q=\overline{0,M}$) і наближуємо $f(x,y)$ з умови

$$J(C)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left[f_{p,q}-Z0(x_p,y_q,C)\right]^2\to\min_{C_{k,l}} \quad (8)$$

функцією такого вигляду:

$$Z0(x,y,C)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)=h_1(x)Ch_2^T(y)\,, \quad (9)$$

де функції $h_{1,k}(x)$ та $h_{2,l}(y)$ – відомі лінійно незалежні функції, $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ – невідомі сталі, то для матриці C виконується співвідношення:

$$C=\tilde C=\tilde B1^{-1}\tilde F\tilde B2^{-1}\,,$$

де

$$\tilde B1_{k,\mu}=\sum_{p=0}^{M}h_{1,k}(x_p)h_{1,\mu}(x_p)\,,$$
$$\tilde B2_{l,\nu}=\sum_{q=0}^{M}h_{2,l}(y_q)h_{2,\nu}(y_q)\,,$$
$$\tilde F_{\mu,\nu}=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}f_{p,q}h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)\,.$$

Доведення. Для цієї класичної задачі теорії апроксимації автори отримали аналог теореми 3. Шукаємо невідомі $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ з умови (8).

$$\frac{\partial J(C)}{\partial C_{\mu,\nu}}=2\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\Big(f_{p,q}-Z0(x_p,y_q)\Big)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial C_{\mu,\nu}}\left(f_{p,q}-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\partial J(C)}{\partial C_{\mu,\nu}}=2\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(f_{p,q}-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)\right)\times$$
$$\times\Big(-h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)\Big)=0,\;\mu,\nu=\overline{0,N}.$$

Перепишемо останні рівності у вигляді

$$\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)\right)=$$
$$=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}f_{p,q}h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)=\tilde F_{\mu,\nu},\;\mu,\nu=\overline{0,N},$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\tilde B1_{k,\mu}C_{k,l}\tilde B2_{l,\nu}=\tilde F_{\mu,\nu}\,,\;\mu,\nu=\overline{0,N}\,. \quad (10)$$

Перепишемо систему рівнянь (10) у матричному вигляді. Отримаємо $\tilde B1\tilde C\tilde B2=\tilde F$, звідки $\tilde C=\tilde B1^{-1}\tilde F\tilde B2^{-1}$.

Отже, $Z0(x,y,C) = h1(x)\tilde{C}h2^T(y) =$
$= h1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h2^T(y)$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Якщо $Z0f(x,y) =$
$= h1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h2^T(y)$, то $Z0f(x,y) =$
$= \tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y)$, де $\tilde{A}_1 f(x,y) = h_1(x)\varphi^T(y) =$
$= h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y)$, $x \in [0,1]$,

$$\tilde{F}1(y) = \sum_{p=0}^{M} f(x_p, y) h_{1,\mu}(x_p),$$

$$\tilde{A}_2 f(x,y) = \psi(x) h_2^T(y) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y),\ y \in [0,1],$$

$$\tilde{F}2(x) = \sum_{q=0}^{M} f(x, y_q) h_{2,\nu}(y_q).$$

Доведення. Для фіксованого y знаходимо $\varphi(y)$ з умови

$$J1(\varphi) = \sum_{p=0}^{M}\left[h_1(x_p)\varphi^T(y) - f(x_p,y)\right]^2 \to \min_{\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = \tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y),\ \text{де}\ \tilde{F}1_\mu(y) = \sum_{p=0}^{M} f(x_p,y)h_{1,\mu}(x_p),$$

тобто $\tilde{A}_1 f(x,y) = h_1(x)\tilde{B}1^{-1}(\tilde{F}1f)(y)$.

Аналогічно для фіксованого x з умови

$$J2(\psi) = \sum_{q=0}^{M}\left[\psi(x)h_2^T(y_q) - f(x,y_q)\right]^2 \to \min_{\psi}$$

отримуємо $\psi(x) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}$, де $\tilde{F}2_\nu(x) =$
$= \sum_{q=0}^{M} f(x,y_q)h_{2,\nu}(y_q)$, тобто $\tilde{A}_2 f(x,y) =$
$= (\tilde{F}2f)(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y)$.

Подальше доведення витікає з того, що оператори $\tilde{A}_1 f(x,y)$ та $\tilde{A}_2 f(x,y)$ є перестановними один з іншим, тобто

$$\tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y) = \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 f(x,y)) =$$
$$= h_1(x)\tilde{B}1_\mu^{-1}\sum_{p=0}^{M} h_{1,\mu}(x_p)\tilde{A}_2 f(x_p,y) =$$
$$= h_1(x)\tilde{B}1_\mu^{-1}\sum_{p=0}^{M} h_{1,\mu}(x_p)\sum_{q=0}^{M} f(x_p,y_q)h_{2,\nu}(y_q)\tilde{B}2_\nu^{-1}h_2^T(y) =$$
$$= h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y) = \tilde{A}_2\tilde{A}_1 f(x,y),\ (x,y \in [0,1]),$$

де $\tilde{F}_{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} f(x_p,y_q)h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q),\ \mu,\nu = \overline{0,N}$.

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що теорема 3 дозволяє відбити залишок наближення функції $f(x,y)$ оператором $Z0(x,y,C)$ через залишки наближення $f(x,y)$ операторами $\tilde{A}_1 f(x,y)$ та $\tilde{A}_2 f(x,y)$, що діють на одну змінну (x та y відповідно). В результаті доведемо теорему.

Теорема 4. Похибка наближення функції $f(x,y)$ за допомогою $Z0(x,y,C)$ має вигляд:

$$Rf(x,y) = f(x,y) - Z0(x,y,C) =$$
$$= \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1\tilde{R}_2\right) f(x,y),$$

де $\tilde{R}_1 f(x,y) = f(x,y) - \tilde{A}_1 f(x,y)$,

$\tilde{R}_2 f(x,y) = f(x,y) - \tilde{A}_2 f(x,y)$.

Доведення. Запишемо такий ряд рівностей (I – тотожний оператор):

$$f(x,y) - Z0(x,y,C) = f(x,y) - \tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y) =$$
$$= (I - \tilde{A}_1\tilde{A}_2) f(x,y) = \left[(I - \tilde{A}_1) + (I - \tilde{A}_2) -\right.$$
$$\left.-(I - \tilde{A}_1)(I - \tilde{A}_2)\right] f(x,y) = (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_1 - \tilde{R}_1\tilde{R}_2) f(x,y).$$

Теорему 4 доведено.

Зауваження 1. У випадку, коли функцію $f(x,y)$ задано матрицею значень $f_{p,q}$, знайти розв’язання задачі

$$JJ(\varphi,\psi,C) =$$
$$= \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(f_{p,q} - Z(x_p,y_q)\right)^2 \to \min_{\varphi(y),\psi(x),C}, \tag{11}$$

де $Z(x_p, y_q)$ представлено у вигляді (1) можливо, якщо прийняти $\varphi_k(y) = C1_k$, $\psi_l(x) = C2_l$, де $C1$ та $C2$ – сталі вектори.

Теорема 5. Якщо у формулі (1) прийняти $\varphi_k(y) = C1_k$, $\psi_l(x) = C2_l$, де $C1$ та $C2$ – сталі вектори і система $h_{1,k}$, $h_{2,l}$ є розкладом одиниці

$\left(\sum_{k=0}^{N} h_{1,k} \equiv 1,\ \sum_{l=0}^{N} h_{2,l} \equiv 1\right)$, тобто, якщо формула (1) має вигляд

$$ZZ(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C1_k h1_k(x) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{N} C2_l h2_l(y) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l} h1_k(x) h2_l(y) \tag{12}$$

або в матрично-векторній формі

$$ZZ(x,y) = h1(x)\cdot C1^T +$$
$$+ C2\cdot h2^T(y) - h1(x)\cdot C3\cdot h2^T(y),$$

то її можна подати у вигляді

$$ZZ(x,y) = h1(x)\left(C\right)h2^T(y),$$

де $C = \tilde{C}1 + \tilde{C}2 - C3$, $\tilde{C}1 = \left[C1, C1, ..., C1\right]$, $\tilde{C}2^T = = \left[C2, C2, ..., C2\right]$.

Доведення. Перепишемо вираз (12) у наступному вигляді:

$$ZZ(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C1_k h1_k(x) + \sum_{l=0}^{N} C2_l h2_l(y) -$$
$$- \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l} h1_k(x) h2_l(y) = \left(\sum_{k=0}^{N} h1_k(x) \equiv 1,\right.$$
$$\left.\sum_{l=0}^{N} h2_l(y) \equiv 1\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C1_k h1_k(x) h2_l(y) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C2_l h1_k(x) h2_l(y) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l} h1_k(x) h2_l(y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\left(C1_k + C2_l - C3_{k,l}\right) h1_k(x) h2_l(y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} h1_k(x) C_{k,l} h2_l(y) = h1(x) C h2^T(y).$$

У цьому випадку мінімізаційна задача (11) зводиться до знаходження однієї матриці $C = \tilde{C}1 + \tilde{C}2 - C3$.

Теорему 5 доведено.

Приклад. Нехай $f_{p,q} = f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$, де $f(x,y) = = \ln\left\lfloor (x+a)^2 + (y+b)^2 \right\rfloor$, $a = b = 1$, $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$, $k,l = \overline{0,N}$ – базисні сплайни першого степеня. При наближенні функції, заданої значеннями в точках $f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$ оператором $Z0(x,y,C) = = h_1(x) C h_2^T(y)$ при $N = 10$ та $M = 20$ отримано похибку наближення $\varepsilon = O(10^{-4})$. Аналогічне значення похибки отримано при наближенні функції $f(x,y)$ операторами $\tilde{A}_1(x,y) = h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y)$ та $\tilde{A}_2(x,y) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y)$.

Висновки. На практиці аналітичний вигляд функції $f(x,y)$ часто невідомий, тому виникає необхідність наближення операторами, розглянутими в статті. Такий підхід вважається корисним у випадках, коли задано значення $f(x_p, y_q) = f_{p,q}$ функції $f(x,y)$ на системі точок (x_p, y_q) з похибкою. Побудовані оператори дозволяють згладити експериментальні дані, а також відбити залишки наближення $f(x,y)$ через залишки наближення операторами, що діють на одну змінну.

Використання таких форм операторів наближення функцій двох змінних може знайти застосування у дослідженні математичних моделей залежності попиту на освітні послуги від ціни та рейтингу вищого навчального закладу.

1. *Бабаев М.-Б.А.*. Наилучшее приближение функциями меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 273–277.
2. *Поспелов В.В.* О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного. – М.: Наука, 1978. – 40 с.
3. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАМ. – 1986. – **178**. – С. 1–112.
4. *Шура-Бура М.Р.* Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вычисл. математика. – 1957. – № 2. – С. 3–19.
5. *Потапов М.К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углом» // Тр. МИАН. – 1972. – **117**. – С. 256–291.
6. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
7. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посібник. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.

Поступила 24.03.2011

Тел. для справок: (066) 135-9633, (067) 607-9000 (Харьков)

E-mail: *academ@kharkov.ua, yel_mag@mail.ru*

О.Н. Литвин, Е.В. Ярмош

Приближение специальными функциями определенных двух переменных с использованием дискретных данных

Введение. Задача приближения функций двух переменных $f(x,y)$ суммами $\varphi_0(x)\psi_0(y) + ... + \varphi_N(x)\psi_N(y)$ возникает, например, при решении интегральных уравнений – замена ядра $G(x,y)$ интегрального уравнения $y(x) =$

$=\lambda\int\limits_a^b G(x,t)y(t)dt+f(x)$ указанной суммой дает возможность найти решение уравнения в аналитической форме. В теории и на практике решения краевых задач широко используется классический метод разделения сменных, который изображает решение предельной задачи в виде ряда $\varphi_0(x)\,\psi_0(y)+_{\dots}+\varphi_N(x)\,\psi_N(y)+\dots$.

В работах [1–4] и других рассмотрено нахождение наилучшего приближения $f(x,y)$ из заданных классов с помощью сумм произведений функций одной переменной на функции нескольких переменных. В работах [5–7] исследована смешанная аппроксимация суммами Фурье, а в работах [6, 7] – также смешанная аппроксимация полиномами Бернштейна и суммами вейвлетов.

Постановка задачи

В работе [6] получены формулы для нахождения функций $\varphi_k(x)$, $\psi_l(y)$, $k,l=\overline{0,N}$ и неизвестных постоянных $C_{k,l}$ в выражении

$$Z(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N}\psi_l(x)h_{2,l}(y)-\\-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y) \qquad (1)$$

из условия

$$J(Z)=\|f(x,y)-Z(x,y)\|_{L_2[0,1]^2}\to\min_{z\in B_N}, \qquad (2)$$

где B_N – класс функций вида (1).

При этом считается, что $h_{1,k}$ и $h_{2,l}$ – заданная система линейно независимых функций; функции $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$ и постоянные $C_{k,l}$ считаются неизвестными.

Тогда эти неизвестные следует находить путем решения следующей минимизационной задачи

$$J(Z)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]^2dxdy\to\min_{\varphi_k,\psi_l,C_{k,l}}. \qquad (3)$$

В результате доказана теорема.

Теорема 1. [6]. Постоянные $C_{k,l}$ и функции $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$, $k,l=\overline{0,N}$, которые есть решением задачи (3), удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (линейных относительно $C_{k,l}$):

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{1,p}(x)h_{2,q}(y)dxdy=0,\ p,q=\overline{0,N} \qquad (4)$$

и двум системам функциональных уравнений:

$$\int\limits_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{1,p}(x)dx=0,\ p=\overline{0,N}, \qquad (5)$$

$$\int\limits_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]h_{2,q}(y)dy=0,\ q=\overline{0,N}. \qquad (6)$$

При этом единственное решение задачи (3) имеет вид

$$Z^*(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)+\\+F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)-h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y), \qquad (7)$$

где

$$h_1(x)=\lfloor h_{1,1}(x),...,h_{1,N}(x)\rfloor,\ h_2(y)=\lfloor h_{2,1}(y),...,h_{2,N}(y)\rfloor,$$

$$F=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 h_1^T(x)f(x,y)h_2(y)dxdy;\ F_1^T(y)=\int\limits_0^1 h_1^T(x)f(x,y)dx,$$

$$F_2(x)=\int\limits_0^1 f(x,y)h_2(y)dy,\ B_1=\int\limits_0^1 h_1^T(x)h_1(x)dx,$$

$$B_2=\int\limits_0^1 h_2^T(y)h_2(y)dy.$$

Авторами статьи сформулированы и доказаны теоремы относительно другого представления $Z^*(x,y)$, а также относительно решения аналога минимизационной задачи (3), что позволяет исследовать погрешность приближения построенными конструкциями. В частности доказано, что

$$Z^*(x,y)=Z^*f(x,y)=(A_1+A_2-A_1A_2)f(x,y),$$

$$\text{где } A_1f(x,y)=h_1(x)\varphi^T(y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y),$$

$$A_2f(x,y)=\psi(x)h_2^T(y)=F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y),$$

$$A_1A_2f(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y).$$

Операторы A_1, A_2 получаются путем решения минимизационных задач $\int\limits_0^1\left[f(x,y)-h_1(x)\varphi^T(y)\right]^2dx\to\min\limits_{\phi(y)}$ и $\int\limits_0^1\left[f(x,y)-\psi(y)h_2^T(y)\right]^2dy\to\min\limits_{\psi(x)}$.

Однако на практике функция $f(x,y)$ редко бывает известной в аналитической форме. Чаще всего бывают известными ее значения $f(x_i,y_j)=f_{i,j}$, $0\le i,j\le M$. Поэтому актуально нахождение явных формул для решения задач, аналогичных указанным, но для случая, когда функция $f(x,y)$ задана ее следами $f(x_i,y)$ и $f(x,y_j)$ на системе взаимно перпендикулярных прямых $x=x_i$, $y=y_j$, т.е. известны ее значение $f(x_i,y_j)$.

Основные утверждения

В данной статье представлены результаты, которые распространяются на случай дискретного задания $f(x,y)$ [6].

Теорема 2. В случае, если функция $f(x,y)$ задана матрицей значений $f_{p,q}=f\left(\dfrac{p}{M},\dfrac{q}{M}\right)$ ($p,q=\overline{0,M}$), и приближается $f(x,y)$ из условия

$$J(C)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left[f_{p,q}-Z0(x_p,y_q,C)\right]^2\to\min_{C_{k,l}} \qquad (8)$$

функцией такого вида:

$$Z0(x,y,C)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)=h_1(x)Ch_2^T(y), \qquad (9)$$

где функции $h_{1,k}(x)$ и $h_{2,l}(y)$ – известные линейно независимые функции, $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ – неизвестные постоянные, то для матрицы C имеем соотношение

$$C = \tilde{C} = \tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1},$$

где $\tilde{B}1_{k,\mu} = \sum_{p=0}^{M} h_{1,k}(x_p)h_{1,\mu}(x_p)$, $\tilde{B}2_{l,\nu} = \sum_{q=0}^{M} h_{2,l}(y_q)h_{2,\nu}(y_q)$, $\tilde{F}_{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} f_{p,q}h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)$.

Доказательство. Для этой классической задачи теории аппроксимации авторы получили аналог теоремы 3. Ищем неизвестные $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ из условия (8)

$$\frac{\partial J(C)}{\partial C_{\mu,\nu}} = 2\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(f_{p,q} - Z0(x_p,y_q)\right)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial C_{\mu,\nu}}\left(f_{p,q} - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J(C)}{\partial C_{\mu,\nu}} = 2\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(f_{p,q} - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)\right)\times$$

$$\times\left(-h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)\right) = 0,\ \mu,\nu = \overline{0,N}.$$

Перепишем последние равенства в виде

$$\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y_q)h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} f_{p,q}h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q) = \tilde{F}_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = \overline{0,N},$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \tilde{B}1_{k,\mu}C_{k,l}\tilde{B}2_{l,\nu} = \tilde{F}_{\mu,\nu},\ \mu,\nu = \overline{0,N}. \qquad (10)$$

Перепишем систему уравнений (10) в матричном виде. Получим $\tilde{B}1\tilde{C}\tilde{B}2 = \tilde{F}$, откуда $\tilde{C} = \tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}$.

Таким образом, $Z0(x,y,C) = h1(x)\tilde{C}h2^T(y) = = h1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h2^T(y)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $Z0f(x,y) = h1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h2^T(y)$, то $Z0f(x,y) = \tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y)$, где $\tilde{A}_1 f(x,y) = = h_1(x)\varphi^T(y) = h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y)$, $x\in[0,1]$,

$$\tilde{F}1(y) = \sum_{p=0}^{M} f(x_p,y)h_{1,\mu}(x_p),$$

$$\tilde{A}_2 f(x,y) = \psi(x)h_2^T(y) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y),\ y\in[0,1],$$

$$\tilde{F}2(x) = \sum_{q=0}^{M} f(x,y_q)h_{2,\nu}(y_q).$$

Доказательство. Для фиксированного y находим $\varphi(y)$ из условия

$$J1(\varphi) = \sum_{p=0}^{M}\left[h_1(x_p)\varphi^T(y) - f(x_p,y)\right]^2 \to \min_{\varphi} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi(y) = \tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y)$, где $\tilde{F}1_\mu(y) = \sum_{p=0}^{M} f(x_p,y)h_{1,\mu}(x_p)$, т.е. $\tilde{A}_1 f(x,y) = h_1(x)\tilde{B}1^{-1}(\tilde{F}1f)(y)$.

Аналогично, для фиксированного x из условия $J2(\psi) = \sum_{q=0}^{M}\left[\psi(x)h_2^T(y_q) - f(x,y_q)\right]^2 \to \min_{\psi}$ получаем $\psi(x) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}$, где $\tilde{F}2_\nu(x) = \sum_{q=0}^{M} f(x,y_q)h_{2,\nu}(y_q)$, т.е. $\tilde{A}_2 f(x,y) = (\tilde{F}2f)(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y)$.

Дальнейшее доказательство вытекает из того, что операторы $\tilde{A}_1 f(x,y)$ и $\tilde{A}_2 f(x,y)$ – перестановочные один с другим, т.е.

$$\tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y) = \tilde{A}_1(\tilde{A}_2 f(x,y)) = h_1(x)\tilde{B}1_\mu^{-1}\sum_{p=0}^{M} h_{1,\mu}(x_p)\tilde{A}_2 f(x_p,y) =$$

$$= h_1(x)\tilde{B}1_\mu^{-1}\sum_{p=0}^{M} h_{1,\mu}(x_p)\sum_{q=0}^{M} f(x_p,y_q)h_{2,\nu}(y_q)\tilde{B}2_\nu^{-1}h_2^T(y) =$$

$$= h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y) = \tilde{A}_2\tilde{A}_1 f(x,y),\ (x,y\in[0,1]),$$

где $\tilde{F}_{\mu,\nu} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} f(x_p,y_q)h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y_q)$, $\mu,\nu = \overline{0,N}$.

Теорема 3 доказана.

Заметим, что теорема 3 позволяет выразить остаток приближения функции $f(x,y)$ оператором $Z0(x,y,C)$ через остатки приближения $f(x,y)$ операторами $\tilde{A}_1 f(x,y)$ и $\tilde{A}_2 f(x,y)$, действующими на одну переменную (x и y соответственно). В результате докажем теорему.

Теорема 4. Погрешность приближения функции $f(x,y)$ с помощью $Z0(x,y,C)$ имеет вид $Rf(x,y) = f(x,y) - Z0(x,y,C) = \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1\tilde{R}_2\right)f(x,y)$, где $\tilde{R}_1 f(x,y) = f(x,y) - \tilde{A}_1 f(x,y)$, $\tilde{R}_2 f(x,y) = f(x,y) - \tilde{A}_2 f(x,y)$.

Доказательство. Запишем следующий ряд равенств (I – тождественный оператор):

$$f(x,y) - Z0(x,y,C) = f(x,y) - \tilde{A}_1\tilde{A}_2 f(x,y) =$$

$$= (I - \tilde{A}_1\tilde{A}_2)f(x,y) = \left[(I-\tilde{A}_1) + (I-\tilde{A}_2) - (I-\tilde{A}_1)(I-\tilde{A}_2)\right]\times$$

$$\times f(x,y) = (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_1 - \tilde{R}_1\tilde{R}_2)f(x,y).$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. В случае, когда функция $f(x,y)$ задана матрицей значений $f_{p,q}$, найти решение задачи

$$JJ(\varphi,\psi,C) = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left(f_{p,q} - Z(x_p,y_q)\right)^2 \to \min_{\varphi(y),\psi(x),C}, \qquad (11)$$

где $Z(x_p,y_q)$ представлено в виде (1) возможно, если принять $\varphi_k(y) = C1_k$, $\psi_l(x) = C2_l$, где $C1$ и $C2$ – постоянные векторы.

Теорема 5. Если в формуле (1) принять $\varphi_k(y) = C1_k$, $\psi_l(x) = C2_l$, где $C1$ и $C2$ – постоянные векторы и система $h_{1,k}$, $h_{2,l}$ есть разложением единицы $\left(\sum_{k=0}^{N} h_{1,k} \equiv 1,\ \sum_{l=0}^{N} h_{2,l} \equiv 1\right)$, т.е. если формула (1) имеет вид

$$ZZ(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C1_k h1_k(x) + \sum_{l=0}^{N} C2_l h2_l(y) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l}h1_k(x)h2_l(y) \qquad (12)$$

или в матрично-векторной форме

$$ZZ(x,y) = h1(x)\cdot C1^T + C2\cdot h2^T(y) - h1(x)\cdot C3\cdot h2^T(y),$$

то она может быть представлена в виде

$$ZZ(x,y) = h1(x)\left(C\right)h2^T(y),$$

где $C = \tilde{C}1 + \tilde{C}2 - C3$, $\tilde{C}1 = \left[C1, C1, ..., C1\right]$, $\tilde{C}2^T = \left[C2, C2, ..., C2\right]$.

Доказательство. Перепишем равенство (12) в следующем виде:

$$ZZ(x,y) = \sum_{k=0}^{N} C1_k h1_k(x) + \sum_{l=0}^{N} C2_l h2_l(y) -$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l} h1_k(x) h2_l(y) = \left(\sum_{k=0}^{N} h1_k(x) \equiv 1, \sum_{l=0}^{N} h2_l(y) \equiv 1\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C1_k h1_k(x) h2_l(y) + \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C2_l h1_k(x) h2_l(y) -$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C3_{k,l} h1_k(x) h2_l(y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\left(C1_k + C2_l - C3_{k,l}\right)\times$$

$$\times h1_k(x) h2_l(y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} h1_k(x) C_{k,l} h2_l(y) = h1(x) C h2^T(y).$$

В этом случае минимизационная задача (11) сводится к нахождению одной матрицы $C = \tilde{C}1 + \tilde{C}2 - C3$.

Теорема 5 доказана.

Пример. Пусть $f_{p,q} = f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$, где $f(x,y) = \ln\lfloor(x+a)^2 + (y+b)^2\rfloor$, $a=b=1$, $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$, $k,l = \overline{0,N}$ – базисные сплайны первой степени. При приближении функции, заданной значениями в точках $f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$, оператором $Z0(x,y,C) = h_1(x) C h_2^T(y)$ при $N=10$ и $M=20$ получена погрешность приближения $\varepsilon = O(10^{-4})$. Аналогичное значение ошибки получено при приближении функции $f(x,y)$ операторами $\tilde{A}_1(x,y) = h_1(x)\tilde{B}1^{-1}\tilde{F}1(y)$ и $\tilde{A}_2(x,y) = \tilde{F}2(x)\tilde{B}2^{-1}h_2^T(y)$.

Заключение. На практике аналитический вид функции $f(x,y)$ часто неизвестен, поэтому возникает необходимость приближения операторами, рассмотренными в статье. Такой подход полезен в тех случаях, когда заданы значения $f(x_p, y_q) = f_{p,q}$ функции $f(x,y)$ на системе точек (x_p, y_q) с погрешностью. Построенные операторы позволяют сгладить экспериментальные данные, а также выразить остатки приближения функции $f(x,y)$ через остатки приближения операторами, действующими на одну переменную.

Использование таких форм операторов приближения функций двух переменных может найти применение при исследовании математических моделей зависимости спроса на образовательные услуги высшего учебного заведения от цены и рейтинга.

●