УДК 519.718

А.М. Романкевич, В.А. Романкевич, А.П. Фесенюк

Об одном методе расчета показателей надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем

Предложен метод расчета вероятности безотказной работы отказоустойчивых реконфигурируемых многопроцессорных систем, основанный на проведении статистических экспериментов с *GL*-моделями. Получены соотношения для оценки погрешности расчета. Определены условия, при которых предложенный метод имеет меньшую погрешность в сравнении с другими статистическими методами.

A method of the reliability calculation of fault-tolerant multiprocessor systems is suggested. The method is based on conducting the statistical experiments with the GL-models. The equations for the error estimation are given. The comparative analysis of the error of statistical methods is also presented.

Запропоновано метод розрахунку імовірності безвідмовної роботи відмовостійких реконфігуровних багатопроцесорних систем, який базується на проведенні статистичних експериментів з *GL*-моделями. Отримано співвідношення для оцінки похибки розрахунку. Визначено умови, за яких запропонований метод має меншу похибку у порівнянні з іншими статистичними методами.

Введение. Отказоустойчивые реконфигурируемые многопроцессорные системы (ОМС) находят применение в системах управления сложными объектами (авиационные и космические системы, системы управления АЭС, системы управления крупным производством и др.). К таким системам устанавливаются высокие требования по надежности, так как их отказы могут привести к катастрофическим последствиям.

Исследованию надежности систем посвящено ряд монографий [1–3]. При этом расчет показателей надежности ОМС имеет некоторые особенности. Реальные ОМС критического применения могут иметь сотни процессоров, часто ОМС неоднородны (т.е. могут содержать процессоры разных типов) и имеют многоуровневую иерархическую структуру. Реакцию такой системы на отказы ее элементов можно описывать сложными математическими зависимостями, что задачу расчета показателей надежности ощутимо усложняет. Для определенных достаточно изученных классов ОМС разработаны специализированные методы расчета показателей надежности [4–7]. Для расчета таких показателей, лежащих вне исследованных классов, более эффективны статистические методы [2, 8, 9]. Последние, как известно, имеют определенную погрешность, которая может зависеть от многих факторов. Поэтому для расчета показателей надежности конкретной ОМС следует использовать метод, имеющий в данном случае наименьшую погрешность. Актуальна задача разработки новых статистических методов расчета показателей надежности ОМС и определение условий, при которых погрешность будет минимальной.

Один из наиболее используемых показателей надежности – вероятность безотказной работы системы на протяжении заданного промежутка времени. Начальные данные для расчета – вероятности безотказной работы элементов системы за тот же промежуток времени и модель поведения системы, отражающей зависимость состояния ОМС от состояния ее элементов. Состояние ОМС и состояние ее элементов представляются булевыми переменными (единица – работоспособное состояние, ноль – отказ). Совокупность булевых переменных, представляющих состояния элементов ОМС, называют *вектором состояния системы*. При выполнении каждого статистического эксперимента генератор создает двоичный вектор, рассматриваемый моделью в качестве вектора состояния системы. Собранная статистика отказов системы позволяет рассчитать показатели надежности. Одной из наиболее эффективных моделей поведения ОМС в потоке отказов авторы считают графологическую модель (*GL*-модель) [10].

Отметим, что в зависимости от уровня детализации, выбранного при построении модели поведения системы, элементами ОМС могут считаться отдельные подсистемы, процессоры, микросхемы, шины или другие объекты. При этом способность к реконфигурации свойственна только процессорам (или подсистемам, содержащим процессоры). Поэтому в пределах настоящей статьи будем считать, что состояние

ОМС зависит только от состояния ее процессоров, однако полученные результаты могут быть обобщены и для других элементов.

В данной статье предложен метод расчета вероятности безотказной работы ОМС, основанный на проведении статистических экспериментов с *GL*-моделями поведения ОМС в потоке отказов. Для формирования двоичных векторов состояния системы разработан специализированный генератор, управляемый одновременно по двум параметрам: вес двоичного вектора (количество единиц) и вероятность его появления.

Обозначения

n – количество процессоров ОМС; y – булева переменная, отражающая состояние системы ($y = 0$, если система отказала, $y = 1$, если система работоспособна); $P(y)$ – вероятность безотказной работы ОМС; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – булевы переменные, отражающие состояние процессоров ($x_i = 0$, если i-й процессор отказал, $x_i = 1$, если i-й процессор работоспособен, $i = 1, \ldots, n$); $p(x_i)$ – вероятность безотказной работы i-го процессора; $q(x_i) = 1 - p(x_i)$ – вероятность отказа i-го процессора; $\mathbf{X}$ – вектор состояния системы, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$; $P(\mathbf{X})$ – вероятность вектора состояния системы; φ – состояние ОМС, определяемое с помощью *GL*-модели на векторе $\mathbf{X}$, другими словами, $y = \varphi(\mathbf{X}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$; $B(n)$ – множество всех двоичных векторов длины n; $W(n, m)$ – множество всех двоичных векторов длины n, которые имеют вес m.

Расчет вероятности безотказной работы ОМС

Рассмотрим ОМС с n процессорами и *GL*-моделью φ. Вероятность безотказной работы для такой системы, используя введенные обозначения, можно записать как [1, 2, 8, 9]:

$$P(y) = \sum_{\mathbf{X} \in B(n)} \varphi(\mathbf{X}) P(\mathbf{X}), \qquad (1)$$

где запись $\mathbf{X} \in B(n)$ означает, что суммирование выполняется для всех двоичных векторов длины n; $P(\mathbf{X})$ – вероятность того, что процессоры ОМС находятся в состояниях, описываемых вектором $\mathbf{X}$; $\varphi(\mathbf{X}) = 1$, если система сохраняет работоспособность при появлении вектора состояния системы $\mathbf{X}$, $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ в противном случае.

Другими словами, вероятность безотказной работы системы равна сумме вероятностей таких ее состояний, в которых она сохраняет работоспособность.

Вероятность вектора состояния системы $P(\mathbf{X})$, используемая в соотношении (1), равна:

$$P(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} p(\tilde{x}_i),$$

где $p(\tilde{x}_i)$ – вероятность состояния процессора – вероятность того, что i-й процессор находится в состоянии, описываемом переменной x_i, т.е.,

$$p(\tilde{x}_i) = (1 - x_i) \cdot q(x_i) + x_i \cdot p(x_i). \qquad (2)$$

Отметим, что в выражении (2) и далее в тексте статьи булевы переменные x_i используются как целые, принимающие значения ноль или единица, что позволяет записывать условные операторы в короткой форме.

Количество всех двоичных векторов длины n равно $|B(n)| = 2^n$. Очевидно, что при достаточно больших значениях n выполнить вычисления в выражении (1) пока не представляется возможным. В этом случае величину вероятности безотказной работы системы можно оценить с помощью статистических экспериментов. По способу получения двоичных векторов состояния системы можно выделить два подхода к проведению статистических экспериментов. Согласно первому подходу в каждом статистическом эксперименте с определенной вероятностью может появиться произвольный двоичный вектор состояния системы. Второй подход предусматривает проведение отдельной серии статистических экспериментов для каждого множества двоичных векторов состояния системы с заданным весом. Второй подход позволяет с большей точностью выполнить вычисления для множеств векторов $W(n, m)$, которые оказывают наибольшее влияние на общий результат, однако его реализация более сложна. Среди известных статистических методов, пригодных для вычисления показателей надежности неоднородных небазовых ОМС [10], первый подход используется в методе «убыстрения статистических испытаний» [2], второй – иллюстрируется методом, предложенным в [8, 9]. Особенность описанного ниже метода состоит в использовании неравномерного распределения вероятностей появления векторов состояния системы при применении второго подхода.

Обозначим через $S(n, m)$ сумму вероятностей векторов состояния системы, имеющих вес m и длину n, т.е. $S(n,m) = \sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)} P(\mathbf{X})$, где запись $\mathbf{X} \in W(n, m)$ означает, что суммирование выполняется для всех двоичных векторов длины n, имеющих вес m. Величины $S(n, m)$ могут быть вычислены с помощью алгоритма Рушди [1]:

$$S(i,j) = p(x_i)\cdot S(i-1,j-1) + q(x_j)\cdot S(i-1,j), \quad (3)$$

где $i, j \le n$; $S(0,0) = 1$; $S(i,j) = 0$, если $i < 0$.

Обозначим $P^{(1)}_{\text{gen}}(\mathbf{X})$ вероятность получения вектора $\mathbf{X}$ на выходе генератора, где $\mathbf{X} \in W(n, m)$. Рассмотрим распределение вероятностей, при котором $P^{(1)}_{\text{gen}}(\mathbf{X})$ равно $P^{(1)}_{\text{gen}}(\mathbf{X}) = \dfrac{P(\mathbf{X})}{S(n,m)}$.

Пусть $\Psi^{(1)}(n, m)$ – множество векторов $\mathbf{X}$ длины n с весом m ($\Psi^{(1)}(n, m) \subset W(n, m)$), сформированных генератором, который имеет описанное распределение. Обозначим через $L^{(1)}_m = |\Psi^{(1)}(n, m)|$ количество векторов во множестве $\Psi^{(1)}(n, m)$. Запишем статистическую оценку $M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X}))$ значения состояния системы $\varphi(\mathbf{X})$ на выборке векторов $\Psi^{(1)}(n, m)$:

$$M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X})) = \frac{1}{L^{(1)}_m}\sum_{\mathbf{X}\in\Psi^{(1)}(n,m)} \varphi(\mathbf{X}).$$

На основании $M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X}))$ можно получить статистическую оценку $P^{(1)}(y)$ вероятности безотказной работы системы

$$P^{(1)}(y) = \sum_{m=0}^{n} M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X}))\cdot S(n,m). \quad (4)$$

Отметим, что статистические эксперименты можно проводить не для всех значений $m = 0, 1, \ldots, n$, если известно достаточное для работоспособности системы количество работоспособных процессоров и/или достаточное для отказа количество неработоспособных процессоров.

Можно показать, что математическое ожидание статистической оценки $P^{(1)}(y)$ равно $M(P^{(1)}(y)) = P(y)$, следовательно, статистическая оценка $P^{(1)}(y)$ – несмещенная [11], т.е. при применении соотношения (4) отсутствует константная составляющая погрешности.

Путем несложных математических преобразований можем получить дисперсию статистической оценки $P^{(1)}(y)$:

$$D\left(P^{(1)}(y)\right) = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{L^{(1)}_m}\left(S(n,m)\times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times \sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)} \varphi(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{X}) - \left(\sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)} \varphi(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{X})\right)^2\right)\right).$$

При $L^{(1)}_m \to \infty$ ($m = 0,\ldots,n$) $D(P^{(1)}(y)) \to 0$, откуда следует, что оценка – состоятельна [11], т.е. при использовании соотношения (4) среднеквадратическая составляющая погрешности стремится к нулю.

Для оценки погрешности предложенного метода может быть использовано правило «трех сигм» [11]:

$$P\left(\left|P(y) - P^{(1)}(y)\right| < 3\sigma\left(P^{(1)}(y)\right)\right) \ge 0{,}997,$$

где $\sigma\left(P^{(1)}(y)\right) = \sqrt{D\left(P^{(1)}(y)\right)}$.

После проведения статистических экспериментов величина дисперсии $D(P^{(1)}(y))$ может быть оценена с помощью соотношения

$$D^{(1)}\left(P^{(1)}(y)\right) = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\left(S(n,m)\right)^2}{L^{(1)}_m - 1}\times \right.$$
$$\left.\times\left(M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X})) - \left(M^{(1)}(\varphi(\mathbf{X}))\right)^2\right)\right). \quad (5)$$

Сравнение дисперсий

Проведем сравнение по значению дисперсии представленного в настоящей статье метода с методом, предложенным в [8, 9], и с методом «убыстрения статистических испытаний», описанным в [2]. Используя результаты, полученные в [8, 9], можно построить несмещенную состоятельную статистическую оценку вероятности безотказной работы ОМС:

$$P^{(2)}(y)=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{C_n^m}{L_m^{(2)}}\cdot\sum_{\mathbf{X}\in\Psi^{(2)}(n,m)}\varphi(\mathbf{X})P(\mathbf{X})\right),\quad(6)$$

где запись $\mathbf{X}\in\Psi^{(2)}(n,m)$ означает, что суммирование выполняется для двоичных векторов длиной n и весом m, сформированных специализированным бесповторным равновероятным генератором, для которого вероятность появления вектора $\mathbf{X}$ равна $P_{\text{gen}}^{(2)}(\mathbf{X})=\frac{1}{C_n^m}$, $\Psi^{(2)}(n,m)$ - множество таких векторов, $L_m^{(2)}=\left|\Psi^{(2)}(n,m)\right|$ - количество проведенных статистических экспериментов, $C_n^m=\left|W(n,m)\right|$ – количество различных двоичных векторов длиной n и весом m. Дисперсию статистической оценки (6), опуская промежуточные выкладки, можно записать как

$$D\left(P^{(2)}(y)\right)=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{C_n^m-L_m^{(2)}}{L_m^{(2)}}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{C_n^m-2}{C_n^m-1}\sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)}\left(\varphi(\mathbf{X})P(\mathbf{X})\right)^2-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{C_n^m-1}\cdot\left(\sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)}\varphi(\mathbf{X})P(\mathbf{X})\right)^2\right)\right).$$

Следует отметить, что приведенные в настоящей статье соотношения для дисперсий весьма громоздки и зависят от многих переменных, поэтому практически невозможно получить в короткой форме точные границы, определяющие преимущество одного метода над другим. Кроме того, следует учитывать, что за одно и то же время для разных методов может быть проведено разное количество статистических экспериментов. Огрубляя расчеты, можно сказать, что $D(P^{(1)}(y))<D(P^{(2)}(y))$, если условие $\frac{S(n,m)}{L_m^{(1)}}<\frac{C_n^m-L_m^{(2)}}{L_m^{(2)}}\cdot P(\mathbf{X})$ выполняется для всех m, для которых проводятся статистические эксперименты, и для всех $\mathbf{X}\in W(n,m)$, таких, что $\varphi(\mathbf{X})=1$.

Рассмотрим метод «убыстрения статистических испытаний» [2]. Согласно упомянутому методу несмещенная состоятельная статистическая оценка вероятности безотказной работы ОМС может быть записана в следующем виде:

$$P^{(3)}(y)=\frac{\sum_{\mathbf{X}\in\Omega^{(3)}(n)}\varphi(\mathbf{X})\cdot\gamma^{-(n-w(\mathbf{X}))}}{L^{(3)}\cdot K},\qquad(7)$$

где γ – коэффициент, определяющий степень убыстрения, $\Omega^{(3)}(n)$ – множество двоичных векторов длиной n, сформированных специализированным генератором, для которого вероятность появления единицы на i-й позиции, равна $p_{\text{gen}}^{(3)}(x_i)=\frac{p(x_i)}{p(x_i)+\gamma\cdot q(x_i)}$, $L^{(3)}=\left|\Omega^{(3)}(n)\right|$ – количество проведенных статистических испытаний, $w(\mathbf{X})$ – вес двоичного вектора $\mathbf{X}$, K – константа для конкретной ОМС

$$K=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{p(x_i)+\gamma\cdot q(x_i)}.$$

Можно показать, что дисперсия статистической оценки (7) равна

$$D\left(P^{(3)}(y)\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{L^{(3)}\cdot K}\cdot\gamma^{-(n-m)}\cdot\sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)}\varphi(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{X})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{L^{(3)}}\left(\sum_{\mathbf{X}\in W(n,m)}\varphi(\mathbf{X})\cdot P(\mathbf{X})\right)^2\right).\qquad(8)$$

Сравнив соотношения (5) и (8), можем определить, что $D(P^{(1)}(y))<D(P^{(3)}(y))$, если условие $\frac{S(n,m)}{L_m^{(1)}}<\frac{\gamma^{-(n-m)}}{L^{(3)}\cdot K}$ выполняется для всех m, для которых проводятся статистические эксперименты.

Генератор двоичных векторов с заданным весом и вероятностью появления

Для реализации описанного метода необходим специализированный генератор, позволяющий для любого значения m получать двоичные векторы с весом m и вероятностью $P_{\text{gen}}^{(1)}(\mathbf{X})$. В данной статье предложен алгоритм генерации равновесных двоичных векторов с заданной вероятностью, имеющий порядок сложности $O(n)$, и использующий дополнительную память размером порядка $O(m\cdot n)$. В описании алгоритма генерируемый двоичный вектор обозначен через $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots \dots, v_n)$.

Алгоритм генерации вектора таков:

1. Устанавливаем начальные значения для индексов $i := n$, $j := m$ и для префиксного множителя $\text{prefix} := 1$.

2. Генерируем псевдослучайное вещественное число z в диапазоне $0 \le z \le S(n,m)$.

3. Если $z \ge \text{prefix} \cdot q(x_i) \cdot S(i-1, j)$, то

$z := z - \text{prefix} \cdot q(x_i) \cdot S(i-1, j)$, $v_i := 1$,

$\text{prefix} := \text{prefix} \cdot p(x_i)$, $i := i-1$, $j := j-1$,

иначе $v_i := 0$, $\text{prefix} := \text{prefix} \cdot q(x_i)$, $i := i-1$.

4. Если $i = 0$, то переход к п.5, иначе переход к п.3.

5. Выводим полученный вектор $\mathbf{X} := \mathbf{V}$.

6. Конец.

Докажем, что вероятность генерации двоичного вектора по предложенному алгоритму равна $P_{gen}^{(1)}(\mathbf{X})$. Рассмотрим первую итерацию алгоритма ($i = n$). Вероятность того, что $v_n = 0$, очевидно, равна $p(v_n = 0) = \dfrac{q(x_n) \cdot S(n-1, m)}{S(n,m)}$.

Согласно соотношению (3)

$$S(n,m) = p(x_n) \cdot S(n-1, m-1) + q(x_n) \cdot S(n-1, m).$$

Тогда вероятность того, что $v_n = 1$ равна

$$p(v_n = 1) = \frac{p(x_n) \cdot S(n-1, m-1)}{S(n,m)}.$$

Объединив выражения для $p(v_n = 0)$ и $p(v_n = 1)$, можем записать, что вероятность события $v_n = x_n$ ($x_n = 0$ или $x_n = 1$) равна

$$p(v_n = x_n) = \\ = \frac{(1-x_n) \cdot q(x_n) \cdot S(n-1, m-x_n) + x_n \cdot p(x_n) \cdot S(n-1, m-x_n)}{S(n,m)} = \\ = \frac{\big((1-x_n) \cdot q(x_n) + x_n \cdot p(x_n)\big) \cdot S(n-1, m-x_n)}{S(n,m)} = \\ = \frac{p(\tilde{x}_n) \cdot S(n-1, m-x_n)}{S(n,m)}.$$

Отметим, что для следующей итерации ($i = n-1$) значение $S(i, j)$ равно $S(n-1, m-x_n)$. Для k-й итерации ($i = n-k+1, 1 \le k \le n$) значение $S(i, j)$ можно записать как

$$S_k(i,j) = S(n-k, m - x_n - \dots - x_{n-k+1}).$$

Тогда вероятность того, что в результате работы алгоритма будет получен вектор $\mathbf{X}$, равна

$$P(\mathbf{V} = \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} p(v_i = x_i) = \prod_{k=1}^{n} \frac{p(\tilde{x}_k) \cdot S_k(i,j)}{S_{k-1}(i,j)}.$$

Величины $S_1(i, j), \dots, S_{n-1}(i, j)$ сокращаются, откуда

$$P(\mathbf{V} = \mathbf{X}) = \frac{S_n(i,j)}{S_0(i,j)} \cdot \prod_{k=1}^{n} p(\tilde{x}_k) = \frac{S_n(i,j)}{S_0(i,j)} \cdot P(\mathbf{X}).$$

Так как $S_0(i, j) = S(n, m)$ и $S_n(i, j) = S(n-n, m - v_n - \dots - v_1) = S(0, 0) = 1$, то

$$P(\mathbf{V} = \mathbf{X}) = \frac{P(\mathbf{X})}{S(n,m)} = P_{\text{gen}}^{(1)}(\mathbf{X}),$$

что и требовалось доказать.

Заключение. Полученные в работе соотношения показывают, что при достаточно большом количестве экспериментов погрешность выполненных расчетов стремится к нулю. Путем сравнения дисперсий результатов различных методов, применяемых для расчета показателей надежности неоднородных небазовых ОМС, определены условия, при которых предложенный метод расчета вероятности безотказной работы ОМС, основанный на статистических экспериментах с *GL*-моделями поведения систем в потоке отказов, имеет сравнительно меньшую погрешность.

1. *Kuo W., Zuo M.J.* Optimal reliability modeling: principles and applications. – New Jersey: John Wiley & Sons. Inc., 2003. – 559 p.
2. *Надежность* технических систем: Справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
3. *Погребинский С.Б., Стрельников В.П.* Проектирование и надежность многопроцессорных ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.
4. *Zuo M.J., Lin D., Wu Y.* Reliability Evaluation of Combined k-out-of-n :F, Consecutive-k-out-of-n: F, and Linear Connected-(r, s)-out-of-(m, n): F System Structures // IEEE Trans. Reliability. – 2000. – **49**. – P. 99–104.
5. *Boland P.J., Samaniego F.J.* An O($k^2 \cdot \log(n)$) Algorithm for Computing the Reliability of Consecutive-k-out-of-n: F Systems // IEEE Trans. Reliability. – 2004. – **53**. – P. 3–6.

Окончание на стр. 37

6. *Recursive* Formulas for the Reliability of Multi-State Consecutive-k-out-of-n:G Systems / H. Yamamoto, M.J. Zuo, T. Akiba et al. // IEEE Trans. Reliability. – 2006. – **55**. – P. 98–104.
7. *Reliability* of Two-Stage Weighted-k-out-of-n Systems With Components in Common / V. Stopjakova, P. Malosek, M. Matej et al. // Ibid. – 2005. – **54**. – P. 431–440.
8. *Об одном* подходе к расчету надежности отказоустойчивых многопроцессорных систем / А.М. Романкевич, В.В. Гроль, Л.Ф. Карачун и др. // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2002. – № 119. – С. 54–58.
9. *Оценка* погрешности статистического расчета надежности ОМС, которым соответствуют иерархические *GL*-модели / А.М. Романкевич, В.В. Гроль, В.А. Романкевич и др. // Радіоелектронні та комп'ютерні системи. – 2010. – № 7. – С. 142–146.
10. *Романкевич А.М.*, *Карачун Л.Ф.*, *Романкевич В.А.* Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем // Электронное моделирование. – 2001. – **23**, № 1. – С. 102–111.
11. *Вероятностные* методы в вычислительной технике: Учеб. пособие для вузов по спец. ЭВМ / Крайников А.В., Кудриков Б.А., Лебедев А.Н. и др.; Под. ред. А.Н. Лебедева и Е.А. Черняковского. – М.: Высш. шк., 1986. – 132 с.

Поступила 02.02.2011
Тел. для справок: (044) 454-9032 (Киев)
E-mail: *romankev@scs.ntu-kpi.kiev.ua*

●