УДК 519.6

О.М. Литвин, С.Ю. Матвєєва

Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємно перпендикулярних смугах

Предложен метод восстановления поверхности между полосами, основанный на использовании ермитовой сплайн-интерлинации. На полосах считается известной информация о поверхности, полученной при помощи космической или аэрофотосъемки или радиолокатора. Полосы считаются взаимно перпендикулярными и параллельными осям координат. Исследована погрешность приближения функции между полосами.

A method of restoration of a surface between the strips, based on the use of a Hermite spline-interlineation is suggested. On the strips the information on a surface received by means of a space either air photography, or a radar is considered the known one. The strips are considered mutually perpendicular, parallel to axes of co-ordinates. The error of approach of the function between strips is investigated.

Запропоновано метод відновлення поверхні між смугами, оснований на використанні ермітової сплайн-інтерлінації. На смугах вважається відомою інформація про поверхню, отримана за допомогою космічної або аерофотозйомки, або радіолокатора. Смуги вважаються взаємно перпендикулярними та паралельними осям координат. Досліджено похибку наближення функції між смугами.

Вступ. У дослідженнях поверхні планети використовується аерофотозйомка, а також фотографії поверхні, отримані зі штучних супутників Землі, які пролітають над Землею на різних орбітах, тобто дозволяють отримувати інформацію про поверхню лише на смугах, що знаходяться під курсом літака або під орбітою штучного супутника. Не зважаючи на значні досягнення в опису поверхні за даними аерофотозйомки та за допомогою радіолокаційних даних зі штучних супутників планет, не визначеною залишається побудова та дослідження математичних моделей поверхонь планет у вигляді, що безпосередньо вносить експериментальні дані у відповідні формули.

Формулювання задачі

Метод відновлення поверхні між паралельними та перетинними смугами для випадку неперервних поверхонь, за умови, що інформацію про поверхню (інтенсивність освітлення, віддаль від радіолокатора до точок смуги) задано на кожній із вказаних смуг, досліджено в роботах [1–4].

В даній статті в припущенні, що досліджувана поверхня має неперервні частинні похідні до порядку $2N, (N \geq 0)$ включно, запропоновано і досліджено загальний метод відновлення поверхні між взаємно перпендикулярними смугами. При цьому відновлена поверхня зберігає клас диференційованості до порядку N включно у всій області дослідження сформульовані і доведені теореми про апроксимативні властивості введених операторів наближення. Досліджена оцінка похибки, що виникає за умови заміни реальної поверхні поверхнею $z = u(x, y)$ де $u(x, y)$ – запропоноване наближення функції $f(x, y)$, що входить до опису реальної поверхні $z = f(x, y)$.

Основні твердження роботи

Виберемо на поверхні деяку систему декартових координат $Oxyz$**.** Вважатимемо, що задано систему горизонтальних смуг

$$D_{2,l} = \{\gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, \; l = \overline{1,n},$$

а також систему вертикальних смуг

$$D_{1,k} = \{\alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, \; k = \overline{1,m}.$$

Поверхня $\sum : z = f(x, y)$, яку потрібно відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x,y)\big|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} = f_{1,k}(x,y), \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1},$$

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x,y), \gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}.$$

Тут z – віддаль від деякої площини $z = 0$ до $\sum$ в точці (x, y).

При цьому вважаємо, що

$$\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, k = \overline{1,m},$$

$$\gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1}, l = \overline{1,n}$$

і

$$f_{1,k}(x,y) = 0, x < \alpha_k \text{ або } x > \beta_k,$$

$$f_{2,l}(x,y) = 0, y < \gamma_l \text{ або } y > \delta_l.$$

Ключові слова: інтерлінація функцій, знімки поверхні на смугах, похибка наближення, картографія.

Введемо до розгляду оператори

$$L_1 f(x,y) = \\ = \begin{cases} f_{1,k}(x,y), \alpha_k \le x \le \beta_k; \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1} \\ E_{1,k,k+1} f(x,y), \beta_k \le x \le \alpha_{k+1}; 1 \le k \le m-1 \end{cases}$$

і

$$L_2 f(x,y) = \\ = \begin{cases} f_{2,l}(x,y), \gamma_l \le y \le \delta_l; \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1} \\ E_{2,l,l+1} f(x,y), \delta_l \le y \le \gamma_{l+1}; \\ \qquad \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}; l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

де

$$E_{1,k,k+1} f(x,y) = \sum_{s=0}^{N} \Big[f^{(s,0)}(\beta_k, y) \ell_{1,k,s}(x) + \\ + f^{(s,0)}(\alpha_{k+1}, y) \ell_{2,k+1,s}(x) \Big],$$

$$\ell^{(p)}_{1,k,s}(\beta_k) = \delta_{p,s}; \ell^{(p)}_{2,k+1,s}(\alpha_{k+1}) = \delta_{p,s}$$

$$\ell^{(p)}_{1,k,s}(\alpha_{k+1}) = 0; \ell^{(p)}_{2,k+1,s}(\beta_k) = 0, 0 \le s, q \le N$$

$$E_{2,l,l+1} f(x,y) = \sum_{p=0}^{N} \Big[f^{(0,p)}(x, \delta_l) \ell_{1,l,p}(y) + \\ + f^{(0,p)}(x, \gamma_{l+1}) \ell_{2,l+1,p}(y) \Big],$$

$$\ell^{(r)}_{1,l,p}(\delta_l) = \delta_{r,p}; \ell^{(r)}_{1,l,p}(\gamma_{l+1}) = 0$$

$$\ell^{(r)}_{2,l+1,p}(\delta_l) = 0; \ell^{(r)}_{2,l+1,p}(\gamma_{l+1}) = \delta_{r,p}, 0 \le r, p \le n\,.$$

На їх основі побудуємо оператор

$$Of(x,y) = \\ \begin{cases} f_{1,k}(x,y), D_{1,k} = \left\{ \alpha_k \le x \le \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}] \right\}, \\ \qquad k = \overline{1,m} \\ f_{2,l}(x,y), D_{2,l} = \left\{ \gamma_l \le y \le \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}] \right\}, \\ \qquad l = \overline{1,n} \\ E_{1,2,k,l} f(x,y), (x,y) \in D_{1,k} \cap D_{2,l}, \\ \qquad k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$E_{1,2,k,l} f(x,y) = \\ = \Big[E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1} E_{2,l,l+1} \Big] f(x,y).$$

Теорема 1. Якщо $f(x,y) \in C^{2N,2N}(D), D = [\alpha_1, \beta_{m+1}] \times [\gamma_1, \delta_{n+1}]$, то $Of(x,y) \in C^{N,N}(D)$.

Доведення. Відзначимо властивості операторів $E_{1,k,k+1} f(x,y)$:

- $$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,k} f(x,y) \Big|_{x=\alpha_k} = \\ = f^{(p,0)}(\alpha_{k+1}, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}$$
- $$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,k} f(x,y) \Big|_{x=\beta_k} = \\ = f^{(p,0)}(\beta_k, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}$$

та $E_{2,l,l+1} f(x,y)$:

- $$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{y=\gamma_l} = \\ = f^{(0,r)}(x, \gamma_{l+1}), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}$$
- $$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{y=\delta_l} = \\ = f^{(0,r)}(x, \delta_l), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$$

Оператор $E_{1,k} E_{2,l} f(x,y)$ у кожному елементі $[\alpha_k, \beta_k] \times [\gamma_l, \delta_l]$ є оператором двовимірної чотириточкової ермітової інтерполяції з властивостями:

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\alpha_k, \gamma_l)} = \\ = f^{(p,r)}(\alpha_k, \gamma_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\alpha_k, \delta_l)} = \\ = f^{(p,r)}(\alpha_k, \delta_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\beta_k, \gamma_l)} = \\ = f^{(p,r)}(\beta_k, \gamma_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\beta_k, \delta_l)} = \\ = f^{(p,r)}(\beta_k, \delta_l), 0 \le r, p \le N$$

Тому оператор $E_{1,2,k,l} f(x,y)$ має наступні властивості:

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,2,k,l} f(x,y) \Big|_{x=\alpha_k} = \\ = f^{(p,0)}(\alpha_k, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}, 0 \le p \le N$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,2,k,l} f(x,y)\Big|_{x=\beta_k} =$$

$$= f^{(p,0)}(\beta_k, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}, 0 \le p \le N$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{1,2,k,l} f(x,y)\Big|_{y=\gamma_l} =$$

$$= f^{(0,r)}(x, \gamma_l), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}, 0 \le r \le N$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{1,2,k,l} f(x,y)\Big|_{y=\delta_l} =$$

$$= f^{(0,r)}(x, \delta_l), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}, 0 \le r \le N.$$

Отже, оператор $Of(x, y)$ має наступні властивості:

- він визначений в усіх точках області $D = [\alpha_1, \beta_{m+1}] \times [\gamma_1, \delta_{n+1}]$;
- зберігає неперервність частинних похідних по x і по y від функції $f(x,y)$ до порядку N при переході від горизонтальних або вертикальних смуг до кожного прямокутника $D_{1,k} \cap D_{2,l}$.

Тобто, $Of(x,y) \in C^{N,N}(D)$. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. У припущеннях теореми 1 для похибки наближення функції $f(x, y)$оператором $Of(x,y)$ справедливе наступне представлення:

$$[I - O] f(x,y) =$$

$$= \begin{cases} 0, (x,y) \in D_{1,k} \cup D_{2,l} \\ [f(x,y) - E_{1,2,k,l} f(x,y)], (x,y) \in D_{1,k} \cap D_{2,l} \end{cases},$$

де I – тотожний оператор.

Доведення. Доведення цієї теореми відбувається у два етапи. На першому етапі слід врахувати, що на смугах $D_{1,k}$ або $D_{2,l}$ оператор $Of(x, y)$ збігається з функцією $f(x, y)$. Тобто $Of(x, y)$ збігається також з функцією $f(x, y)$ і на перетині цих смуг. Тому в точках вказаних смуг, а також в точках їх перетину, виконуватиметься рівність

$$Of(x,y) = f(x,y), (x,y) \in D_{1,k} \cup D_{2,l}.$$

Звідси маємо, що

$$f(x,y) - Of(x,y) = 0, (x,y) \in D_{1,k} \cup D_{2,l}.$$

Тобто першу частину цієї теореми доведено.

Для доведення другої частини достатньо згадати, що в точках $(x, y) \in D_{1,k} \cap D_{2,l}$ виконується рівність

$$Of(x,y) = E_{1,2,k,l} f(x,y), k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n},$$

де $E_{1,2,k,l} f(x,y)$ задається у вигляді мішаної ермітової інтерполяції в кожному з прямокутників $[\beta_k \le x \le \alpha_{k+1}] \times [\delta_l \le y \le \gamma_{l+1}], k = \overline{1,m-1}, l = \overline{1,n-1}$.

Тому дійсно

$$f(x,y) - Of(x,y) = E_{1,2,k,l} f(x,y), (x,y) \in$$

$$\in [\beta_k \le x \le \alpha_{k+1}] \times [\delta_l \le y \le \gamma_{l+1}],$$

що і доводить друге твердження теореми 2.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Для оцінки похибки наближення диференційованих функцій $f(x, y)$ справедливе наступне співвідношення

$$\|f - Of\|_{C(D)} \le$$

$$\le \frac{\Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)}}{(2(N+1))!(2(N+1))!} \left\| f^{(2(N+1),2(N+1))} \right\|_{C(D)} \frac{1}{2^{4(N+1)}},$$

де

$$\Delta_1 = \max_{1 \le k \le m-1} \Delta_{1,k}, \Delta_{1,k} = \alpha_{k+1} - \beta_k,$$

$$\Delta_2 = \max_{1 \le l \le n-1} \Delta_{2,l}, \Delta_{2,l} = \gamma_{l+1} - \delta_l.$$

При цьому $\|f - Of\|_{C(D_{1i} \cup D_{2j})} = 0$.

Доведення. Як витікає з теореми 1, оператор $Of(x, y)$ в точках області $D_{1,k} \cap D_{2,l}$ є оператором ермітової інтерлінації функції $f(x, y)$ та її немішаних частинних похідних до порядку N на чотирьох лініях $x = \beta_k$, $x = \alpha_{k+1}$ та $y = \delta_l$, $y = \gamma_{l+1}$.

Як відомо [6, с. 158, формула (3.2.6)] для наближення диференційованих функцій за допомогою оператора $Of(x, y)$ існує наступне інтегральне представлення для залишку наближення

$$Rf(x,y) = \sum_{i=k}^{k+1} \sum_{j=l}^{l+1} \sum_{s=0}^{N} \sum_{p=0}^{N} \ell_{1,i,s}(x) \ell_{2,j,p}(y) \times$$

$$\times \int_{x_i}^{x} \int_{y_j}^{y} f^{(2(N+1),2(N+1))}(\xi, \eta) \times$$

$$\times \frac{(x_i - \xi)^{N-p}}{(N-p)!} \frac{(y_j - \eta)^{N-s}}{(N-s)!} d\xi d\eta.$$

При цьому для залишку можна написати наступну рівність:

$$Rf(x,y) = \frac{f^{(2(N+1),2(N+1))}(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{(2(N+1))!(2(N+1))!} (x - \beta_k)^{N+1} \times$$

$$\times (x-\alpha_{k+1})^{N+1}(y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1},$$

$$(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l},$$

$$\beta_k \le \bar{\xi} \le \alpha_{k+1}, \delta_l \le \bar{\eta} \le \gamma_{l+1}, k=\overline{1,m-1}, l=\overline{1,n-1}.$$

Це дозволяє отримати наступну оцінку

$$\|Rf\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})} \le \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\times$$

$$\times \max_{(\bar{\xi},\bar{\eta})\in D_{1,k}\cap D_{2,l}} \left| f^{(2(N+1),2(N+1))}(\bar{\xi},\bar{\eta})\right| \max_{(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l}} \times$$

$$\times \left|(x-\beta_k)^{N+1}(x-\alpha_{k+1})^{N+1}(y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\left\| f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})}\times$$

$$\times \left|(x-\beta_k)^{N+1}(x-\alpha_{k+1})^{N+1}\times\right.$$

$$\left.\times (y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1}\right\|_{\substack{x=\frac{\beta_k+\alpha_{k+1}}{2}\\ y=\frac{\delta_l+\gamma_{l+1}}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\times$$

$$\times \left\| f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})} \Delta_{1,k}^{2(N+1)}\times$$

$$\times \Delta_{2,l}^{2(N+1)} \frac{1}{2^{4(N+1)}} \le \frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\times$$

$$\times \left\| f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D)} \Delta_1^{2(N+1)}\Delta_2^{2(N+1)} \frac{1}{2^{4(N+1)}}.$$

Отже, теорему 3 доведено.

Приклад

Відновимо запропонованим методом поверхню, задану лише на чотирьох смугах (двох вертикальних і двох горизонтальних).

*V*11 *V*12 *F*11

a *b* *c*

*F*12

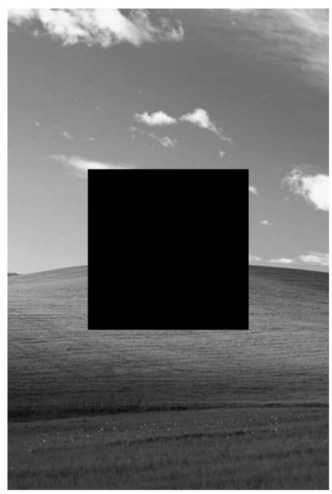
d

Рис. 1. Графічне зображення поверхні, заданої матрицями: *a* – *V*11; *b* – *V*12; *c* – *F*11; *d* – *F*12

Розмірність матриць $V11_{100\times 600}$, $V12_{100\times 600}$, $F11_{200\times 400}$, $F12_{200\times 400}$, не дозволяє в даній публікації навести ці матриці.

FN

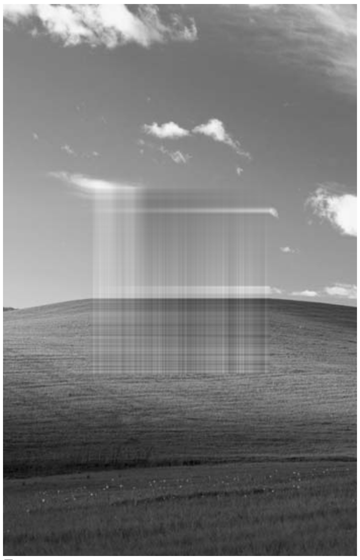
Рис. 2. Зображення поверхні заданою матрицею–оригіналом *FN*



C

Рис. 3. Зображення поверхні на чотирьох заданих смугах одночасно

Висновки. Отже, в даній статті запропоновано загальний метод відновлення поверхні тривимірного тіла на основі даних про поверхню заданих лише на системі горизонтальних та вертикальних смуг. Досліджено похибку, яка виникає при наближенні поверхні формулами інтерлінації в кожній прямокутній області, розміщеній між двома горизонтальними та двома вертикальними сусідніми смугами. Оцінки похиб-



F

Рис. 4. Зображення відтвореної поверхні за даними зображеннями на чотирьох смугах

ки отримано в припущенні, що для опису досліджуваної поверхні $z = f(x, y)$ використовується функція $f(x, y)$ з неперервними частинними похідними порядків $2(N+1)$ по x та $2(N+1)$ по y. Випадок, коли функція $f(x, y)$ є недиференційованою, має досліджуватись за допомогою модулів неперервності, а не частинних похідних. Приклад демонструє достатню для практики точність без використання похідних в ермітовій інтерлінації. Аналіз результатів обчислюваного експерименту підтверджує, що точність відновлення поверхні між смугами буде покращуватись, якщо віддаль між ними буде зменшуватись.

1. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: Зб. наук. пр. – К.: ДНВП «Картографія», 2005. – **2**. – С. 22–24.
2. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.*, *Межуєв В.І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // УСиМ. – 2010. – № 3. – С. 33–47.
3. *Матвєєва С.Ю.* Метод побудови цифрових карт за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій // Питання оптимізації обчислень, 2005. – 145 с.
4. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посібник. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.
5. *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. - 2007. – № 4. - С. 61–82.
6. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002 – 544 с.

Поступила 18.08.2010

Тел. для справок: (057) 771-0545; (066) 135-9633 (Харьков)
(050) 182-6071 (Бердянськ)
E-mail: *academ_mail@ukr.net*, *svetlana1980g@mail.ru*

●

О.Н. Литвин, С.Ю. Матвеева

Метод возобновления поверхности между полосами с помощью информации о поверхности на взаимно перпендикулярных полосах

Введение. При исследовании поверхности планеты используется аэрофотосъемка, а также фотографии поверхности, полученные с помощью искусственных спутников Земли, пролетающих над Землей на разных орбитах, т.е. позволяют получать информацию о поверхности лишь на полосах, которые находятся под курсом самолета или под орбитой искусственного спутника. Несмотря на значительные достижения в описании поверхности по данным аэрофотосъемки и с помощью радиолокационных данных с искусственных спутников планет, не решенным остается построение и исследование математических моделей поверхностей планет в виде, который непосредственно вносит экспериментальные данные в соответствующие формулы.

Формулировка задачи

Метод возобновления поверхности между параллельными и пересекающимися полосами для случая непрерывных поверхностей при условии, что информация о поверхности (интенсивность освещения, расстояние от радиолокатора к точкам полосы) задается на каждой из указанных полос, исследован в работах [1–4].

В данной статье, в предположении, что исследуемая поверхность имеет непрерывные производные частей порядка $2N,(N \ge 0)$ включительно, предложен и исследован общий метод возобновления поверхности между взаимно перпендикулярными полосами. При этом возобновленная поверхность хранит класс дифференцированности порядка N включительно во всей области исследования сформулированные и доказанные теоремы об аппроксимативных свойствах введенных операторов приближения. Исследована оценка погрешности, возникающая при замене реальной поверхности поверхностью $z = u(x, y)$, где $u(x, y)$ – предложенное приближение функции $f(x, y)$, входящей в описание реальной поверхности $z = f(x, y)$.

Основные утверждения работы

Выберем на поверхности некоторую систему декартовых координат $Oxyz$. Примем, что задана система горизонтальных полос

$$D_{2,l} = \{\gamma_l \le y \le \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l = \overline{1,n},$$

а также система вертикальных полос

$$D_{1,k} = \{\alpha_k \le x \le \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1,m}.$$

Поверхность $\sum : z = f(x, y)$, которую предстоит возобновить, считается известной лишь на указанных полосах, т.е.

$$f(x,y)\big|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x,y), \alpha_k \le x \le \beta_k, \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1},$$

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x,y), \gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$$

Здесь z – расстояние от некоторой плоскости $z = 0$ к Σ в точке (x, y).

При этом считаем, что

$$\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1}, k = \overline{1,m}, \ \gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1}, l = \overline{1,n},$$

и

$$f_{1,k}(x,y) = 0, x < \alpha_k \text{ або } x > \beta_k, \ \ f_{2,l}(x,y) = 0, y < \gamma_l \text{ або } y > \delta_l.$$

Введем к рассмотрению операторы

$$L_1 f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y), \alpha_k \le x \le \beta_k; \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1} \\ E_{1,k,k+1} f(x,y), \beta_k \le x \le \alpha_{k+1}; 1 \le k \le m-1 \end{cases}$$

и

$$L_2 f(x,y) =$$

$$= \begin{cases} f_{2,l}(x,y), \gamma_l \le y \le \delta_l; \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1} \\ E_{2,l,l+1} f(x,y), \delta_l \le y \le \gamma_{l+1}; \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}; l = \overline{1, n-1} \end{cases},$$

где

$$E_{1,k,k+1} f(x,y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \left[f^{(s,0)}(\beta_k, y) \ell_{1,k,s}(x) + f^{(s,0)}(\alpha_{k+1}, y) \ell_{2,k+1,s}(x) \right]$$

$$\ell_{1,k,s}^{(p)}(\beta_k) = \delta_{p,s}; \ell_{2,k+1,s}^{(p)}(\alpha_{k+1}) = \delta_{p,s}$$

$$\ell_{1,k,s}^{(p)}(\alpha_{k+1}) = 0; \ell_{2,k+1,s}^{(p)}(\beta_k) = 0, 0 \le s, q \le N$$

$$E_{2,l,l+1} f(x,y) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N} \left[f^{(0,p)}(x, \delta_l) \ell_{1,l,p}(y) + f^{(0,p)}(x, \gamma_{l+1}) \ell_{2,l+1,p}(y) \right]$$

$$\ell_{1,l,p}^{(r)}(\delta_l) = \delta_{r,p}; \ell_{1,l,p}^{(r)}(\gamma_{l+1}) = 0$$

$$\ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\delta_l) = 0; \ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\gamma_{l+1}) = \delta_{r,p}, 0 \le r, p \le n.$$

На их основе построим оператор

$$Of(x,y) =$$

$$= \begin{cases} f_{1,k}(x,y), D_{1,k} = \{\alpha_k \le x \le \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1,m} \\ f_{2,l}(x,y), D_{2,l} = \{\gamma_l \le y \le \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l = \overline{1,n} \\ E_{1,2,k,l} f(x,y), (x,y) \in D_{1,k} \cap D_{2,l}, k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$E_{1,2,k,l} f(x,y) = \left[E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1} E_{2,l,l+1} \right] f(x,y)$$

Теорема 1. Если $f(x,y) \in C^{2N,2N}(D)$, $D = [\alpha_1, \beta_{m+1}] \times [\gamma_1, \delta_{n+1}]$, то $Of(x,y) \in C^{N,N}(D)$.

Доказательство. Отметим свойства операторов $E_{1,k,k+1} f(x,y)$:

- $$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,k} f(x,y) \Big|_{x=\alpha_k} = f^{(p,0)}(\alpha_{k+1}, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}$$
- $$\frac{\partial^p}{\partial x^p} E_{1,k} f(x,y) \Big|_{x=\beta_k} = f^{(p,0)}(\beta_k, y), \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1}$$

и $E_{2,l,l+1} f(x,y)$:

- $$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{y=\gamma_l} = f^{(0,r)}(x, \gamma_{l+1}), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}$$
- $$\frac{\partial^r}{\partial y^r} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{y=\delta_l} = f^{(0,r)}(x, \delta_l), \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$$

Оператор $E_{1,k} E_{2,l} f(x,y)$ в каждом элементе $[\alpha_k, \beta_k] \times [\gamma_l, \delta_l]$ является оператором двумерной четырехточечной эрмитовой интерполяции со свойствами:

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\alpha_k, \gamma_l)} = f^{(p,r)}(\alpha_k, \gamma_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\alpha_k, \delta_l)} = f^{(p,r)}(\alpha_k, \delta_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\beta_k, \gamma_l)} = f^{(p,r)}(\beta_k, \gamma_l), 0 \le r, p \le N$$

$$\frac{\partial^{p+r}}{\partial x^p \partial y^r} E_{1,k} E_{2,l} f(x,y) \Big|_{(\beta_k, \delta_l)} = f^{(p,r)}(\beta_k, \delta_l), 0 \le r, p \le N$$

Поэтому оператор $E_{1,2,k,l} f(x,y)$ имеет следующие свойства:

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}E_{1,2,k,l}f(x,y)\Big|_{x=\alpha_k}=f^{(p,0)}(\alpha_k,y),\gamma_1\le y\le\delta_{n+1},0\le p\le N$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}E_{1,2,k,l}f(x,y)\Big|_{x=\beta_k}=f^{(p,0)}(\beta_k,y),\gamma_1\le y\le\delta_{n+1},0\le p\le N$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r}E_{1,2,k,l}f(x,y)\Big|_{y=\gamma_l}=f^{(0,r)}(x,\gamma_l),\alpha_1\le x\le\beta_{m+1},0\le r\le N$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r}E_{1,2,k,l}f(x,y)\Big|_{y=\delta_l}=f^{(0,r)}(x,\delta_l),\alpha_1\le x\le\beta_{m+1},0\le r\le N$$

Таким образом, оператор $Of(x,y)$ имеет следующие свойства:

- он определен во всех точках области $D=[\alpha_1,\beta_{m+1}]\times\times[\gamma_1,\delta_{n+1}]$;
- сохраняет непрерывность частных производных по x и по y от функции $f(x,y)$ порядка N при переходе от горизонтальных или вертикальных полос к каждому прямоугольнику $D_{1,k}\cap D_{2,l}$, т.е. $Of(x,y)\in C^{N,N}(D)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 для погрешности приближения функции $f(x,y)$ оператором $Of(x,y)$ справедливо следующее представление

$$[I-O]f(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\in D_{1,k}\cup D_{2,l}\\ [f(x,y)-E_{1,2,k,l}f(x,y)],(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l}\end{cases},$$

где I – тождественной оператор.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится в два этапа. На первом этапе следует учесть, что на полосах $D_{1,k}$ или $D_{2,l}$ оператор $Of(x,y)$ совпадает с функцией $f(x,y)$, т.е. $Of(x,y)$ совпадает также с функцией $f(x,y)$ и на пересечении этих полос. Поэтому в точках указанных полос, а также в точках их пересечения, будет выполняться равенство

$$Of(x,y)=f(x,y),(x,y)\in D_{1,k}\cup D_{2,l}.$$

Отсюда следует, что

$$f(x,y)-Of(x,y)=0,(x,y)\in D_{1,k}\cup D_{2,l}.$$

Значит, первая часть этой теоремы доказана.

Для доказательства второй части достаточно вспомнить, что в точках $(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l}$ выполняется равенство

$$Of(x,y)=E_{1,2,k,l}f(x,y),k=\overline{1,m},l=\overline{1,n},$$

где $E_{1,2,k,l}f(x,y)$ задается в виде мешаной эрмитовой интерполяции в каждом из прямоугольников $[\beta_k\le x\le\alpha_{k+1}]\times\times[\delta_l\le y\le\gamma_{l+1}],k=\overline{1,m-1},l=\overline{1,n-1}$.

Поэтому действительно

$$f(x,y)-Of(x,y)=E_{1,2,k,l}f(x,y),(x,y)\in$$
$$\in[\beta_k\le x\le\alpha_{k+1}]\times[\delta_l\le y\le\gamma_{l+1}],$$

что и доказывает второе утверждение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для оценки погрешности приближения дифференцированных функций $f(x,y)$ справедливо следующее соотношение:

$$\|f-Of\|_{C(D)}\le$$
$$\le\frac{\Delta_1^{2(N+1)}\Delta_2^{2(N+1)}}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\left\|f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D)}\frac{1}{2^{4(N+1)}},$$

где

$$\Delta_1=\max_{1\le k\le m-1}\Delta_{1,k},\Delta_{1,k}=\alpha_{k+1}-\beta_k,$$
$$\Delta_2=\max_{1\le l\le n-1}\Delta_{2,l},\Delta_{2,l}=\gamma_{l+1}-\delta_l.$$

При этом $\|f-Of\|_{C(D_{1i}\cup D_{2j})}=0$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, оператор $Of(x,y)$ в точках области $D_{1,k}\cap D_{2,l}$ является оператором эрмитовой интерлинации функции $f(x,y)$ и ее немешаных частных производных порядка N на четырех линиях $x=\beta_k$, $x=\alpha_{k+1}$ и $y=\delta_l$, $y=\gamma_{l+1}$.

Как известно [6, с. 158, формула (3.2.6)] для приближения дифференцированных функций с помощью оператора $Of(x,y)$ существует следующее интегральное представление для остатка приближения

$$Rf(x,y)=\sum_{i=k}^{k+1}\sum_{j=l}^{l+1}\sum_{s=0}^{N}\sum_{p=0}^{N}\ell_{1,i,s}(x)\ell_{2,j,p}(y)\times$$
$$\times\int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(2(N+1),2(N+1))}(\xi,\eta)\frac{(x_i-\xi)^{N-p}}{(N-p)!}\frac{(y_j-\eta)^{N-s}}{(N-s)!}d\xi d\eta.$$

При этом для остатка можно написать следующее равенство:

$$Rf(x,y)=\frac{f^{(2(N+1),2(N+1))}(\bar\xi,\bar\eta)}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\times$$
$$\times(x-\beta_k)^{N+1}(x-\alpha_{k+1})^{N+1}(y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1},$$
$$(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l},$$
$$\beta_k\le\bar\xi\le\alpha_{k+1},\delta_l\le\bar\eta\le\gamma_{l+1},k=\overline{1,m-1},l=\overline{1,n-1}.$$

Это позволяет получить следующую оценку:

$$\|Rf\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})}\le\frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\times$$
$$\times\max_{(\bar\xi,\bar\eta)\in D_{1,k}\cap D_{2,l}}\left|f^{(2(N+1),2(N+1))}(\bar\xi,\bar\eta)\right|\max_{(x,y)\in D_{1,k}\cap D_{2,l}}\times$$
$$\times\left|(x-\beta_k)^{N+1}(x-\alpha_{k+1})^{N+1}(y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1}\right|=$$
$$=\frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\left\|f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})}\times$$
$$\times\left|(x-\beta_k)^{N+1}(x-\alpha_{k+1})^{N+1}(y-\delta_l)^{N+1}(y-\gamma_{l+1})^{N+1}\right|_{\substack{x=\frac{\beta_k+\alpha_{k+1}}{2}\\ y=\frac{\delta_l+\gamma_{l+1}}{2}}}=$$
$$=\frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\left\|f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D_{1,k}\cap D_{2,l})}\Delta_{1,k}^{2(N+1)}\times$$
$$\times\Delta_{2,l}^{2(N+1)}\frac{1}{2^{4(N+1)}}\le\frac{1}{(2(N+1))!(2(N+1))!}\left\|f^{(2(N+1),2(N+1))}\right\|_{C(D)}\times$$

$$\times \Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)} \frac{1}{2^{4(N+1)}}.$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Пример

Возобновим предложенным методом поверхность, заданную лишь на четырех полосах (двух вертикальных и двух горизонтальных).

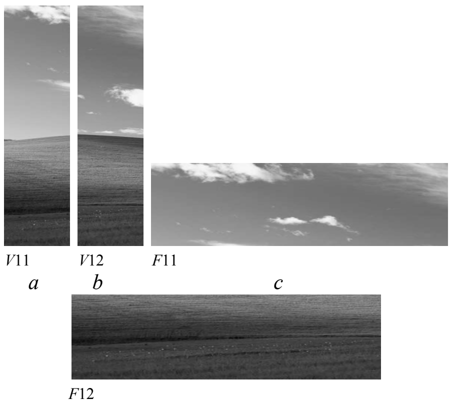


Рис. 1. Графическое изображение поверхности, заданной матрицами: *a* – *V*11; *b* – *V*12; *c* – *F*11; *d* – *F*12

Размерность матриц $V11_{100\times 600}$, $V12_{100\times 600}$, $F11_{200\times 400}$, $F12_{200\times 400}$ не позволяет в данной публикации привести эти матрицы.

Рис. 2. Изображение поверхности, заданной матрицей–оригиналом *FN*

Заключение. Итак, в данной статье предложен общий метод возобновления поверхности трехмерного тела на основе данных о поверхности, заданных лишь на системе горизонтальных и вертикальных полос. Исследована погрешность, возникающая при приближении поверхности формулами интерполяции в каждой прямоугольной области, размещенной между двумя горизонтальными и двумя вертикальными соседними полосами. Оценки погрешности получены в предположении, что для описания исследуемой поверхности $z = f(x, y)$ используется функция $f(x, y)$ с непрерывными частными производными порядков $2(N+1)$ по x и $2(N+1)$ по y. Случай, когда функция $f(x, y)$ недифференцированная, должен исследоваться с помощью модулей непрерывности, а не частных производных. Приведенный пример

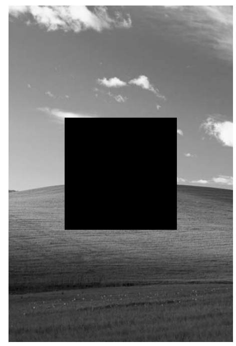


Рис. 3. Изображение поверхности на четырех заданных полосах одновременно.

Рис. 4. Изображение воссозданной поверхности по данным изображениям на четырех полосах.

демонстрирует достаточную для практики точность без использования производных в эрмитовой интерлинации. Анализ результатов вычисляемого эксперимента подтверждает, что точность возобновления поверхности между полосами будет улучшаться, если расстояние между ними будет уменьшаться.

●