УДК 681.324

В.А. Вышинский, А.Ю. Кононенко, А.В. Слепец, А.В. Вышинская

Алгоритмы интерполирования функций в матрично-алгебраической ЭВМ

Рассмотрены алгоритмы реализации интерполирования функций, адаптированные к информационному технологическому процессу матрично-алгебраической электронной вычислительной машины – машины нового поколения.

The algorithms of realizing the interpolation of functions are considered which are adapted to the information technological process of a matrix-algebraic electronic calculating machine (MA ECM) – a machine of new generation.

Розглянуто алгоритми реалізації інтерполювання функцій, адаптованих до інформаційного технологічного процесу матрично-алгебраїчної електронної обчислювальної машини – машини нового покоління.

Введение. В развитии вычислительных средств не получили практического воплощения новые архитектуры и структуры, использующие широкие интеграционные возможности микроэлектронной элементной базы. По-прежнему, как и тридцать лет тому назад, в понимании разработчиков сверхбыстродействующая вычислительная машина (ВМ) может существовать только в многопроцессорном виде. Такая тупиковая ситуация в развитии вычислительной техники (ВТ) объясняется неразрешимостью известной проблемы – несоответствия интеграционного процесса в микроэлектронике технологическому процессу вычислений, которые, как правило, современные разработчики реализуют в новой микроэлектронной аппаратуре. В работах [1, 2] предлагается разрешение указанной проблемы путем организации вычислительного процесса в средствах ВТ не в традиционных мелких машинных единицах информации – числах, а в сложных структурах данных современных машин, т.е. речь идет о матрично-алгебраических машинах. В качестве таких структур данных, в частности, используются элементы алгебры полиномов. Другими словами, операндом ВМ предлагается использовать частный случай [1] полиномиального представления функции – ее интерполяционный многочлен. Напомним, что, отождествляя в машине полином с операндом, тем самым мы наделяем его возможностями хранения в памяти по единому адресу, транспортировке и обработке по принципу обработки чисел в современных средствах ВТ, когда машинными операциями становятся операции над полиномами.

Постановка задачи

Идея использования алгебры полиномов для организации вычислительного процесса в машине, требует разработки эффективных алгоритмов представления информации отображающей произвольные функции в полиномиальный вид. В рассматриваемом случае речь идет о представлении функции интерполяционным многочленом. В вычислительной практике известны алгоритмы определения коэффициентов интерполяционного многочлена, основанные на оперировании с матрицей Вандермонда. Эти методы требуют знания значений рассматриваемой функции в узлах интервала ее интерполирования, не всегда известных пользователю.

Часто функция может быть задана в виде формулы в операциях алгебры Коши, т.е. алгебры элементами которой выступают функции. В этом случае нахождение интерполяционного многочлена требует вычисления его значений в точках интервала интерполирования. Эти действия приводят к избыточному усложнению и увеличению обработки информации. Таким образом, возникает задача, решение которой направлено на устранение этих сложностей в определении интерполяционных многочленов для функций заданных только в формульном виде. В то же время требуется адаптация известных алгоритмов интерполирования к информационному технологическому процессу, которым наделена матрично-алгебраическая электронная ВМ (МА ЭВМ) [1, 2].

Решение задачи

Алгоритмы интерполирования в операциях алгебры полиномов

Интерполирование – известная процедура в современной вычислительной практике и относится к точечной аппроксимации. Отметим, что с ее помощью определяется интерполяционный многочлен, значения которого совпадают со значениями функции в точках (узлах) интересующего нас интервала. Вычислительный процесс в этом случае сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Неизвестными в ней выступают коэффициенты искомого многочлена. Пусть этот многочлен имеет вид

$$P(t) = X_1 + X_2\, t + X_3\, t^2 + \ldots + X_m\, t^{m-1}. \qquad (1)$$

Тогда соответствующая ему система алгебраических уравнений, отображающая процедуру интерполирования, будет выглядеть так:

$$\begin{array}{l} X_1 t_1^0 + X_2 t_1^1 + X_3 t_1^2 + \ldots + X_m t_1^{m-1} = p_1 \\ X_1 t_2^0 + X_2 t_2^1 + X_3 t_2^2 + \ldots + X_m t_2^{m-1} = p_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1 t_i^0 + X_2 t_i^1 + X_3 t_i^2 + \ldots + X_m t_i^{m-1} = p_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_1 t_m^0 + X_2 t_m^1 + X_3 t_m + \ldots + X_m t_m^{m-1} = p_m \end{array}, \qquad (2)$$

где t_i – значение переменной в i-м узле интервала, на котором задана функция $f(x)$, $X_1 \ldots X_m$ – коэффициенты интерполяционного многочлена, p_i – значение функции $f(x)$ в i-м узле интервала.

В матрично-векторном виде эта система будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{m-1} \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 & \ldots & t_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ t_m^0 & t_m^1 & t_m^2 & \ldots & t_m^{m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_m \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

В литературе определитель матрицы этого выражения получил название Вандермонда. Матрицу будем обозначать так же.

Рассматриваемая в статье МА ЭВМ своими машинными операциями (машинными командами) приспособлена проводить вычисления в алгебрах, в том числе и в алгебре матриц. Поэтому, процедура интерполирования, т.е. решение матричного уравнения (3), удобно «ложится» на ее вычислительные возможности. Таким образом, определение вектора коэффициентов интерполяционного многочлена в МА ЭВМ сводится к простому матричному умножению вектора значений рассматриваемой функции в узлах интерполирования на обратную матрицу Вандермонда. Эта матрица – константа, сохраняется в постоянной памяти МА ЭВМ и подготавливается путем вычисления ее элементов в узлах заданного интервала.

Если порядок интерполяционного многочлена превышает порядок машинной матрицы, то для реализации вычислительного процесса в машинных операндах и командах МА ЭВМ весь интервал разбиваем на подинтервалы. Каждый из этих подинтервалов соответствует порядку машинной матрицы, например, равный числу n, а порядок многочлена – $m \cdot n$. Таким образом, получаем многочлен вида:

$$\begin{aligned} P(t) &= (X_1 + X_2 t + X_3 t^2 + \ldots + X_n t^{n-1}) + \\ &+ (X_{n+1} + X_{n+2} t + X_{n+3} t^2 + \ldots + X_{2n} t^{n-1}) t^n + \\ &+ (X_{2n+1} + X_{2n+2} t + X_{2n+3} t^2 + \ldots + \\ &+ X_{3n} t^{n-1}) t^{2n} + \ldots + (X_{(m-1)n+1} + X_{(m-1)n+2} t + \\ &+ X_{(m-1)n+3} t^2 + \ldots + X_{mn} t^{n-1}) t^{(m-1)n}. \end{aligned} \qquad (4)$$

В этом многочлене выражения в скобках (многочлены, соответствующие подинтервалам) обозначим буквами

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m. \qquad (5)$$

Тогда система линейных уравнений, описывающая процедуру интерполирования, для полинома (4) в обозначениях (5) будет иметь вид:

$$\begin{array}{l} A_1 t_1^0 + A_2 t_1^n + A_3 t_1^{2n} + \ldots + A_m t_1^{(m-1)n} = P_1 \\ A_1 t_2^0 + A_2 t_2^m + A_3 t_2^{2m} + \ldots + A_m t_2^{(m-1)n} = P_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1 t_i^0 + A_2 t_i^n + A_3 t_i^{2n} + \ldots + A_m t_i^{(m-1)n} = P_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \ldots \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1 t_m^0 + A_2 t_m^n + A_3 t_m^{2n} + \ldots + A_m t_m^{(m-1)n} = P_m \end{array}, \qquad (6)$$

где P_i – значение интерполяционного многочлена и нашей функции в i-м подинтервале, состоящем из n точек, т.е. в подинтервале, определяемом матрицей Вандермонда из матрично-векторного уравнения (3). В этом случае система уравнений (6) в матрично-векторном представлении будет выглядеть так:

$$\begin{bmatrix} t_1^0 & t_1^n & t_1^{2n} & . & . & . & t_1^{(m-)n1} \\ t_2^0 & t_2^n & t_2^{2n} & . & . & . & t_2^{(m-)n1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ t_m^0 & t_m^n & t_m^{2n} & . & . & . & t_m^{m(-1)n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, как и для выражения (3), вектор коэффициентов искомого интерполяционного многочлена нашей функции вычисляется в МА ЭВМ путем умножения правой части уравнения (7) на обратную матрицу Вандермонда этого уравнения. Весьма удобно выполнять указанное вычисление в том случае, если количество узлов интерполирования будет равно величине $m \cdot n$, а $m = n$. Дело в том, что тогда порядок векторов и матриц, участвующих в машинных операциях, равно порядку машинной матрицы МА ЭВМ и это существенно упростит саму процедуру интерполирования.

Как уже отмечалось, функция, интерполяционный многочлен которой нам необходимо определить, может быть задана в аналитическом виде, т.е. в виде формулы на заданном интервале.

Традиционный подход определения интерполяционного многочлена в рассматриваемом случае требует вычисления значений этой функции в узлах интервала с последующим применением к полученному вектору значений алгоритма интерполирования, описанного выше. Понятно, что эти значения функции требуются только для получения интерполяционного многочлена. Возникает вопрос, а нельзя ли обойтись без них. Современные микроэлектронные аппаратурные возможности позволяют это сделать. Дело в том, что обычно формульное задание функции, как правило, представляется суперпозицией известных математических функций, соединенных между собой операциями известной алгебры Коши, т.е. с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления функций. Количество всевозможных математических функций, как правило, составляет не более сотни. В практических расчетах оно обычно ограничивается элементарными математическими функциями, которых – не более двух десятков. Это обстоятельство позволяет в постоянной памяти машины хранить интерполяционные многочлены, рассматриваемых стандартных математических функций, в узлах интервалов, интересующих пользователя. Тогда для нахождения интерполяционного многочлена рассматриваемой функции необходимо в ее формулу подставить вместо математических функций соответствующие им интерполяционные многочлены и выполнить операции алгебры полиномов над ними, заданные в этой формуле. Таким образом, полученный многочлен будет соответствовать интерполяционному многочлену рассматриваемой функции.

Программа, реализующая этот информационный процесс в МА ЭВМ, аналогична обычной программе, предназначенной для решения задачи на существующих ЭВМ. Только в ней, вместо данных чисел, являются полиномы, а вместо обычных операций, соответствующих арифметическим действиям, выступают операции над полиномами.

Окончание на стр. 57

Если требуется знание функции в узлах интервала ее задания, то вектор коэффициентов интерполяционного многочлена следует умножить на матрицу Вандермонда, соответствующую данному интервалу.

Заключение. Предложенные алгоритмы реализации процедуры интерполирования хорошо адаптированы к МА ЭВМ, т.е. они максимально используют информационные «емкости» операндов и мощности машинных команд. Таким образом, в распоряжение машинной алгебры полиномов представлены алгоритмы, «опирающиеся» не на операции алгебры действительных чисел, а на операции алгебры полиномов, что приводит к существенному упрощению их реализации в микроэлектронном исполнении.

1. *Вишинський В.А*. Електронні обчислювальні машини на основі алгебр з регулярним матричним представленням: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – Київ, 2003. – 31 с.
2. Вышинский В.А. Об одном решении фундаментальной проблемы современного развития вычислительной техники // УСиМ. – 2003. – № 4. – С. 81–91

Поступила 22.02.2010

Тел. для справок: (044) 526-3598 (Киев)

●