УДК 519.1

Г.А. Донец, Д.А. Петренюк

Построение *T*-факторизаций полного графа и проблема Роса

Рассмотрена одна из задач теории графов – разложение полного графа на изоморфные деревья. Доказано, что если дерево состоит из двух симметричных частей, то задача сводится к известной проблеме Роса о нумерации вершин деревьев. Приведено решение этой проблемы для деревьев порядка девять.

One of the tasks of the graph theory – the decomposition of a complete graph into isomorphic trees is considered. It is proved that if a tree consists of two symmetric parts the task is reduced to the well known Rosa problem of the tree vertexes enumeration. The solution of this problem for 9-order trees is presented.

Розглянуто одну з задач теорії графів – розклад повного графа на ізоморфні дерева. Доведено, що якщо дерево складається з двох симетричних частин, то задача зводиться до відомої проблеми Роса про нумерацію вершин дерев. Наведено розв’язання цієї проблеми для дерев порядку дев’ять.

Введение. В последнее время комбинаторная математика привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей науки и практики, так как она рассматривает задачи на существование, эффективное построение, перечисление и оптимизацию объектов, зависящих от сравнительно большого числа дискретных переменных. Комбинаторные методы применяются как в самой математике, так и вне ее – в математической логике, теории игр, кристаллографии, биологии, экономике, лингвистике, социологии. Давно известны тесные контакты комбинаторной математики и теории графов, что привело к появлению понятия комбинаторной конфигурации. Широко известно применение различного рода блок-схем и других комбинаторных конфигураций при планировании экспериментов и коммуникационных схем, при построении эффективных кодов и др.

Примерно в 70-е годы прошлого столетия в комбинаторной математике состоялся переход от теоретико-множественной терминологии к современной, теоретико-графовой. При этом комбинаторные конфигурации стали рассматриваться как разложения полного графа на подграфы определенного типа, среди которых наибольшего внимания заслуживают деревья.

Постановка задачи

Разложением графа H на подграфы из данного семейства $G=\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ или (H,G)-*разложением* называется разбиение множества ребер графа H на подграфы (*компоненты разложения*), каждый из которых изоморфен одному из элементов множества G. Возникает *задача существования*: существуют ли (H,G)-разложения для данного графа H и множества G? В зависимости от типов H и G получим положительный ответ только в том случае, если будет решена задача построения, т.е. будет построено (H,G)-разложение. Подграф G_i называется фактором графа G, если множество вершин подграфа G_i совпадает со множеством вершин графа G. Факторизацией графа называется такое разложение графа, компонентами которого являются факторы данного графа. В качестве основного графа служит, как правило, полный n-вершинный граф $G = K_n$. Факторизацию полного графа, все компоненты которой изоморфны некоторому дереву T, называют *T-факторизацией*.

Полусимметричным деревом назовем дерево порядка $n = 2k$, содержащее центральное ребро и допускающее изоморфизм, переставляющий концы центрального ребра. Очевидно, что после удаления центрального ребра полусимметричное дерево распадается на две изоморфные связные компоненты – симметричные половины. Их можно рассматривать как корневые деревья, корни которых – концы центрального ребра соответствующего полусимметричного дерева. Как видим, существует взаимно соответствие между полусимметричным деревом и его симметричной половиной. Задача построения T-факторизации уже давно привлекла внимание исследователей. Была выдвинута гипотеза: *всякое полусимметричное дерево допускает T-факторизацию*. В данной статье предлагается новый подход к решению этой проблемы.

Одним из основных методов построения T-факторизации полусимметричных деревьев является *полуоборотный метод*, описанный в работе [1]. T-факторизации деревьев, полученные с помощью этого метода, также назовем полуоборотными. Идея этого метода состоит в использовании шаблона, представляющего собой окружность, поделенную $n = 2k$ точками на равные дуги (назовем эти дуги *элементарными*). Точки деления последовательно занумеруем 1, 2, …, n. Под длиною хорды будем подразумевать количество элементарных дуг в меньшей из дуг, на которые эта хорда разбивает окружность. Полусимметричное дерево T порядка $n = 2k$ называют правильно вписанным в эту окружность, если:

- точки деления являются вершинами дерева T;
- ребра дерева T изображаются хордами окружности;
- для каждой допустимой длины хорды ровно два нецентральных ребра, симметричных относительно центра окружности, имеют такую длину.

На рис. 1 приведен пример такого вписывания, для полусимметричного дерева T порядка $n = 2{\cdot}9 = 18$.

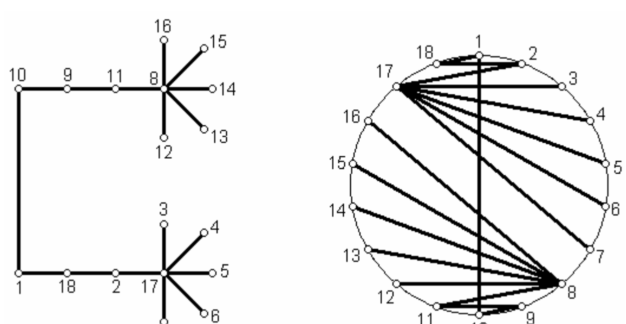

Рис. 1. Полуоборотный метод построения T-факторизации: *а* – полусимметричное дерево порядка 18; *б* – его правильное вписывание в окружность

Если T – полусимметричное дерево порядка $n=2k$, правильно вписанное в окружность, то можно выполнить T-факторизацию графа K_n на k компонент, изоморфных дереву T. Обозначим вписанное дерево T_1. Пусть T_i $(1 < i \le k)$ означает дерево, полученное поворотом против часовой стрелки дерева $T_{i–1}$ на одну элементарную дугу. Нумерация его вершин отличается от нумерации вершин в дереве $T_{i–1}$. Тогда множество деревьев $\{T_1, T_2, …, T_k\}$ с соответствующими нумерациями вершин и составляет искомую факторизацию. Другими словами, факторизация выполняется поворотом первой компоненты (дерева T_1) вокруг центра окружности, т.е. увеличением всех номеров вершин первой компоненты на единицу (mod n). Повороты осуществляются до тех пор, пока дерево T_1 не повернется на полкруга. Отсюда и название метода. Таким образом, задача построения T-факторизации сводится к правильному вписыванию дерева в шаблон. Принимая во внимание то, что полусимметричное дерево однозначно определяется своей половиной, последнюю задачу можно свести ко вписыванию половины дерева в полуокружность. Чтобы осуществить это, необходимо придерживаться основного правила: половина дерева с k вершинами должна содержать все ребра длиною от единицы до k–1, что обеспечивает отсутствие общих ребер в компонентах разложения, которые получаются поворотом полусимметричного дерева.

Если такое вписывание осуществлено, то вторая симметричная половина вписывается во вторую часть окружности. На рис. 2 выполнено вписывание половины дерева, изображенного на рис. 1 (пунктиром обозначено центральное ребро).

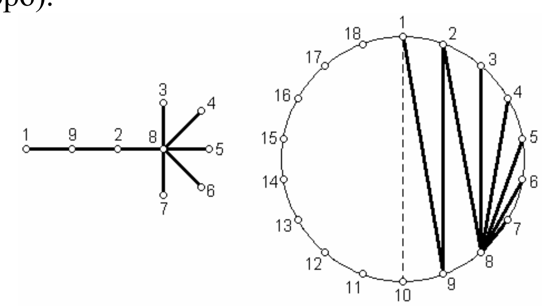

Рис. 2. Вписывание половины дерева в полуокружность

Отметим, что, в зависимости от выбора корневой вершины (вершины, к которой присоединяется центральное ребро), могут быть построены неизоморфные полусимметричные деревья порядка $2k$, количество которых намного превышает количество неизоморфных деревьев порядка k. Так, например, всех возможных неизоморфных деревьев порядка $k = 9$ насчитывается 47 [2], а из них можно образовать 286 неизоморфных полусимметричных деревьев порядка $k = 18$. Однако нет необходимости выполнять вписывание для всех 286 деревьев, так как если удалось вписать симметричную половину в полуокружность указанным образом, то всегда можно правильно вписать все полусимметричные деревья, выбрав соответствующие вершины симметричной половины корневыми (поворотом центрального ребра вокруг центрального круга).

Проблема Роса

Нетрудно убедиться в том, что для успешного решения задачи правильного вписывания k-вершинного дерева в полуокружность необходимо так занумеровать его вершины числами $x_i \in (1, 2, \ldots, k)$, чтобы абсолютные разности кодов смежных вершин составляли множество $(1, 2, \ldots, k-1)$. Эта задача впервые описана в работах [3, 4] и носит название проблемы А. Роса. Решение этой проблемы для некоторых простых классов деревьев приведено в [5]. Отметим некоторые определения и результаты.

Всякую нумерацию k-вершинного дерева, решающего проблему А. Роса, назовем *правильной* и обозначим $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in N_x$. (Роса назвал ее *грациозной*).

Утверждение 1. Всякой правильной нумерации дерева соответствует другая (двойственная) нумерация $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_k')$, которая получается после перекодирования вершин

$$x_i' = k + 1 - x_i \ (1 \le i \le k).$$

Утверждение 2. Произвольная k-вершинная звезда допускает правильную нумерацию, если центральной вершине присвоить *код* 1 (или k для двойственной нумерации).

Утверждение 3. Произвольная k-вершинная цепь допускает правильную нумерацию.

Доказательство можно провести по индукции. Для $k = 2$ это делается непосредственно. Представим, что получена правильная нумерация для цепи с $j < k$ вершинами, у которой одна из концевых вершин имеет *код* j. Множество абсолютных разностей смежных вершин (по определению) равно $(1, 2, \ldots, j–1)$. Перейдем к двойственной нумерации, тогда вершина с *кодом* j приобретет *код* 1. Присоединим к ней новую вершину и присвоим ей *код* $j+1$. Тогда множество абсолютных разностей приобретет вид $(1, 2, \ldots, j-1, j)$, что свидетельствует о правильной нумерации новой цепи. Продолжая ту же операцию, придем к правильной нумерации исходной k-вершинной цепи.

Правильную нумерацию можно получить и непосредственно, если учесть результаты всех предыдущих операций. Для этого первой (в порядке слева направо) вершине присвоим *код* 1, третьей вершине – *код* 2, и так далее нумеруем вершины с нечетными номерами, пока не получим *код* $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$. Затем в обратном порядке нумеруем оставшиеся вершины. В результате получаем одну из правильных нумераций цепи, при этом разности кодов соседних вершин располагаются в убывающем порядке (рис. 3).

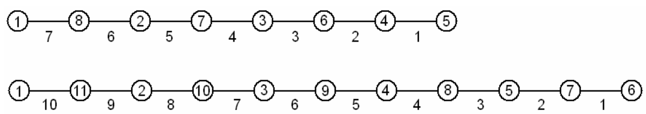

Рис. 3. Правильная нумерация цепей для $n = 8$ и $n = 11$

Рассмотрим еще одну разновидность дерева, которая называется *гусеницей*. Это дерево, которое после удаления в нем висячих вершин (вершины со степенью 1), превращается в цепь. Если эту цепь называть стволом дерева, а висячие вершины – листьями дерева, произрастающими из вершин ствола, то получим второе определение гусеницы.

Утверждение 4. Гусеница допускает правильную нумерацию вершин.

В [5] приведен алгоритм правильной нумерации гусеницы. Нумерация проводится в естественном порядке $1, 2, \ldots, k$. Начинаем с вершины основания ствола, затем переходим к листьям второй вершины (ее пропускаем), после чего нумеруем третью вершину ствола, затем – четвертую и так далее, чередуя вершины ствола и листья следующей вершины ствола, пока не дойдем до верхушки дерева. Затем в обратном порядке нумеруем оставшиеся элементы дерева (чередуя вершины ствола и листья). На рис. 4 проиллюстрирован пример работы алгоритма.

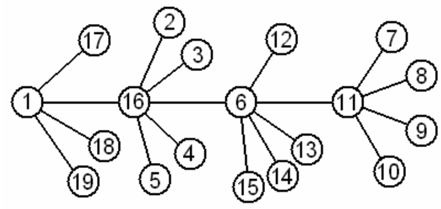

Рис. 4. Правильная нумерация гусеницы

T-факторизация для полусимметричных деревьев порядка *n* = 18

Гусеница обладает замечательным свойством, используемым при композиции нескольких деревьев.

Утверждение 5. Если к вершине с *кодом* 1 правильно занумерованного дерева присоединить гусеницу, то полученное дерево допускает правильную нумерацию.

Докажем это непосредственно. На рис. 5 приведены два последовательных шага алгоритма такой нумерации.

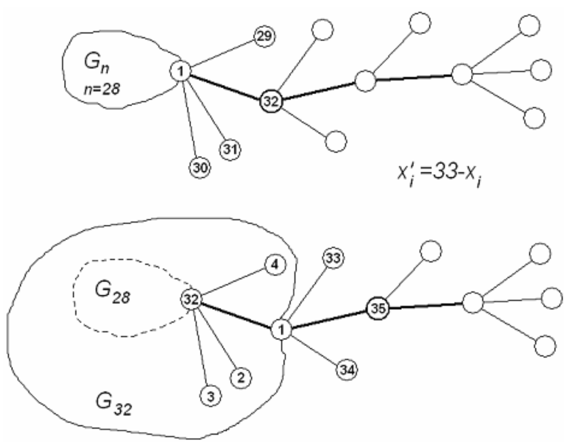

Рис. 5. Последовательное присоединение гусеницы к графу G_n

На каждом этапе необходимо продолжать нумерацию так, чтобы максимальный номер оставался на стволе (на рис. 5 он выделен).

Используем этот прием для доказательства следующего утверждения.

Теорема 2. Полусимметричное дерево с числом вершин 18 допускает *T*-факторизацию.

Необходимо доказать, что половина этого графа – дерево с числом вершин *k* – допускает правильную нумерацию. Как показано в [2], число всевозможных неизоморфных деревьев порядка девяти равно 47. Они перечислены на рис. 6.

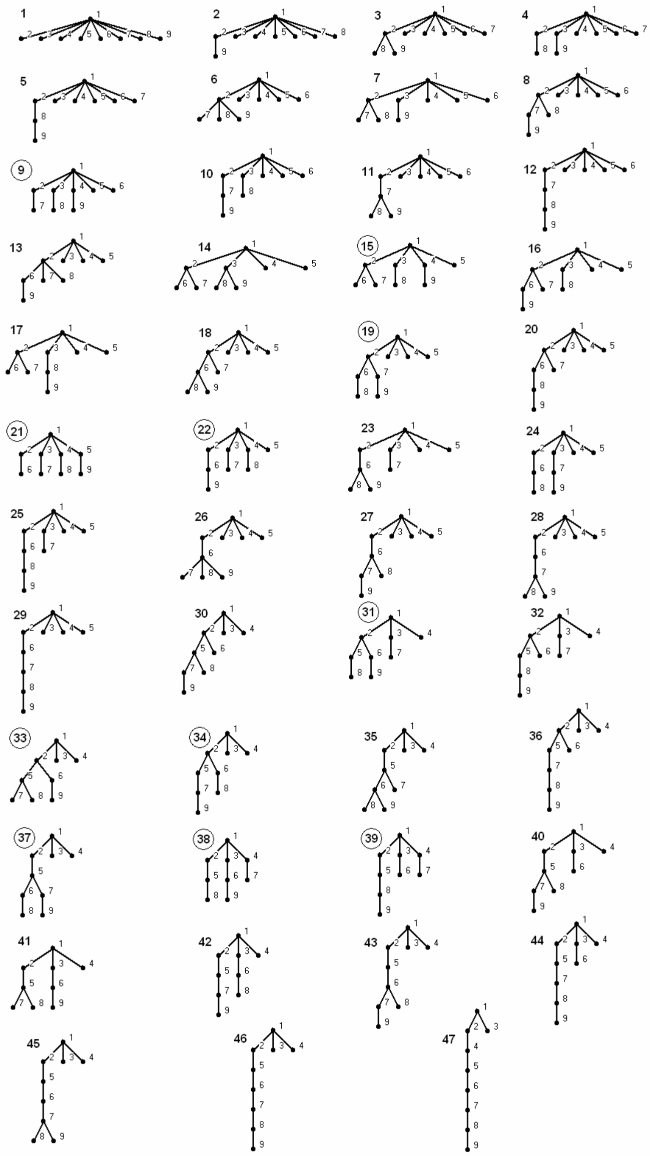

Рис. 6. Перечень деревьев порядка *n* = 9

Непосредственно можно убедиться, что все эти деревья, за исключением 9, 15, 19, 21, 22, 31, 33, 34, 37, 38, 39, представляют собой гусеницы. Из оставшихся деревьев все, кроме 21 и 33, представляют собой композицию цепи с числом вершин пять или шесть и гусеницы. Ниже приведен список этих деревьев, где в скобках указаны вершины соответствующих цепей в порядке их следования:

Окончание на стр. 30

9 (7, 2, 1, 3, 8); 15 (8, 3, 1, 4, 9); 19 (8, 6, 2, 7, 9); 22 (7, 3, 1, 4, 8); 31 (8, 5, 2, 6, 9); 34 (9, 7, 5, 2, 6, 8); 37 (8, 6, 5, 7, 9); 38 (9, 6, 3, 1, 4, 7); 39 (6, 3, 1, 4, 7).

На каждой из этих цепей необходимо построить правильную нумерацию $f_5(3)$ или $f_6(3)$, что выполняется достаточно легко. Для деревьев 21 и 33 правильная нумерация приведена на рис. 7.

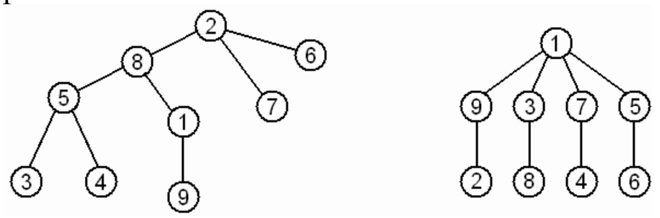

Рис. 7. Правильная нумерация графов 21 и 33

Этот метод можно применять и для деревьев более высокого порядка. На определенном уровне придется прибегнуть к помощи вычислительной техники. Как показала практика, непосредственное использование вычислительной техники для простого перебора вариантов уже для деревьев порядка 20–22 наталкивается на непреодолимые препятствия технического характера.

Заключение. В данной статье продемонстрировано решение проблемы Роса для деревьев с числом вершин $n = 9$. Очевидно, что этот же метод можно распространить и на деревья более высоких порядков. Для этого понадобится найти правильную нумерацию для новых, более сложных, чем звезда, цепь и гусеница, конфигураций. Об этом пойдет речь в последующих публикациях.

1. *Петренюк А.Я*. Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. матем. журнал. – 2001. – **53**, № 5. – С. 710–716.
2. *Харари Ф*. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – С. 267–268.
3. *Rosa A*. On certain valuations of the vertices of a graph. – New York: Gordon and Breach, 1967. – P. 349–355.
4. *Cahit A*. On graceful trees // Bull. of the ICA. – 1994. – 12 Sept. – P. 15–18.
5. *Донец Г.А*. Об одной задаче нумерации вершин деревьев // Матем. машины и системы. – 2010. – № 1. – С. 17–24.

Поступила 19.02.2010
Тел. для справок: (044) 526-2188 (Киев)