УДК 681.324

В.А. Вышинский, А.Ю. Кононенко

Алгоритм быстрого преобразования Фурье в алгебре рядов Фурье

Предложен способ реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье, вычислительный процесс в котором выполняется в алгебре рядов Фурье. Данный алгоритм может быть эффективно использован в ЭВМ, в которых как машинные команды выступают процедуры современных ЭВМ.

A method of realization of fast Fourier transformation is suggested, in which the computing process is carried out in the algebra of Fourier series. The given algorithm can be efficiently used in the computers in which the procedures of modern computers are used as machine commands.

Запропоновано спосіб реалізації алгоритму швидкого перетворення Фур'є, обчислювальний процес в якому виконується в алгебрі рядів Фур'є. Даний алгоритм може бути ефективно використано в ЕОМ, у яких як машинні команди виступають процедури сучасних ЕОМ.

Введение. С начала шестидесятых годов прошлого столетия стало возможным использование аппарата рядов Фурье для исследования функций. Особенно, если эти исследования позволяли обнаруживать и рассчитывать параметры движущихся объектов в военной обстановке. Практическому применению указанного аппарата математики препятствовала довольно громоздкая вычислительная нагрузка, которая при этом ложилась на средства вычислительной техники. Действительно, для того чтобы разложить функцию в дискретный ряд Фурье, требовалось реализовать умножение вектора значений функции в точках на матрицу-константу. Зачастую, на практике, порядок рассматриваемого вектора имел такую величину, что указанную матрично-векторную операцию практически трудно было реализовать, особенно если вычислительный процесс выполнялся в жестком реальном времени. Проблематичность реализации разложения функции в дискретный ряд Фурье на средствах вычислительной техники (ВТ) особенно просматривалась на первых этапах развития ЭВМ второго поколения (60-е годы прошлого столетия).

Решающим шагом использования аппарата рядов Фурье в вычислительной математике послужила работа Кули и Тьюки (1965 г.) [1], посвященная ускоренному вычислению дискретного преобразования Фурье. В последствии предложенный алгоритм получил название быстрого преобразования Фурье (БПФ). Преимущество нового алгоритма заключается в том, что для его реализации на средствах ВТ требуется существенно меньшее количество операций. Если для обычного дискретного преобразования Фурье требуется N^2 операций умножений и столько же сложений, то для алгоритма БПФ $\frac{N}{2}\log_2 N$ умножений и $N\log_2 N$ сложений. Такое сокращение количества операций для реализации дискретного ряда Фурье уже существенно и естественно, что вслед за работами Кули и Тьюки наступил момент активного применения аппарата разложения функции в ряд Фурье для практических задач.

Сегодня алгоритм БПФ находит широкое применение при обработке и анализе в реальном масштабе времени гидролокационных, радиолокационных, навигационных, оптических и речевых сигналов, сейсмических колебаний, а также для оценки энергетических спектров моделирования систем, исследований в радиоастрономии, кристаллографии и в других областях. Для решения этого круга задач разработан ряд узко специализированных средств как программного характера, так и аппаратурной реализации указанного быстрого алгоритма дискретного преобразования Фурье.

Как правило, пользователь ЭВМ свои вычислительные проблемы старается переложить на нее. Эти проблемы имеют вид крупных операций, получивших название макроопераций или процедур. Обычно для их реализации пользователь-программист предоставляет соответствующую программу, записанную во внешнем языке. По мере увеличения частоты применения этой процедуры в машине как сам алгоритм, так и его программный вариант *Software* совершенствуется и тогда записывается уже во внутреннем – машинном языке. Дальнейшее приспособление выполнения указанной процедуры в ЭВМ предусматривает аппаратурную реализацию (*Hardware*). Приведенный путь оптимизации реализации любой популярной процедуры на средствах ВТ является классическим и магистральным. Первые шаги реализации на ЭВМ алгоритма БПФ представляли собой программные средства в пользовательском языке, и только спустя некоторое время они были записаны во внутреннем языке. «Чисто» аппаратурная его реализация появилась некоторое время спустя в виде специализированного процессора, названного процессором БПФ.

Постановка проблемы

Таким образом, алгоритм БПФ появился в вычислительной математике, а затем и в вычислительной технике. По мере внедрения микроэлектронных элементов (микросхем) возникла возможность распараллеливания, позволяющая уходить от основной идеи алгоритма БПФ – использование промежуточных вычислений для определения искомых коэффициентов ряда Фурье. Возможности распараллеливания стали «безболезненно» допускать избыточность вычислительного процесса, т.е. в какой-то мере отказ от экономии вычислений в алгоритме БПФ, и тем самым ускорение нахождения коэффициентов. В алгоритмизации определения коэффициентов ряда Фурье стали появляться алгоритмы, в которых допускается распараллеленная обработка информации в известной вычислительной процедуре «бабочке». Если в классическом алгоритме БПФ разработчики ориентируются на основание два, то в новых видах параллелизма они используют произвольное основание, т.е. вычислительная бабочка реализует обработку не двух точек исходного столбца значений функции, а сразу четырех, восьми точек и т.д.

Рассматриваемое уменьшение точек, естественно, позволяет сократить время реализации алгоритма БПФ, однако существенно его и усложняет. По мере увеличения основания, эта сложность становится непомерной. Таким образом, возникает проблема поиска такой модели перехода от алгоритма БПФ, ориентированного на основание два, к более сложному основанию, и при этом его сложность не должна увеличиваться, а наоборот, упрощаться.

Решение проблемы

Итак, классический алгоритм БПФ предполагает организацию вычислительного процесса в алгебре комплексных чисел. Если исходные данные, характеризующие значение функции в точках действительного интервала ее задания, представляют собой действительные числа, то комплексная переменная появляется во время вычислений за счет аддитивных и мультипликативных операций с комплексными константами. Предлагаемый подход основан на организации вычислительного процесса алгоритма БПФ в алгебре рядов Фурье, реализацию которого можно осуществить на матрично-алгебраической электронной вычислительной машине (МА ЭВМ) [2]. Напомним, что в этой машине в качестве машинных операций (команд) выступают процедуры современных средств ЭВМ, и, в частности, такие процедуры, как умножение и сложение рядов Фурье с фиксированным количеством коэффициентов. В рассматриваемом случае порядок машинной матрицы совпадает с количеством коэффициентов рассматриваемых рядов.

Итак, пусть количество точек интервала N, на котором задана функция $\varphi(x)$, существенно больше порядка машинной матрицы m. Разобьем вектор значений функции на подинтервалы, каждый из которых содержит количество точек, соответствующих порядку машинной матрицы. Обычно количество точек N и порядок машинной матрицы m являются степенью двойки, что позволяет разбить большой интервал на целое число одинаковых по количеству точек – подинтервалов. Представим исходную функцию в подинтервалах рядами Фурье. Назовем их малыми рядами Фурье. Тогда вектор действительных значений функции $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$, …, $\varphi(x_{N-1})$ в малых рядах Фурье будет представлен вектором $F_0, F_1, F_2,\ldots, F_V$, где $V=\dfrac{N}{m}$, F_i – малый ряд Фурье относительно m точек.

Применим к этому новому вектору малых рядов Фурье – значений исходной функции преобразование Фурье, например, алгоритм БПФ. Естественно, что в этом алгоритме базовая операция (так называемая «бабочка») содержит операции алгебры рядов Фурье, в которых составляющие F_i и F_j (малые ряды Фурье) промежуточного вектора алгоритма БПФ вычисляются по формулам:

$$F_i=F+W_V\bullet F,$$
$$F_j=F-W_V\bullet F.$$

Множитель W_V представляет собой ряд Фурье – константу, а операции «+», «–» и «•» являются операциями алгебры над малыми рядами Фурье – F_i и F_j. Алгоритм БПФ, выполненный предлагаемым способом, преобразует исходный вектор малых рядов Фурье в вектор тоже малых рядов Фурье, но таких, что каждый из них представляет коэффициент большого ряда Фурье F_i^V. Этот большой ряд Фурье рассматривается по отношению к V точкам (подинтервалам). Одновременно он же совпадает с искомым рядом, коэффициентами которого выступают комплексные числа. Это утверждение справедливо, поскольку мы воспользовались известным приемом замены работы (вычислений) с функцией в точках интервала организацией вычислительного процесса над всей функцией, представленной коэффициентами малых рядов Фурье. В данном случае коэффициенты малых рядов (комплексные числа) и есть коэффициенты большого ряда Фурье, только в неупорядоченном виде. Полученный вектор (большой ряд Фурье) малых рядов может быть непосредственно использован для дальнейших вычислений на основе преобразований в алгебре малых рядов Фурье, т.е. той алгебры, элементами которой являются коэффициенты большого ряда.

На граф-схеме приведен пример 16-ти точечного БПФ, выполненного предложенным способом. Исходный вектор действительных значений рассматриваемой функции $\varphi(x)$ представлен вектором $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_3)$, …, $\varphi(x_{15})$ – первый столбец граф-схемы. В качестве подинтервала использована группа, состоящая из четырех точек.

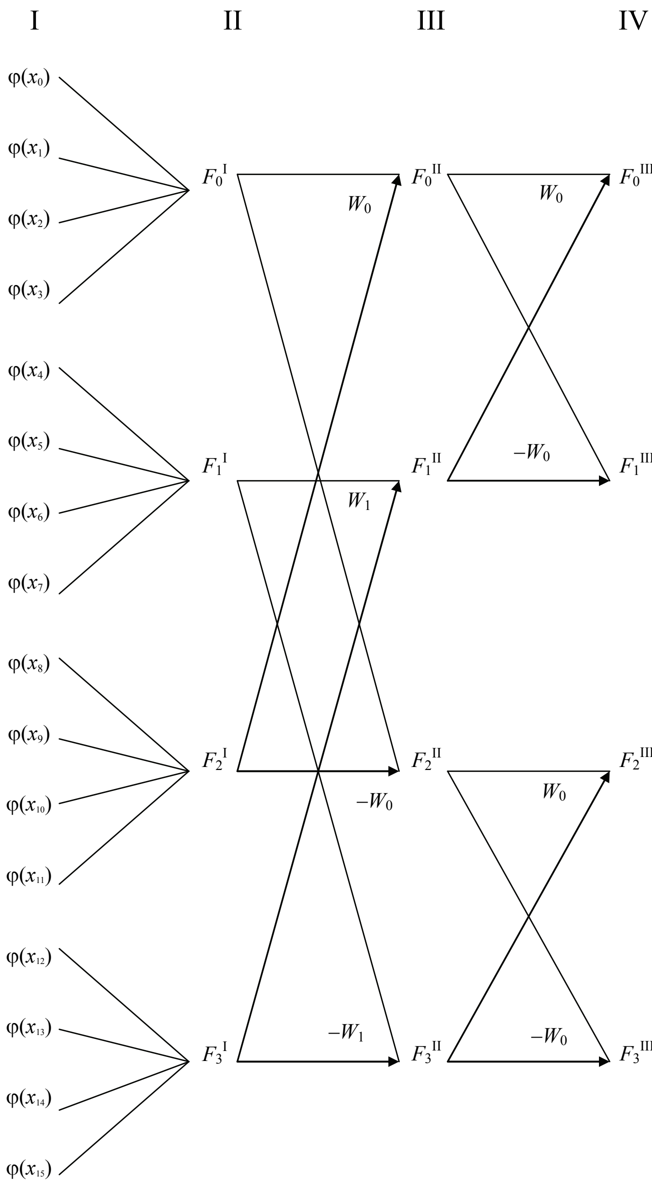

Рис. Граф-схема алгоритма БПФ

Преобразование этого исходного вектора в вектор малых рядов Фурье приведет к вектору (второй столбец граф-схемы) F_0, F_1, F_2, F_3. Правила перехода в граф-схеме от столбца к столбцу с помощью «бабочки» указаны линиями, в некоторых случаях обозначенные стрелками. Линии без стрелок указывают, что значение точки предыдущего столбца принимает участие в аддитивной операции «бабочка», а со стрелкой участие в мультипликативной операции, причем значение множителя константы поставлено над стрелкой. Например, переход от второго столбца к третьему, из точки F_0^{I} в точку F_0^{II} и из точки F_2^{I} в точку F_2^{II} осуществляется согласно выражениям $F_0^{\mathrm{II}} = F_0^{\mathrm{I}} + + F_2^{\mathrm{I}} \cdot W_0$, $F_2^{\mathrm{II}} = F_0^{\mathrm{I}} - F_2^{\mathrm{I}} \cdot W_0$. Из граф-схемы видно, что количество этапов БПФ в этом случае уменьшено (при $N = 16$, а $m = 4$) на два этапа.

Технологический вычислительный процесс реализации БПФ в МА ЭВМ рассмотренным способом осуществляется следующим образом. Вектор действительных значений рассматриваемой функции $\varphi(x)$ на заданном интервале преобразуется в вектор малых рядов Фурье с помощью умножения векторов значений исходной функции в подинтервалах на матрицу констант дискретного преобразования Фурье относительно малых рядов Фурье в центральном процессоре машины. Матрицы константы хранятся в ПЗУ машины, а программа вычислений в управляющем (числовом) канале. После этого к полученному вектору малых рядов Фурье применяется алгоритм БПФ вышеуказанным способом в алгебре малых рядов Фурье. Программа этого алгоритма находится в управляющем канале и реализуется аналогично выполняемому в обычных вычислительных машинах. В рассматриваемом случае роль оперативного запоминающего устройства выполняет матричный блок оперативной памяти (ОЗУ и ПЗУ), а роль операционного устройства – матричный процессор МА ЭВМ, в котором в качестве машинной команды реализована «бабочка», как уже отмечалось, ее операциями выступают операции алгебры малых рядов Фурье.

Заключение. Итак, предложенный способ разложения в ряд Фурье функции с применением БПФ требует для своей реализации $\frac{N}{m}\log_2\frac{N}{m}$ машинных команд (операций) МА ЭВМ. По своей технической сложности реализации в рассматриваемой машине эти операции соответствуют стандартным операциям умножения и сложения действительных чисел современных машин. Количество этапов БПФ в рассматриваемом случае сокращается в сравнении с известным алгоритмом БПФ: оно равно $\log_2\frac{N}{m}$ этапам вместо $\log_2 N$. Эти оценки показывают, что ускорение достигается больше чем в m раз в сравнении с известными алгоритмами, реализующими БПФ. Напомним, что величина m равна порядку машинной матрицы. Кроме того, благодаря реализации предлагаемого алгоритма в операциях алгебры малых рядов Фурье, с их известной простотой и регулярностью, его сложность существенно упрощается, что естественным образом сказывается и на упрощении процедуры управления вычислительным процессом в целом.

1. *Ахо А.*, *Хопкрофт Дж.*, *Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 535 с.
2. *Вышинский В.А.* Об одном решении фундаментальной проблемы современного развития вычислительной техники // УСиМ. – 2003. – № 4. – С. 81–91.

Поступила 02.06.2009

Тел. для справок: (044) 526-35-98 (Киев)
E-mail: *vyshinskiy@ukr.net*