

## Применение функций Ляпунова в исследовании задач классификации сигналов

Использованы свойства проекционных матриц и функций Ляпунова для синтеза систем распознавания образов. Для адаптации параметров системы распознавания при классификации сигналов применяются свойства функций Ляпунова.

The properties of projection matrices and Lyapunov functions for the synthesis of pattern recognition systems are used. To adapt the parameters of the recognition system in the classification of the signals the means of Lyapunov functions are employed.

Використано властивості проєкційних матриць і функцій Ляпунова для синтезу систем розпізнавання образів. Для адаптації параметрів системи розпізнавання при класифікації сигналів застосовано властивості функцій Ляпунова.

**Введение.** В статье предлагается новый подход к решению задач классификации сигналов, основанный на построении специальных функций Ляпунова по обучающей выборке и использовании естественной метрики, по которой осуществляются измерения расстояния до ближайшего соседа при распознавании сигнала. Функции Ляпунова представляются в виде квадратичных форм в пространстве признаков, в которых используется матрица, отражающая распределение точек обучающей выборки по упорядоченным факторным направлениям. Полученные ранее результаты по возмущению псевдообратных и проекционных матриц [2, 3] позволили сформулировать алгоритмы адаптации параметров функций Ляпунова к результатам классификации сигналов в процессе распознавания предъявляемых сигналов.

### Проекционные матрицы и соответствующие им функции Ляпунова в пространстве признаков

Рассмотрим в пространстве признаков для изучаемых сигналов или изображений или некоторого класса событий совокупность точек  $x(j) \in R^m, j = \overline{1, n}$ . Будем в дальнейшем использовать проекционные операции, определяемые следующими матрицами:

$$Z(\tilde{X}^T) = I_m - \tilde{X}\tilde{X}^+, \quad (1)$$

**Ключевые слова:** классификация, функции Ляпунова, проекционная матрица.

$$R(\tilde{X}^T) = \tilde{X}^{+T} - \tilde{X}^+, \quad (2)$$

$$\tilde{X} = (x(1) - \hat{x} : \dots : x(n) - \hat{x}), \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j), \tilde{X}^+ -$$

псевдообратная матрица для матрицы  $\tilde{X}, I_m -$  единичная матрица в  $R^m$ . Тогда квадратичные формы

$$(x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) \quad (3)$$

и соответствующие им эллипсоидальные цилиндры

$$(x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) = c^2 \quad (4)$$

обладают некоторыми интересными и важными для применения свойствами. На основании сингулярного представления матрицы

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \sum_{i=1}^r u_i v_i^T \lambda_i, r = \text{rank } \tilde{X}, \tilde{X}\tilde{X}^T u_i = \lambda_i^2 u_i, \tilde{X}^T \tilde{X} v_i = \\ &= \lambda_i^2 v_i, u_i^T u_j = \delta_{ij}, i, j = 1, r, \lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 \end{aligned}$$

имеют соотношения

$$\begin{aligned} (x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) &= \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-2} ((x - \hat{x})^T u_i)^2, \lambda_i^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n (\tilde{x}^T(j) u(j))^2, i = \overline{1, r}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j^2 = r, c_j^2 &= (x(j) - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T) \times \\ &\times (x(j) - \hat{x}), j = \overline{1, n}, \tilde{x} = x - \hat{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим  $r = m$ , т.е. это означает, что в совокупности векторов  $\tilde{x}(j), j = \overline{1, n}$  существует  $m$  линейно независимых между собой векторов.

Тогда для эллипсоидов

$$(x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) = c_j, j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

на которых размещаются точки  $x(j), j = \overline{1, n}$ , рассмотрим эллипсоид (рис. 1), находящийся в середине семейства эллипсоидов (7),

$$(x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) = c, c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j = \frac{m}{n}. \quad (8)$$

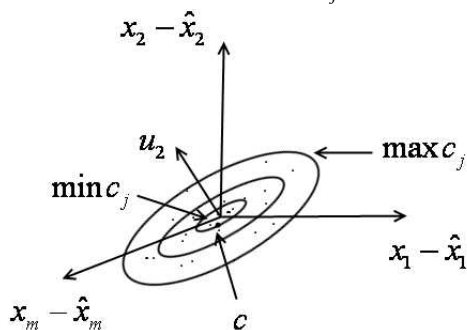


Рис. 1

Этот эллипсоид (8) можно описать эквивалентным уравнением

$$\frac{n}{m}(x - \hat{x})^T R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}) = 1 \quad (9)$$

или

$$V(x, \hat{x}, n, R) = 1,$$

или

$$V(x, \hat{x}, n, R) =$$

$$= \frac{n}{m}(x - \hat{x})R(\tilde{X}^T)(x - \hat{x}), R = R(\tilde{X}^T) \in R^{m \times m}.$$

Значение  $m$  как параметра не зависит от представителей совокупности, и поэтому изменения функций Ляпунова  $V(x, \hat{x}, n, R)$  исследуются по переменной  $x$  и параметрам  $\hat{x}, R, n$ .

Если далее рассмотрим два множества точек со своими функциями Ляпунова  $V_1(x, \hat{x}(1), n(1), R_1)$  и  $V_2(x, \hat{x}(2), n(2), R_2)$ , то получим геометрическую иллюстрацию (рис. 2) размещения точек относительно поверхностей

$$V_1(x, \hat{x}(1), n(1), R_1) = 1, V_2(x, \hat{x}(2), n(2), R_2) = 1.$$

Это означает, что расстояния от точек  $x(1), \dots, \dots, x(n)$ , относительно которых нужно принять решение какому из двух множеств они соответствуют, до рассматриваемых центров  $x(1), x(2)$  более целесообразно измерять не с помощью евклидовой нормы, а на основании построенных функций Ляпунова т.е. при

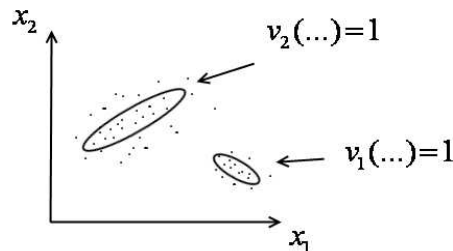


Рис. 2

Точка  $x$  относится к первому множеству, а при противоположном знаке неравенства – ко второму.

Таким образом, на этапе синтеза системы классификации сигналов для  $l$  классов обучающая последовательность точек каждого  $k$ -го класса определяет функцию  $V_k(k) = (x, \hat{x}(k), n(k), R_k)$  и процесс распознавания далее осуществляется согласно схеме, представленной на рис. 3.

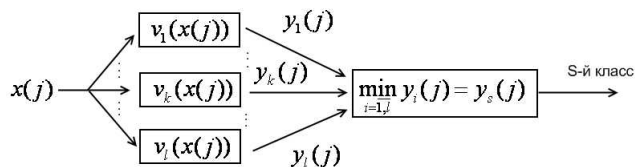


Рис. 3

### Адаптация параметров при классификации сигналов средствами функций Ляпунова

Для того чтобы получить алгоритмы коррекции параметров рассмотренных выше функций Ляпунова в процессе использования синтезированной системы (рис. 3) для распознавания конкретных сигналов, установим рекуррентные соотношения изменения параметров  $\hat{x}, n, R$  функции Ляпунова  $V(x, \hat{x}, n, R)$  при пополнении множества точек  $x(1), \dots, x(n)$  новой точкой  $x(n+1)$ . Как и ранее, предположим, что исследуемые точки в пространстве признаков таковы, что

$$\text{rank } \tilde{X} = m, \tilde{X}(n) = (x(1) - \hat{x}(n) : \dots : x(n) - \hat{x}(n)),$$

$$x(i) - \hat{x}(n) = \tilde{x}(i), i = \overline{1, n}, \hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i).$$

Рассмотрим изменения параметров  $n, \hat{x}(n)$ ,  $R(\tilde{X}(n)^T) = \tilde{X}(n)^+ \tilde{X}(n)^+$  за счет присоединения к векторам  $x(i), i = \overline{1, n}$  нового вектора  $x(n+1)$ . Тогда вместо  $n$  будет  $n+1$ . Центр множества точек  $x(n)$  трансформируется следующим образом:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x(j) = \hat{x}(n) + \left( \frac{n}{n+1} - 1 \right) \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} x(n+1) = \hat{x}(n) + \Delta \hat{x}(n),$$

$$\Delta \hat{x}(n) = \frac{1}{n+1} (x(n+1) - \hat{x}(n)).$$

Матрица  $\tilde{X}(n) \tilde{X}^T(n)$  при использовании нового центра получит следующее изменение:

$$(\tilde{X}(n) - \Delta \hat{x}(n) J_n^T) (\tilde{X}^T(n) - J_n \Delta \hat{x}^T(n)) = \tilde{X}(n) \tilde{X}^T(n) + \Delta \hat{x}(n) \Delta \hat{x}^T(n), \quad (11)$$

$$J_n = (1 \dots 1)^T \in R^n, \tilde{X}(n) J_n = \sum_{i=1}^n \tilde{x}(i) = 0,$$

а новая матрица  $\tilde{X}(n+1) \tilde{X}^T(n+1)$  в свою очередь образуется из матрицы (11) и нового центра трансформированного вектора  $\tilde{x}(n+1) = x(n+1) - \hat{x}(n+1)$

$$\tilde{X}(n+1) \tilde{X}^T(n+1) = \tilde{X}(n) \tilde{X}^T(n) + \Delta \hat{x}(n) \Delta \hat{x}^T(n) n + \tilde{x}(n+1) \tilde{x}^T(n+1).$$

Так как для матриц имеет место общее свойство  $R(B^T) = (BB^T)^+ = B^{T+} B^+$ , то при  $\text{rank } \tilde{X}(n) = m$  согласно формулам возмущения псевдообратных матриц [3] получим следующие рекуррентные соотношения:

$$R((\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}})^T) = (\tilde{X}(n) \tilde{X}^T(n) + \Delta \hat{x}(n) \Delta \hat{x}^T(n) n)^+ = R(\tilde{X}^T(n)) - \frac{R(\tilde{X}(n)) \Delta \hat{x}(n) \Delta \hat{x}^T(n) R(\tilde{X}^T(n))}{1 + \Delta \hat{x}(n) R(\tilde{X}^T(n)) \Delta \hat{x}(n) n}, \quad (12)$$

$$R(\tilde{X}^T(n+1)) = R((x(1) - \hat{x}(n+1) : \dots : x(n+1) - \hat{x}(n+1))^T) = R\left(\left(\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}}\right)^T\right) - R\left(\left(\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}}\right)^T\right) \tilde{x}(n+1) \tilde{x}^T(n+1) \frac{1}{1 + \tilde{x}^T(n+1) R\left(\left(\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}}\right)^T\right) \tilde{x}(n+1)} \times R\left(\left(\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}}\right)^T\right) \tilde{x}(n+1) \tilde{x}^T(n+1) \frac{1}{1 + \tilde{x}^T(n+1) R\left(\left(\tilde{X}(n) : \Delta \hat{x}(n) n^{\frac{1}{2}}\right)^T\right) \tilde{x}(n+1)}, \quad (13)$$

которые и определяют значение этого матричного параметра для функции Ляпунова.

Тогда системы классификации с адаптацией параметров функций Ляпунова согласно результатам или правильного, или ошибочного распознавания сигналов представляются в виде схемы, представленной на рис. 4.



Рис.4

Как видно из схемы, адаптация (настройка) параметров осуществляется тогда, когда сигнал  $x(j)$  распознан неправильно или, вернее скажем, нераспознан, и не смотря на то, что он принадлежит к  $k$ -му классу, система отреагировала на него как на сигнал их  $s$ -го класса. В этом случае осуществляется рекуррентный пересчет параметров функции Ляпунова  $V_k(x)$  следующим образом. Для функции

$$V_k(x) = (x - \hat{x}(k))^T R(\tilde{X}_k) (x - \hat{x}(k)) n(k) \quad (14)$$

новые значения для параметров  $x(k), R(\tilde{X}_k), n(k)$  определяются по формулам:

- матрица  $R(\tilde{X}_k)$  имеет новое значение, выраженное зависимостью через следующие параметры:

$$R_1 - \frac{R_1 \Delta x \Delta x^T R_1}{1 + \Delta x^T R_1 \Delta x}, \quad (15)$$

$$R_1 = R(\tilde{X}_k) - \frac{R(\tilde{X}_k^T) \tilde{x}(j) \tilde{x}(j) R(\tilde{X}_k)}{1 + \tilde{x}^T(j) R(\tilde{X}_k) \tilde{x}(j)}, \quad (16)$$

$$\tilde{x}(j) = x(j) - \hat{x}(k),$$

$$\text{где } \Delta x = \frac{1}{1 + n(k)} \tilde{x}(j);$$

- $n(k)$  приобретает новое значение  $1 + n(k)$ ; (17)

- $\hat{x}(k)$  приобретает новое значение, вычисляемое через старые значения параметров,

$$x(k) + \frac{1}{1 + n(k)} \tilde{x}(j) = x(k) + \frac{x(j) - x(k)}{1 + n(k)}. \quad (18)$$

Отметим, что в случае, когда на этапе синтеза системы или адаптации параметров используются обедненные обучающие выборки, т.е.  $\text{rank } \tilde{X}_k = r < m$ , необходимо вместо матриц  $R(\tilde{X}_k)$  для функций Ляпунова рассматривать регуляризованные матрицы  $R(\tilde{X}_k) + \mu^2 Z(\tilde{X}_k)$ . Тогда следующее уравнение

$$(x - \hat{x}(k))^T (R(\tilde{X}_k) + \mu^2 Z(\tilde{X}_k)) (x - \hat{x}(k)) n(k) = 1$$

описывает поверхность эллипсоида с толщиной  $\frac{1}{\mu^2}$  в направлении ортогональном к линейной оболочке, которую составляют вектор-столбцы матрицы  $\tilde{X}_k$ . Таким образом, если  $\mu^2$  принимает большие значения, то соответственно тело эллипсоида является весьма тонким.

Так как рекуррентные соотношения для матриц  $Z(\tilde{X}_k)$  вытекают из ранее полученных теоретических средств возмущения псевдообратных матриц [3], то и в этом случае адаптация параметров в системе классификации сигналов реализуема.

**Заключение.** Итак, описан теоретический подход по применению функций Ляпунова к исследованию классификации сигналов, который может быть использован для решения задач кластеризации и классификации массива текстовых печатных документов, ультразвуковых сигналов, графических образов и т.д. Кроме того, предложен метод адаптации параметров систем при классификации средствами функций Ляпунова.

1. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Псевдообращения в задачах кластеризации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 73–92.
2. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Там же. – 2002. – № 4. – С. 107–124.
3. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. // Там же. – 1997. – № 2. – С. 98–107.
4. Кириченко Н.Ф., Куц Р., Лепеха Н.П. Множества принадлежности в задачах классификации сигналов // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 5. – С. 71–85.

Поступила 18.03.2009

Тел. для справок: (044) 522-4047, 8-0631284124 (Киев)

© [Н.Ф. Кириченко], А.С. Корлюк, 2009