УДК 530.12, 519.95

ФОРМАЛИЗАЦИЯ: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

А.И. Провотар

Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко,
01033 Киев, ул. Тарасовская 20, кв. 46.
Тел.: 8050 444 1735.
E-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua

Рассматриваются вопросы формализации задач из различных предметных областей. Предлагается алгоритмический подход к формализации.

Questions of formalization of problems from various subject domains are considered. The algorithmic approach to formalization is proposed.

Введение

Общеизвестно, что при решении задач из различных областей человеческой деятельности используется (как правило) некоторый язык, позволяющий формализовать исходную постановку задачи (построить формальную модель) с целью возможного применения формальных методов (если таковые существуют) самого языка для решения поставленной задачи. Таким образом, процесс формализации в данном случае сводится к описанию проблемы (задачи) на некотором формальном языке. Хорошо если этот формальный язык – язык математики, а, следовательно, обладающий развитыми методами решения формализованных задач. В этом случае, обычно, говорят о полной формализации проблемы. Если формальный язык не являеся языком математики – говорят о неполной или частичной формализации проблемы. При этом не исключается существование другого формального язика, с помощью которого достигается полная или частичная формализация проблеми. Впрочем, возможны ситуации, когда не удается получить формальную модель проблемы. Если такие модели в принципе существуют, то проблема является полностью или частично формализованной. В противном случае говорят о не формализованных предметных областях, т. е. о таких областях, где существуют не формализованные проблемы.

В настоящей работе предлагается так называемый алгоритмический подход, позволяющий в некотором смысле упорядочить наше представление о формализации. Следствием этого подхода является возможность классифицировать проблемы на допускающие формализацию, слабо формализуемые и неформализуемые.

Актуальность затрагиваемых вопросов состоит в том, что используя предлагаемый подход в каждом конкретном случае, можно дать ответы на вопросы о возможности точного решения задачи на компьютере, приближенного решения задачи с использованием компьютера или невозможности получения ни точного, ни приближенного решения. Они тесным образом связаны с проблемами формальной проверки правильности доказательств в математике и корректности (следовательно, надежности) програмного обеспечения, основанных на формальных методах проверки непротиворечивости математических же алгоритмов, лежащих в основе функционирования программ.

Формализация логики высказываний

Предположим, что необходимо решить проблему разрешимости для логики высказываний, которая состоит в построении алгоритма, позволяющего для каждого высказывания выяснить, является ли оно тождественно истинным или нет.

Одной из формальных моделей этой логической теории является, как известно [1, 2], алгебра высказываний (АВ). Переменные АВ принимают значения *И* либо *Л*. Над высказываниями определяются операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и эквивалентности, позволяющие из данных высказываний получать новые. Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний, посредством применения логических операций, называется формулой АВ.

Если мы зададим значения переменных высказываний, то формула примет определенное значение. Таким образом, каждая формула определяет некоторую функцию, которая задается таблицей истинности. Формула называется тождественно истинной, если она при всех значениях входящих в нее переменных высказываний принимает значение И.

В рамках такой формальной модели легко решается проблема разрешимости логики высказываний. Действительно, если $F(X_1, \dots , X_n)$ – формула алгебры высказываний, соответствующая логическому высказыванию, то подставив вместо переменных $X_1, \dots, X_n$ их значения и вычислив затем значение формулы F для каждой комбинации значений переменных высказываний, можно определить является ли она тождественно истинной или нет.

Таким образом, можно утверждать, что проблема разрешимости логики высказываний допускает формализацию. При этом АВ является формальной моделью логики высказываний.

Еще одним примером формальной модели логики высказываний является *исчисление высказываний* (ИВ), которое определяется множеством символов, формул, выводимых формул (для этого сначала определяются исходные выводимые формулы и правила, позволяющие из имеющихся выводимых формул образовывать новые). Эти правила называются правилами вывода, а исходные выводимые формулы – аксиомами.

Связь между формулами логики высказываний и ИВ, а, следовательно, корректность формальной модели логики высказываний обеспечивается следующей теоремой корректности и полноты, утверждающей, что всякая выводимая формула ИВ является истинной формулой логики высказываний. Всякая истинная формула логики высказываний – выводимая формула ИВ.

Проблема разрешимости для этой формальной модели решается следующим образом. Строится аксиоматическая система, генерирующая множество высказываний, не являющихся тождественно истинными. После этого определяется выводимость произвольного логического высказывания в одной из аксиоматических систем. В зависимости от этого высказывание либо является тождественно истинным, либо таковым не является.

Обе предложенные формальные модели логики высказываний имеют ряд общих черт. Во-первых, в каждой из них можно решить проблему разрешимости. Во-вторых, решение этой проблемы фактически осуществляется построением алгоритмов. В-третьих, каждый из этих алгоритмов обеспечивает точное решение проблемы разрешимости с использованием компьютера.

Формализация вычислительных задач

Обратимся к известному примеру формализации и решения *задачи Кеплера*. Эта задача заключается в поиске наиболее компактного варианта упорядочивания твердых сферических тел равного диаметра в трехмерном объеме с целью получить максимальную среднюю плотность его заполнения. В 1998 году было объявлено о нахождении строгом математическом решении задачи Кеплера, основанном на сочетание аналитической геометрии и сложных компьютерных вычислений. В процессе экспертной оценки работы стало очевидно, что проделанные вычисления настолько специфичны и привязаны к частной проблеме, что сделанные выводы вряд ли можно будет применить для решения других, пусть даже и аналогичных, проблем.

Задача Кеплера, в частности, близкородственна задаче определения минимальной энергии покоя большой системы разнородных тел случайной формы и размера, вступающих в различные взаимодействия между собой. Примеров такого рода задач минимизации имеется великое множество, и просто невозможно представить ситуацию, при которой каждая из них будет решаться путем разработки отдельного численного метода и его просчета на компьютере. Если же иных способов решить все эти задачи, кроме как путем математического моделирования, не предвидится, то не лучше ли задаться вопросом: так ли уж важны все эти задачи?

В некоторых областях, в частности в области нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка, только компьютерные методы позволили доказать существование решений [3, 4]. При этом в расчетах использовались стандартные итерационные методы и методики расчета допустимых ошибок и доверительных интервалов, принципиальную правильность которых сегодня никто не оспаривает. На сегодняшний день численные методы играют важнейшую роль в работах, посвященных проблемам чистой и прикладной математики. В частности, речь идет о математических методах, используемых в экологических исследованиях и исследованиях окружающей среды [5].

При решении данных задач, как и в предыдущем случае, сначала строится формальная модель проблемы (как правило, в виде систем дифференциальных уравнений высокого порядка) с последующей реализацией алгоритма решения проблемы, сводящегося к численному решению систем дифференциальных уравнений. При этом сложность возникающих задач настолько большая, что проделать те же расчеты вручную оказывается нереальным.

Можно отметить следующие особенности формализации вычислительных задач. Во-первых, решение поставленных задач на соответствующих формальных моделях достигается. Во-вторых, решение проблем фактически осуществляется построением алгоритмов решения систем дифференциальных уравнений. В-третьих, каждый из алгоритмов обеспечивает приближенное, но приемлемое решение соответствующей проблемы с использованием компьютера.

Не формализуемые проблемы

Если прежде могли думать, что каждая отрасль математики зависит от интуиции, дающей ей первичные понятия и истины, и потому для каждой отрасли необходим свой специфический формализованный язык, то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника – ***теории множеств***. Таким образом, по идее Н. Бурбаки, достаточно изложить принципы какого-то одного формализованного языка, рассказать, как сформулировать на этом языке теорию множеств, а затем постепенно, по мере того как внимание будет направляться на различные отрасли математики, показывать, как они включаются в теорию множеств [6]. На самом деле возможности формального языка могут оказаться ограниченными. Это может означать существование проблем в некоторых областях человеческой деятельности, не поддающихся формализации в этом языке. Тогда придется если и не полностью изменить этот язык, то, по крайней мере, расширить правила синтаксиса. При этом возможности формализации нового языка могут, в свою очередь, оказаться ограниченными. Понятно, что данный процесс может продолжаться. Это согласуется с идеей правила дополнительного шага, предложенной в [7], суть которой сводится к пониманию произвольных процессов (в том числе и творческих) в развитии, сочетающем взаимодополняющее развитие теоретических и практических исследований. Ведь известно, что получить качественно новые знания нельзя в рамках так называемой замкнутой системы (в нашем случае это может быть произвольная аксиоматическая система).

Если бы, например, математика была такой простой, то, задав формализованный язык, мы могли бы получать решения произвольных проблем, используя соответствующие формальные модели. Однако вопрос решается отнюдь не столь легко, и не требуется большого опыта, чтобы убедиться в абсолютной неосуществимости подобного проекта: даже решение простейших задач из начального раздела теории множеств потребовало бы сотен знаков для своей полной формализации. Поэтому, можно согласиться с утверждением о том, что математика не может быть записана вся полностью в некотором формализованном языке, и потому, на наш взгляд, справедлив, скорее всего, принцип неполноты знаний Геделя, который является не только математическим, а естественно научным. Аналогичный принцип можно сформулировать для любой другой области человеческого знания с единственным условием – система не должна быть изолированной, а находиться во взаимосвязи с другими, а, следовательно, в развитии.

Одной из наиболее разработанных программ по основаниям математики является предложенная Д. Гильбертом программа финитарного обоснования математики. Суть этой программы состоит в попытке построения такой формализации математики, что средствами этой системы можно доказать свою собственную непротиворечивость. Другим требованием к такой формализации является условие, чтобы все простейшие, проверяемые непосредственно утверждения о натуральных числах были истинными в этой формализации. Работа над этой программой, как самого Гильберта, так и его учеников и последователей оказалась весьма плодотворной для математической логики, в частности, в разработке современного ***аксиоматического метода***. Хотя программа «финитизма» в своей исходной постановке оказалась невыполнимой, как показал в своих знаменитых работах К. Гёдель, однако возможные модификации этой программы обсуждаются и по настоящее время [7]. Другими словами, Гедель продемонстрировал, что в рамках любой достаточно богатой системы аксиом, найдутся утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Он же установил недоказуемость непротиворечивости арифметики. Переформулировав эти результаты с использованием термина формализации, получим следующее: любая достаточно богатая область человеческих знаний является не формализуемой. Проблема непротиворечивости арифметики не формализуема. Поэтому, в этом случае можно говорить лишь о формализации некоторых фрагментов знаний.

Следует отметить, что при всём огромном объеме литературы, подчеркивающей важность работы Гёделя для понимания оснований и философии математики, на самих математиков теоремы Гёделя долгие десятилетия практически никакого впечатления не производили. Их прямая связь с основным руслом математической мысли вскрылась лишь, когда было обнаружено, что проблема тождества слов и проблема изоморфизма групп с конечным представлением неразрешимы алгоритмическими методами и, как следствие, алгоритмически неразрешима задача о гомеоморфизме четырехмерных многообразий. Чем дальше, тем больше возникало такого рода проблем, однако, большинство математиков, с завидным упорством продолжало вспахивать свою ниву так, будто никакого Гёделя на свете не существовало [8].

Еще одна область не формализуемых проблем появляется в связи с попытками формализации некоторых разделов чистой математики. Речь, в первую очередь, идет о математическом анализе, основными объектами которого есть вещественные числа и вещественнозначные функции. Именно они, а также всевозможные их преобразования (производные, интегралы) используются для построения математических моделей различных прикладных задач, получивших развитие, например, в [5, 9]. При этом в расчетах использовались стандартные итерационные методы и методики расчета допустимых ошибок, и доверительных интервалов, принципиальную правильность которых сегодня никто не оспаривает. Но, естественно, при некоторых условиях. А именно, если задачи носят вычислительный характер и получаемые в результате вычислений приближенные данные достаточны для получения решений поставленных задач. Совсем другая ситуация возникает, когда на компьютере решаются задачи доказательного типа. К примеру, задача нахождения всех рациональных точек произвольной кривой. Соответствующая область исследований носит название алгебраической геометрии. Кстати, задачи такого типа тесно связаны с гипотезой Таниямы для полустабильных эллиптических кривых, другими словами с хорошо известной знаменитой теоремой Ферма.

В задачах доказательного типа, как правило, требуется точное решение поставленной проблемы. Это означает, что проблема должна быть формализована. Но даже в случае формализации самых простых математических объектов – чисел, возникают непреодолимые трудности. Совершенно понятно, как формализовать натуральное число. Например, использовать символику 0|, 0||, 0|||, … для обозначения натуральных чисел 1, 2, 3, … соответственно. Введением символов – и / можно формализовать понятие целого и рационального числа. Кроме того, множества этих чисел разрешимы [10]. Сложнее обстоит дело с формализацией действительных чисел *D*. Даже если использовать, например, формальную модель вида ƸαƷ◊ƸβƷ, где α и β соответственно специальные последовательности рациональных и натуральных чисел, то все дальнейшие усилия будут напрасны, так как множество *D* не является разрешимым.

Можно привести целый ряд неразрешимых проблем для конструктивных действительных чисел и конструктивных функций. В целом, это говорит о том, что формализация даже математического анализа на современном этапе развития науки не завершена. Скорее всего, с учетом появления новых языков и подходов, это дело будущего.

Как и в предыдущих частях отметим особенности не формализуемых проблем. Во-первых, решение поставленных задач на имеющихся формальных моделях получить не удается. Во-вторых, попытка решение проблем сводится фактически к построению алгоритмов и формальных моделей входных и выходных данных.

Заключение

Из вышеизложенного следует, что в качестве языка формализации проблем можно использовать произвольный язык (например, язык математики). Такой язык должен иметь развитые средства для описания дескриптивных (входные и выходные данные) и императивных данных (алгоритм решения проблемы). Такая характеристика языка очень напоминает описание языка программирования (разница только в том, что современные языки программирования не содержат необходимых средств описания дескриптивных данных). Поэтому, формализация проблемы означает использование точных формальных моделей для дескриптивной и императивной частей проблемы. Другими словами, это программа на некотором языке с формализованным синтаксисом и, желательно, семантикой. В этой связи напомним, что логика высказываний является полностью формализованной. Для логики предикатов [1, 2] с помощью современных подходов формализуется только множество тождественно истинных предложений. Для арифметики множество истинных предложений, так же как и его дополнение – не формализуются.

В связи со значительной сложностью формализации даже достаточно простых объектов часто используются упрощенные (или неточные) формальные модели тех или иных объектов. В ряде случаев это позволяет получать вполне удовлетворительные результаты (если учесть, что других возможностей языки (языки программирования) не предоставляют). Но задачи огромной вычислительной сложности (оптимизационные задачи, задачи экологии и др.) с учетом результатов теории динамического хаоса [11] могут привести к непредсказуемым последствиям. Поэтому, если иных способов решить проблему, кроме как путем математического моделирования, не предвидится, то не лучше ли задаться вопросом: так ли уж важны все эти задачи? Вместе с тем, такие задачи можно отнести к слабо формализованным или допускающим частичную формализацию.

В рамках предложенного подхода, вопрос о существовании в принципе неформализованных проблем пока остается открытым. Он зависит от представлений о понятии формализации, теснейшим образом связанного с представлением о понятии вычислимости.

1. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976. –320 с.
2. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. – М.: Наука, 1979. – 400 с.
3. *Plumю M.*. Computer-assisted enclosure methods for elliptic differential equations. – **324** (2001). Lin. Alg. Appl. – P. 147–187.
4. *Plum M.* and *Wieners C.* New solutions of the Gelfand problem. – **269** (2002). J. Math. Anal. Appl. – P. 588–606.
5. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. Думка, 1991. – 432 с.
6. *Ершов Ю. Л.* Доказательность в математике. http://www.ntv.ru/gordon/archive/12510/.
7. *Василик П.В., Провотар А.И.* К проблеме неполноты теоретических построений (на примерах формализации некоторых задач естествознания) // КИСА. – 2006. – № 4. – С. 145 – 150.
8. *Девис Б.* Кризисы в математике. http://elementy.ru/news/164970.
9. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 452 с.
10. *Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – Киев: Наук. думка, 2005. – 264 с.