

## **ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОПАСНОГО СБЛИЖЕНИЯ САМОЛЕТОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ**

**Abstract:** The paper is devoted to the problem of evaluation of the probability of aircraft dangerous approach to prevent mid-air collision in condition of cooperative air traffic management. The application of generalized stochastic conflict probability evaluation method earlier developed is shown taking into account aircraft flight controllability. The conflict probability equation is derived as multi-dimensional parabolic partial differential equation by using differential (infinitesimal) operator of multi-dimensional stochastic process of relative aircraft movement. All coefficients of a differential operator for a practical solution of a parabolic partial differential equation are derived and for some conditions the numerical solution of conflict probability equation is obtained and illustrated graphically.

**Key words:** air traffic control, safe separation standard, conflict probability, stochastic method, diffusive deviation process.

**Анотація:** Стаття присвячена проблемі оцінки імовірності небезпечного зближення літаків для запобігання їх зіткнення при кооперативному керуванні повітряним рухом. Показано застосування розробленого раніше узагальненого стохастичного методу оцінки імовірності конфлікту з урахуванням фактора керованості польотом літаків. Рівняння імовірності конфлікту у вигляді багатовимірного параболічного диференціального рівняння в частинних похідних було отримано при використанні диференціального (інфінітезимального) оператора багатовимірного стохастичного процесу відносного руху літаків. Визначені всі коефіцієнти диференціального оператора і для конкретних умов отримано чисельне розв'язання рівняння імовірності конфлікту, яке подано в графічному вигляді.

**Ключові слова:** керування повітряним рухом, норма безпечного розділення, імовірність конфлікту, стохастичний метод, дифузійний процес відхилення.

**Аннотация:** Статья посвящена проблеме оценки вероятности опасного сближения самолетов для предотвращения их столкновения при кооперативном управлении воздушным движением. Показано применение разработанного ранее обобщенного стохастического метода оценки вероятности конфликта с учетом фактора управляемости полетом самолетов. Уравнение вероятности конфликта в виде многомерного параболического дифференциального уравнения в частных производных было получено при использовании дифференциального (инфинитезимального) оператора многомерного стохастического процесса относительного движения самолетов. Определены все коэффициенты дифференциального оператора и для конкретных условий получено численное решение уравнения вероятности конфликта, которое представлено в графическом виде.

**Ключевые слова:** управление воздушным движением, норма безопасного разделения, вероятность конфликта, стохастический метод, диффузионный процесс отклонения.

### **1. Введение**

Согласно Европейской программе гармонизации и интеграции управления воздушным движением (EATCHIP – European Air Traffic Control Harmonisation and Integration Program), а также Европейской программе организации воздушного движения (EATMP – European Air Traffic Management Program), определена необходимость развития и автоматизации ряда функций с целью поддержки диспетчеров управления воздушным движением (УВД) в процессе принятия решения. При разработке новых методов и алгоритмов обработки аэронавигационной информации необходимо принимать во внимание развитие и внедрение новых концепций организации воздушного движения (ATM – Air Traffic Management).

В настоящее время активно обсуждается и исследуется перспектива внедрения новых концепций ATM и связанная с этим проблема безопасности воздушного движения. Причиной этому является прогнозируемое до 2020 года увеличение в два раза интенсивности воздушного движения и связанная с этим необходимость увеличения производительности системы ATM при обеспечении требуемой безопасности полетов [1].

Ожидаемое увеличение плотности воздушного движения, изменение динамики относительного движения самолетов и уменьшение норм эшелонирования увеличивает

вероятность опасного сближения самолетов. В этих условиях значительно возрастает роль систем обнаружения и предотвращения потенциально конфликтных ситуаций.

В настоящее время считается, что наиболее эффективными являются вероятностные методы обнаружения и оценки конфликтных ситуаций [2]. Все известные стохастические методы можно разделить на две группы. Методы первой группы основаны на прогнозировании процесса отклонения самолета от запланированной траектории полета, который рассматривается как стохастический процесс, с последующим анализом прогнозируемого относительного положения самолетов [2, 3]. Другая группа методов основана на прогнозировании областей неопределенности положения самолетов с последующим анализом их опасного сближения [4, 5].

Настоящая статья посвящена проблеме оценки вероятности потенциально конфликтных ситуаций при условии внедрения кооперативного АТМ. Кооперативное АТМ является одной из прогрессивных концепций, направленных на увеличение производительности и безопасности воздушного движения путем оптимизации взаимодействия диспетчеров, экипажа самолета и других служб путем интеграции системы передачи данных, улучшения методов наблюдения и автоматизации.

Возможности, которые предоставляются новыми системами передачи данных, системами обработки данных и новыми функциями отображения информации, открывают путь к организации совместного использования информации в масштабе всей системы АТМ, что позволит обеспечить автоматизированную поддержку решения задач и последующий переход к кооперативному АТМ.

При этом автоматизированные системы УВД должны иметь доступ к навигационным данным, которые содержатся в бортовых системах управления полетом (FMS – flight management system).

Новые качества системы кооперативного УВД позволяют разработать методы обнаружения и разрешения конфликтов, основанные на информации о намерениях участников движения.

В работе рассматривается применение обобщенного стохастического метода, предложенного ранее в работах [6, 7], который относится к первой упомянутой выше группе вероятностных методов, для оценки вероятности опасного сближения самолетов с учетом фактора управляемости воздушным движением. Этот метод основан на обобщенном уравнении вероятности конфликта, которое получено с учетом стохастической природы и корреляции во времени процесса отклонения самолетов от запланированной (заявленной) траектории полета и имеет вид многомерного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа. Получены и представлены результаты численного решения уравнения вероятности конфликта для конкретных условий управляемого полета.

## **2. Постановка задачи. Математическая модель процесса отклонения самолета от запланированной траектории**

В основе любого стохастического метода обнаружения и оценки вероятности конфликта в воздушном движении лежит математическая модель динамических процессов движения наблюдаемых и управляемых объектов.

В предложенном ранее в [6] обобщенном стохастическом методе оценки вероятности

конфликта принималось, что в общем случае отклонение от заданной скорости полета по каждой координате трехмерной системы координат описывается случайным процессом Орнштейна-Уленбека [8]. Выбор этого процесса обосновывался сочетанием ряда его свойств. Стационарный процесс Орнштейна-Уленбека является марковским, гауссовским и имеет непрерывные траектории. Эти свойства наиболее адекватны реальному управляемому движению самолета в режиме стабилизации заданных параметров траектории полета при воздействии случайных возмущающих факторов.

В работе [7] рассматривалась задача определения вероятности конфликта между двумя самолетами, летящими по пересекающимся траекториям на одном высотном эшелоне.

Синтезируем математическую модель движения самолета, принимая во внимание фактор управляемости, который состоит в том, что самолет находится под управлением со стороны службы УВД, а его высота, направление и скорость полета на маршруте стабилизируются бортовой системой управления.

Рассмотрим локальную горизонтальную систему координат  $xOy$  (рис. 1) с осью  $Ox$ , ориентированной вдоль линии заданного пути, где  $x(t)$  – координата продольного положения

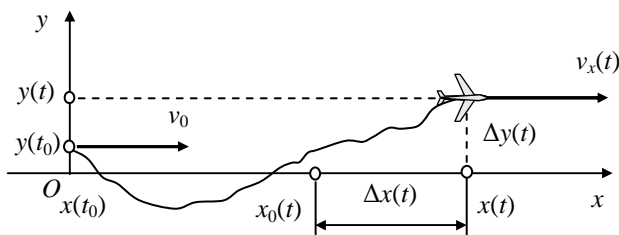


Рис. 1. Движение самолета в локальной системе координат

самолета в момент времени  $t$ ;  $y(t)$  – координата бокового положения самолета;  $\Delta y(t) = y(t) - y(t_0)$  – отклонение от линии заданного пути;  $v_x(t)$  – скорость полета;  $v_0$  – заданная скорость полета;  $u_x(t) = v_x(t) - v_0$  – отклонение от заданной скорости

полета.

При указанных условиях стабилизации бокового положения самолета можно считать, что процесс отклонения от линии заданного пути является случайным процессом, и аппроксимировать его можно случайным процессом Орнштейна-Уленбека;

$$dy(t) = -\alpha_y y(t)dt + \sigma_y dW_y(t), \quad (1)$$

где  $\alpha_y$  и  $\sigma_y$  – известные положительные коэффициенты;  $\{W_y(t)\}$  – стандартный винеровский процесс.

Отметим, что процесс Орнштейна-Уленбека является не расходящимся процессом, и в этом состоит учет фактора стабилизируемости бокового положения самолета относительно линии заданного пути.

На процесс отклонения самолета в продольном движении наиболее существенное влияние оказывают ветровые воздействия, поэтому для продольной координаты запишем модель в виде

$$dx(t) = (v_0 + u_x(t))dt, \quad x(0) = 0, \quad (2)$$

где  $v_0$  – заданная скорость полета,  $u_x(t)$  – отклонение от заданной скорости, которое описывается случайным процессом

$$du_x(t) = -\alpha_x u_x(t)dt + \sigma_x dW_x(t), \quad (3)$$

где  $\alpha_x$  и  $\sigma_x$  – известные положительные коэффициенты;  $\{W_x(t)\}$  – другой стандартный винеровский процесс, независимый от  $\{W_y(t)\}$ .

### 3. Описание относительного движения самолетов

Представленная выше модель процесса отклонения самолета от заданных параметров траектории полета имеет меньшую размерность, чем модель, рассмотренная в работе [7], где не учитывался фактор управляемости в боковом движении и случайным процессом описывался процесс отклонения от заданной скорости полета как в продольном, так и боковом движении. Новая модель дает возможность уменьшить сложность, связанную с практическим решением многомерного параболического уравнения вероятности конфликта.

Рассмотрим для каждого самолета вектор состояний, характеризующий процесс его движения в соответствующей локальной системе координат:

$$\mathbf{z}(t) = [x(t), y(t), u_x(t)]^T. \quad (4)$$

Основываясь на уравнениях (1) – (3), запишем

$$d\mathbf{z}(t) = \left[ v_0 \mathbf{e} + \Lambda \begin{bmatrix} y(t) \\ u_x(t) \end{bmatrix} \right] dt + \mathbf{S} d\mathbf{W}(t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{e} = [1, 0, 0]^T$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_y & 0 \\ 0 & -\alpha_x \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} W_x(t) \\ W_y(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}$ .

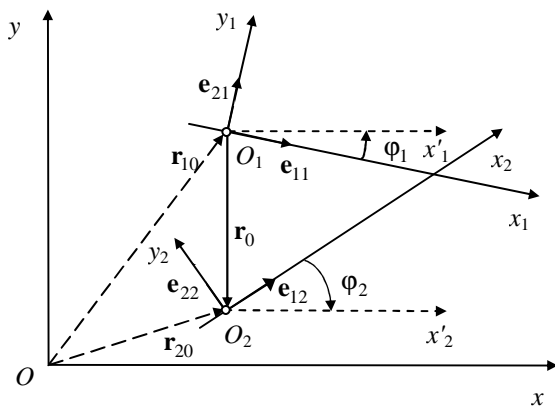


Рис. 2. Относительное движение самолетов в единой системе координат

Теперь рассмотрим общую (единую) для двух самолетов систему координат  $xOy$  (рис. 2). Движение каждого самолета описывается в локальной системе координат  $x_j O_j y_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Пусть  $\mathbf{e}_{1j}$ ,  $\mathbf{e}_{2j}$  – единичные базисные векторы для соответствующей  $j$ -й локальной системы в общей системе координат.

Пусть  $\mathbf{r}_{j0}$  – вектор,

соответствующий точке  $O_j$  начального положения  $j$ -го самолета, а  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}$  – вектор, соответствующий начальному относительному положению самолетов. Тогда вектор относительного положения самолетов равен

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}) + x_2(t)\mathbf{e}_{12} + y_2(t)\mathbf{e}_{22} - x_1(t)\mathbf{e}_{11} - y_1(t)\mathbf{e}_{21}. \quad (6)$$

Преобразуем вектор состояний (4) для каждого самолета из локальной в единую систему

координат:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t), \quad (7)$$

где  $\mathbf{U}_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{bmatrix}$  – матрица поворота на угол  $\varphi_j$  (рис. 2).

На основании уравнения (5) получим уравнение в единой системе координат:

$$d\mathbf{R}(t) = (\mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{R}(t))dt + \mathbf{\Sigma}d\mathbf{W}(t), \quad (8)$$

где  $\mathbf{h} = v_0 \begin{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & \mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda \mathbf{P}_{23} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

матрица  $\mathbf{P}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  представляет собой оператор проектирования на скоростные координаты.

Введем объединенный вектор состояний для двух самолетов  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(t) \\ \mathbf{R}_2(t) \end{bmatrix}$  и, используя уравнения (7)–(8), получим диффузионное уравнение, которое описывает процесс отклонения двух самолетов от заданных траекторных параметров полета:

$$d\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1(t) \\ \mathbf{h}_2 + \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_{x1}(t) \\ W_{y1}(t) \\ W_{x2}(t) \\ W_{y2}(t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь  $\{W_{xj}(t), W_{yj}(t), j = 1, 2\}$  – взаимно независимые винеровские процессы.

#### 4. Определение дифференциального оператора

Для вывода уравнения оценки вероятности конфликта определим дифференциальный (инфинитезимальный) оператор диффузионного процесса, описывающего объединенный процесс отклонения самолетов (9). Этот оператор позволяет установить соответствие между диффузионным процессом и его вероятностными характеристиками [9].

Для диффузионного процесса (9) инфинитезимальный оператор  $\mathcal{A}$  действует на функцию  $g(t, \mathbf{X})$  из класса  $C^2(\mathfrak{R}^6)$ , где  $g = g(t, r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{12}, r_{22}, r_{32})$  и  $\mathbf{R}_j = [r_{1j}, r_{2j}, r_{3j}]^T = [x_j, y_j, u_{xj}]^T$ , по правилу [6]

$$\mathcal{A}g = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 B_{ij} \frac{\partial g}{\partial r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^3 C_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial r_{ij}^2} + C_{12j} \frac{\partial^2 g}{\partial r_{1j} \partial r_{2j}} \right], \quad (10)$$

где  $B_{1j} = v_{0j} \cos \varphi_j - \alpha_{yj} \sin^2 \varphi_j r_{1j} + \alpha_{yj} \sin \varphi_j \cos \varphi_j r_{2j} + \cos \varphi_j r_{3j}$ ;

$B_{2j} = v_{0j} \sin \varphi_j + \alpha_{yj} \sin \varphi_j \cos \varphi_j r_{1j} - \alpha_{yj} \cos^2 \varphi_j r_{2j} + \sin \varphi_j r_{3j}$ ;

$B_{3j} = -\alpha_{xj} r_{3j}$ ;  $C_{1j} = \sigma_{yj}^2 \sin^2 \varphi_j$ ;

$C_{2j} = \sigma_{yj}^2 \cos^2 \varphi_j$ ;

$C_{3j} = \sigma_{xj}^2$ ;

$$C_{12j} = -2\sigma_{yj}^2 \sin \varphi_j \cos \varphi_j.$$

### 5. Условие обнаружения конфликта

Рассмотрим условия возникновения конфликтной ситуации. Предположим, что два самолета конфликтуют, если относительное расстояние между ними меньше или равно безопасно допустимому расстоянию  $d$ .

Определим вероятность опасного сближения самолетов на интервале времени  $[0, T]$ :

$$q = P\{\exists t \in [0, T]: \|\mathbf{r}(t)\| \leq d\}. \quad (11)$$

Введем функцию условной вероятности опасного сближения на интервале времени  $[T-t, T]$ :

$$g(t, \mathbf{X}) = P\{\exists \tau \in [T-t, T]: \|\mathbf{r}(\tau)\| \leq d \mid \mathbf{X}(T-t) = \mathbf{X}\}. \quad (12)$$

В соответствии с выражением (6), опасное сближение происходит, когда процесс  $\mathbf{X}(t)$  попадает в область, которая является областью конфликта,

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^6 : \|\mathbf{r}_0 + \mathbf{P}_{12}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\| \leq d\}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$ , а  $\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  – оператор проектирования на пространственные координаты.

### 6. Уравнение вероятности конфликта

Задача обнаружения конфликта самолетов в рассмотренной постановке для условия (13) аналогична известной задаче достижения заданной границы многомерным марковским процессом, для которой определено дифференциальное уравнение параболического типа в общем виде [9].

Для рассматриваемой задачи функция вероятности конфликта  $g(t, \mathbf{X})$  (12) для инфинитезимального оператора (10), согласно Л. Понтрягину [9], удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению в частных производных [6]:

$$\frac{\partial g(t, \mathbf{X})}{\partial t} = \mathcal{A}g(t, \mathbf{X}), \quad t \in (0, T], \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^6 \setminus \mathbf{K} \quad (14)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} g(t, \mathbf{X}) &= 1, & \mathbf{X} \in \partial\mathbf{K}, t \in (0, T], \\ g(0, \mathbf{X}) &= 0, & \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^6 \setminus \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Функция  $g$  определена и непрерывна на множестве

$$D = \{(t, \mathbf{X}) : t \in (0, T], \mathbf{X} \in (\mathfrak{R}^6 \setminus \mathbf{K}) \cup \partial\mathbf{K} \text{ или } t = 0, \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^6 \setminus \mathbf{K}\}.$$

Решение уравнения (14) дает вероятность опасного сближения самолетов для заданных начальных условий. При этом искомая вероятность опасного сближения самолетов (11) на заданном интервале времени  $[0, T]$  равна  $q = g(T, \mathbf{X}(0))$ ,  $\mathbf{X}(0) \in \mathfrak{R}^6 \setminus \mathbf{K}$ .

## 7. Численное решение уравнения вероятности конфликта

Для заданных условий параболическое уравнение конфликта (14) было решено численным методом.

Рассматривался случай полета двух самолетов на одном высотном эшелоне на параллельных трассах навстречу друг другу. Принимались следующие значения коэффициентов для модели отклонения от линии заданного пути:  $\alpha_y = 0,01 \text{ с}^{-1}$  и  $\sigma_y = 100 \text{ м}$ . Минимально безопасное расстояние между самолетами устанавливалось равным  $d = 1000 \text{ м}$ . Размеры сетки для численного решения задавались равными:  $x = 0 \dots 6000 \text{ м}$  и  $y = 0 \dots 3000 \text{ м}$ . Шаг дискретизации вдоль продольной координаты  $x$  и бокового отклонения  $y$  принимался равным 100 м.

Полученный результат численного решения представлен на рис. 3, где показана зависимость вероятности потенциального конфликта от взаимного относительного положения самолетов для различного времени прогнозирования  $T_p$ , соответственно при прогнозировании на 5 с (рис. 3 а), на 10 с (рис. 3 б) и на 20 с (рис. 3 в).

Результат трактуется следующим образом. Точка на сетке с координатами  $x = 100 \times k \text{ м}$ ,  $y = 100 \times m$  ( $k$  и  $m$  – номера дискрет на сетке по соответствующим координатам) определяет начальное относительное положение самолетов в момент времени  $t_0$ . Пересечение перпендикуляра, восстановленного в этой точке, с поверхностью решения уравнения конфликта определяет вероятность конфликта на заданном интервале времени прогнозирования.

Для более детального анализа было выполнено сечение поверхности решения уравнения конфликта (рис. 2 а–в) вертикальными плоскостями, параллельными продольной оси  $x$  (рис. 2, а–е), что соответствует разному боковому относительному положению самолетов.

Как видно из полученного результата, решение более чувствительно ко времени прогнозирования в продольном движении, чем в боковом. Однако именно это соответствует начальной априорной информации о статистических характеристиках процесса отклонения от заданной траектории полета.

## 8. Заключение

Представленное исследование посвящено оценке вероятности опасного сближения самолетов при условии внедрения новой концепции организации кооперативного управления воздушным движением (Cooperative ATM), при которой известны запланированные траектории полета и намерения экипажа.

Рассмотрено применение разработанного ранее обобщенного стохастического метода оценки вероятности потенциального конфликта и получено уравнение конфликта с учетом стохастической природы процесса и корреляции во времени процесса отклонения самолетов от заданных параметров траектории полета, но с учетом фактора управляемости воздушным движением и стабилизируемости направления полета.

Представлены математическая постановка задачи и процедура ее решения для самолетов, летящих на одном высотном эшелоне в общем случае с произвольными курсами. Вероятность конфликта определяется как вероятность сближения самолетов на расстоянии меньше заданной нормы безопасного разделения. Вероятность столкновения самолетов определяется как вероятность сближения самолетов на расстояние, соизмеримое с размерами самолетов.

При выводе математической модели процесса отклонения самолета от заданных

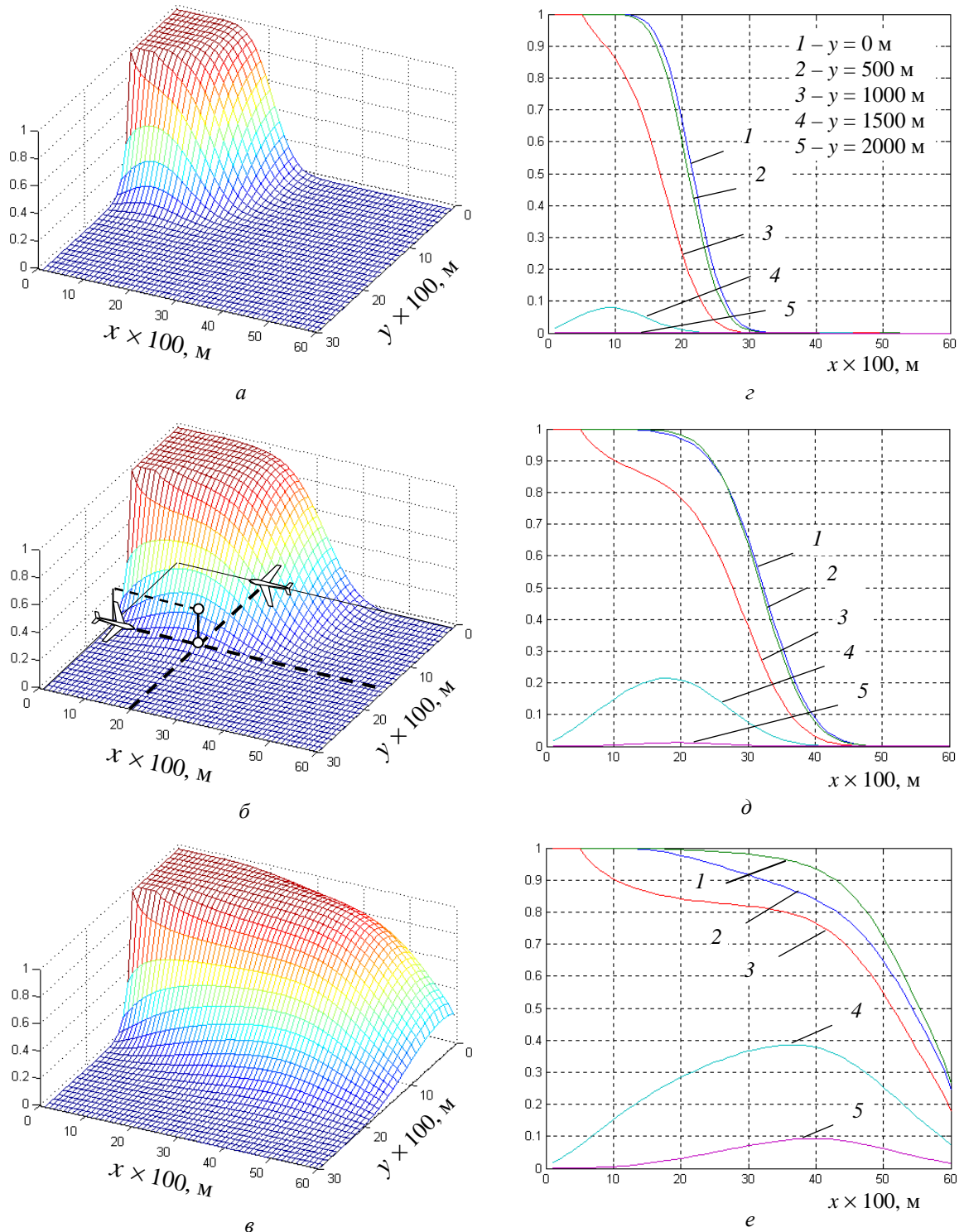


Рис. 3. Зависимость вероятности конфликта от начального относительного положения самолетов для заданного времени прогнозирования  $T_p$ : а, г –  $T_p = 5$  с; б, д –  $T_p = 10$  с; в, е –  $T_p = 20$  с



параметров траектории и описания относительного движения самолетов в виде диффузионного процесса использовался случайный процесс Орнштейна-Уленбека.

В результате получено уравнение вероятности конфликта, которое представляет собой многомерное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа с использованием дифференциального оператора многомерного стохастического процесса относительного движения самолетов. При этом определены все коэффициенты дифференциального оператора. Дается общая процедура прогнозирования вероятности опасного сближения самолетов.

Практическое применение обобщенного метода и численное решение уравнения вероятности конфликта показаны для конкретного типового варианта полета самолетов на параллельных трассах. Результат численного решения представлен в графическом виде. В отличие от известного вероятностного метода [4] решение весьма чувствительно реагирует как на время прогнозирования, так и на относительное расстояние между самолетами даже при их близком схождении. Это дает основание считать, что предложенный метод позволяет оценивать как вероятность опасного сближения самолетов, так и вероятность их столкновения с высокой достоверностью.

Дальнейшие исследования направлены на численное решение задачи оценки вероятности сближения самолетов и вероятности столкновения для различных сценариев конфликта и параметров математических моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Towards Cooperative ATS: The COOPATS Concept // European air traffic management programme, Eurocontrol. – 2001. – 54 p.
2. Bakker G.J., Kremer H.J., Blom H.A.P. Probabilistic Approaches Toward Conflict Prediction // Air Transportation Systems Engineering, AIAA. – 2001. – P. 677–694.
3. Blom H.A.P., Bakker G.J., Blanker P.J.G. et al. Accident Risk Assessment for Advanced ATM // Air Transportation Systems Engineering, G.L. Donohue and A.G. Zellweger (Eds.), AIAA. – 2001. – P. 463–480.
4. Paielli R.A., Erzberger H. Conflict Probability Estimation for Free Flight // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1997. – Vol. 20, № 3. – P. 588–596.
5. Stochastic conflict detection model revisited / K. Blin, M. Akian, F. Bonnans, E. Hoffman, C. Martini, K.A. Zenghal // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. – Denver, CO. – 2000. – August. – <http://www.eurocontrol.fr/projects/cospace/archive/gnc00.pdf>.
6. Харченко В.П., Кукуш А.Г., Васильев В.Н. Обобщенный стохастический метод оценки характеристик потенциальных конфликтов управляемого воздушного движения // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 81–93.
7. Васильев В.Н. Стохастический метод прогнозирования конфликтных ситуаций и столкновений самолетов // Математические машины и системы. – 2005. – № 4. – С. 62–71.
8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы: Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.