УДК 533.9

НОВЫЕ ТИПЫ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩИХ НА ГИБРИДНЫХ РЕЗОНАНСАХ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Т.А. Давыдова, Ю.А. Зализняк

Институт ядерных исследований НАНУ, Киев, Украина

Солитоны огибающих, формирующиеся вблизи верхнегибридной и нижнегибридной ветвей колебаний замагниченной плазмы, описываются одномерным нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), которое учитывает пространственно - нелокальное взаимодействие волн и эффекты дисперсии высшего порядка. В данной работе представлен новый тип солитонов огибающей, фаза которых нелинейно изменяется с пространственной координатой. Найдено точное решение стационарного НУШ в виде солитона с нелинейно – переменной фазой (НПФ). С помощью прямого вариационного метода с пробной функцией, которая включает точное решение, произведен анализ динамики волновых пакетов и найдены приближенные солитонные решения. Устойчивость найденного класса солитонов НУШ подтверждена методом Ляпунова. Существование рассмотреного класса солитонных решений было проверено также путем непосредственного численного интегрирования стационарного НУШ.

1. Введение

При описании образования и эволюции плазменных структур, образующихся в окрестностях гибридных резонансов замагниченной плазмы обычно используется одномерное нелинейное уравнение Шредингера, моделирующее конкуренцию эффектов слабой дисперсии и слабой нелинейности для волн огибающих. Так, для адекватного описания структур, размер которых сравним с электронным скин-слоем c/ω_{pe} необходимо наряду с кубической нелинейностью керровского типа учитывать также и нелинейное нелокальное взаимодействие верхнегибридных волн с магнитозвуковыми и нижнегибридными возмущениями [1] – [5]. Также, при уменьшении пространственного размера структур, следует учитывать высшие члены в разложении дисперсии [1], [2]. В данной работе исследуются солитонные решения обобщенного НУШ (ОНУШ) вида

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+P\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+B\psi|\psi|^2+ C\psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi|^2=0, \qquad (1)$$

в котором ψ - безразмерная амплитуда огибающей волнового пакета, слагаемые, пропорциональные D и P описывают дисперсионные эффекты второго и четвертого порядков соответственно, а слагаемые с B и C – локальные и нелокальные нелинейные эффекты. ОНУШ – универсальное модельное уравнение. Оно может использоваться для описания динамики нелинейных когерентных структур в разнообразных средах – плазме [1] - [5], молекулярных системах [6], оптических волокнах [7] и т.д. Произвольный волновой пакет, описывающийся ОНУШ (1), имеет три интеграла движения : число квантов

$$N=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx, \qquad (2)$$

гамильтониан

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\left(D\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2-P\left|\frac{d^2\psi}{dx^2}\right|^2-\frac{B}{2}|\psi|^4+ \frac{C}{2}\left(\frac{d}{dx}|\psi|^2\right)^2\right)dx, \qquad (3)$$

и импульс

$$I=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\frac{d}{dx}\arg\psi(x,t)dx. \qquad (4)$$

В случае стоячего солитона импульс равен нулю. Обычно при исследовании солитонных решений НУШ и ОНУШ их фаза полагается независимой от пространственной координаты. Целью данной работы является изучение стоячих солитонных решений вида

$$\psi(x,t)=h\,f(x/a)\exp(i\lambda t+i\gamma\varphi(x/a)), \qquad (5)$$

фаза которых изменяется с пространственной координатой – солитонов с нелинейно – переменной фазой (НПФ). Оказалось, что в случае DB<0, DP>0, BC>0 при фиксированном значении соотношения коэффициентов ОНУШ, именно, при B/C=(5/14)D/P, существует точное решение (1), вида (5) с $f(x/a)=(1/\sqrt{2})\cosh^{-1}(x/a)$, параметры которого $\gamma=\pm\sqrt{5}$, $\lambda=-(9/16)D^2/P$, $h^2=(21/8)|D/C|$, $a=\sqrt{8P/D}$, $\varphi(x/a)=\ln\cosh(x/a)$. При использовании вариационного метода для исследования динамики волновых пакетов в рамках ОНУШ (1) предпочтительно выбирать пробную функцию, включающую точное решение в виде солитона с НПФ.

2. Вариационный анализ и устойчивость стоячих солитонных решений ОНУШ с DB<0, DP>0, BC>0

Выбирая пробную функцию в виде

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}h_0(t)\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a(t)}\right)\times \exp\left[i\varphi_0(t)+i\gamma\ln\cosh\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right] \qquad (6)$$

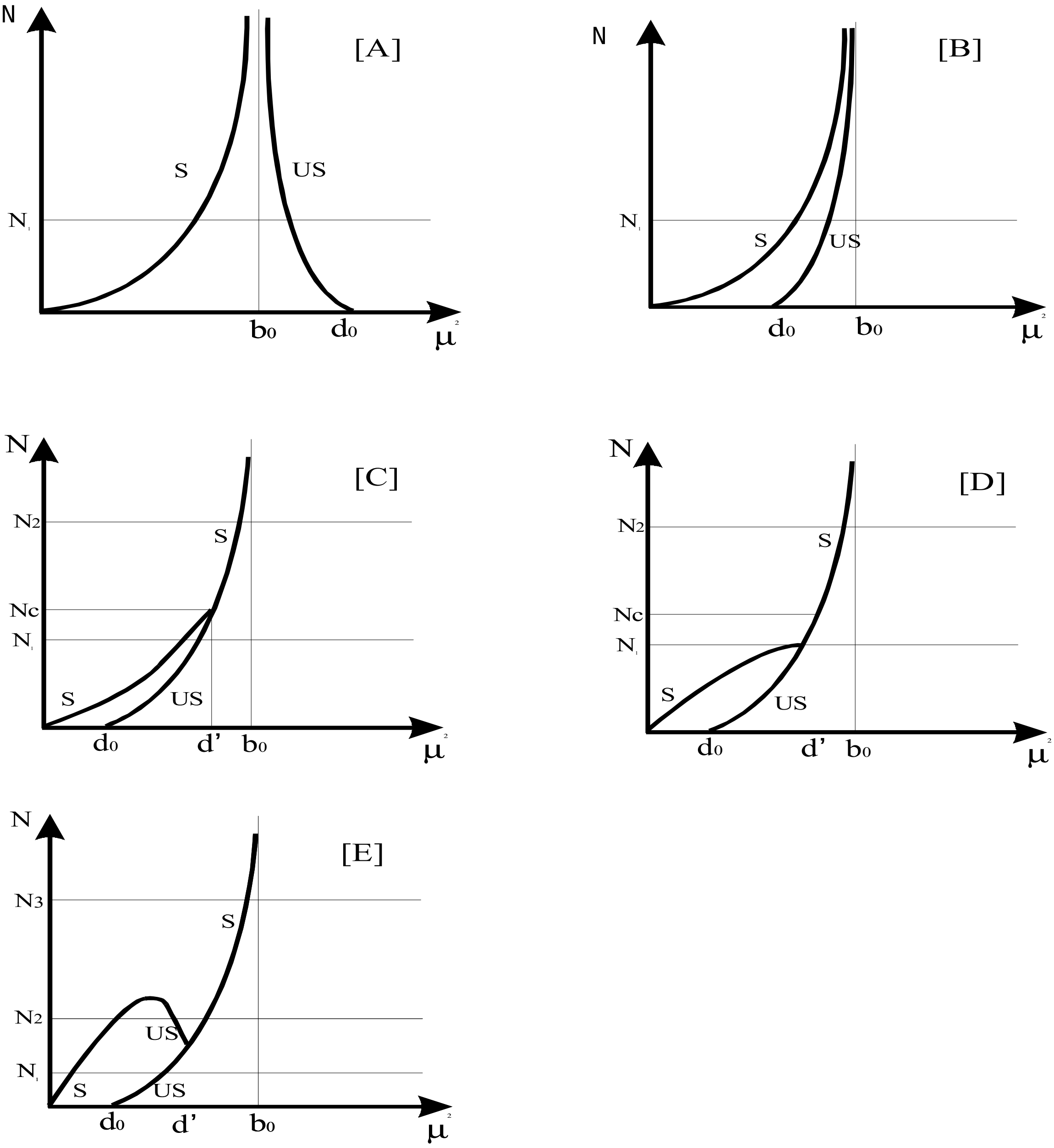

Рис.1

и пользуясь условием, что любое решение ОНУШ (1) реализует экстремум функционала Лагранжа, получаем систему уравнений, описывающую эволюцию параметров $\mu(t)=a^{-1}(t)$ и $\beta(t)=\gamma(t)\mu(t)$ волнового пакета в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\mu}{d\tau}=\frac{2}{N}\frac{\partial H}{\partial \beta}\,,\ \frac{d\beta}{d\tau}=-\frac{2}{N}\frac{\partial H}{\partial \mu} \qquad (7)$$

где $\tau=\int_0^t \mu^2 dt$, число квантов $N=h_0^2(t)/\mu(t)$, а гамильтониан H:

$$H=N\{\frac{1}{3}D\left(\mu^2+\beta^2\right)- \frac{1}{5}P\left(\frac{7}{3}\mu^4+\frac{10}{3}\mu^2\beta^2+\beta^4\right)-\frac{1}{6}BN\mu+\frac{2}{15}CN\mu^3\} \qquad (8)$$

Стационарные точки системы уравнений (7) соответствуют экстремумам (минимумам, максимумам или седловым точкам) гамильтониана при фиксированном числе квантов:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0,\beta=\beta_0}=0\,,\ \left.\frac{\partial H}{\partial \beta}\right|_{\mu=\mu_0,\beta=\beta_0}=0\,. \qquad (9)$$

Эти точки определяют параметры μ и β солитонного решения. При $DP<0$ система (9) имеет решения лишь в виде обычных солитонов с $\beta=0$, однако, при $DP>0$ появляются решения с ненулевым β. Исключая β из системы (9) получим, что стационарные точки μ_0 для обычных солитонов и μ_c для солитонов с НПФ можно найти из следующих уравнений:

$$N=N_0(\mu_0)=\frac{14}{3}\left|\frac{P}{C}\right|\mu_0\frac{\mu_0^2-d_0}{b_0-\mu_0^2} \qquad (10)$$

$$N=N_c(\mu_c)=\frac{28}{9}\left|\frac{P}{C}\right|\mu_c\frac{d_c-\mu_c^2}{b_0-\mu_c^2}\,, \qquad (11)$$

где $d_0=5D/14P$, $b_0=5B/12C$, $d_c=5D/4P$, $\mu^2_c<\min\{d',b_0\}$, $d'=D/2P$. Солитон устойчив, если он реализует минимум или максимум гамильтониана при фиксированном N и неустойчив, если он соответствует седловой точке гамильтониана, то есть он устойчив при

$$h = \frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \mu \partial \beta}\right] = -\frac{\partial^2 H}{\partial \mu \partial N}\frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2}\frac{dN}{d\mu} > 0 \qquad (12)$$

и неустойчив в противоположном случае. Поэтому свойства устойчивости солитонов, которые предсказывает вариационный метод, легко получить по качественному виду кривых $N_0(\mu)$ и $N_c(\mu)$. В дальнейшем для удобства зафиксируем знаки коэффициентов: D>0, P>0, B<0, C<0. В этом случае все возможные варианты взаимного расположения кривых изображены на (рис. 1. [A]-[E]). В зависимости от соотношения коэффициентов ОНУШ и числа квантов вариационный метод предсказывает существование от одного до трех (одного обычного солитона и пары солитонов НПФ) устойчивых солитонных решений.

Солитоны, неустойчивые по отношению к вариации двух параметров - β и μ - останутся неустойчивыми и для любого более широкого класса вариаций параметров, поэтому неустойчивость солитонов не требует дополнительного обоснования. Однако остается сомнение – а не может ли экстремум гамильтониана трансформироваться в седловую точку при вариации каких-то дополнительных параметров? С помощью интегральных оценок, аналогично [1], можно показать, что в рассматриваемом случае DB<0, DP>0, BC>0 гамильтониан солитонных решений всегда ограничен, что гарантирует существование его абсолютного экстремума, который соответствует устойчивому солитонному решению. Было также показано, что в некоторых случаях решение в виде обычного солитона теряет устойчивость. В этом случае в системе должна появиться пара устойчивых солитонов с НПФ.

3. Численное решение стационарного ОНУШ

С целью проверки адекватности описания солитонных решений с помощью вариационного метода, использующего пробную функцию (6), стационарное ОНУШ

$$-\lambda\psi + D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + P\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + B\psi|\psi|^2 + C\psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi|^2 = 0\,, \qquad (13)$$

где

$$\psi(x,t) = \psi(x)\exp(i\lambda t) \qquad (14)$$

решалось также и численно. Для этого уравнение (13) было переписано в виде системы из двух уравнений для действительной и мнимой частей ψ, затем производные по пространственной координате были аппроксимированы 5-ти точечными центральными разностями с учетом периодических граничных условий, и полученная система нелинейных алгебраических уравнений решалась глобально сходящимся многомерным методом секущих [8]. В качестве начального приближения использовался профиль пробной функции (6) с фиксированными амплитудой, шириной и параметром γ, полученными из системы (9). Расчеты проводились для всех возможных вариантов взаимного расположения кривых $N(\mu)$ и $N_0(\mu)$. Солитонные решения с НПФ были найдены не во всех областях параметров, где вариационный метод предсказывает их существование. Как вариационный анализ, так и численный счет, показывают, что принципиально важными для существования солитонов НПФ являются два параметра – отношение линейного и нелинейного пространственных масштабов σ=(D/P)/(B/C), а также нелинейный сдвиг частоты λ (либо число квантов N). Солитон НПФ существует при $\sigma > \sigma_{cr} \approx 1.5$. Для каждого фиксированного σ существует максимальное $\lambda_{cr}<0$, при котором (13) имеет солитонное решение с НПФ. При $\lambda>\lambda_{cr}$ удается найти лишь обычные солитонные решения, фаза которых не зависит от x. В случае $\lambda > -D^2/4P$, как и следует из асимптотического поведения солитонных решений, численный счет не обнаружил ни обычных солитонов, ни солитонов с НПФ. Кроме того, в той области λ, где существует солитон НПФ, имеется такой диапазон значений λ, в котором профиль $|\psi|^2$ гладкий и с хорошей точностью описывается функцией sech(x) (см. рис.2). При увеличении λ нижняя часть солитона расширяется, а верхняя – сужается, у солитона формируется некое подобие «пьедестала» (см. рис.3), максимальная амплитуда при этом уменьшается, и в момент $\lambda=\lambda_{cr}$ образуется перегиб профиля и солитон НПФ перестает существовать. При уменьшении же величины λ солитон НПФ остается гладким, однако его профиль отклоняется от sech(x) и становится более «прямоугольным» (см рис.4). В некоторых случаях, например, при $N=N_3$ (рис. 1[E]), численный счет также обнаруживает солитон НПФ, однако, его профиль «двугорбый», сильно отклоняющийся от профиля пробной функции (6). Наряду с солитонами НПФ во всех областях параметров были найдены численно также и обычные солитонные решения. Все они имеют более или менее выраженные «осциллирующие хвосты». Обо всех найденных численно солитонных решениях стационарного ОНУШ можно сказать следующее: чем более гладким является профиль солитона, тем лучше согласование параметров (ширины, амплитуды, числа квантов) точного (численного) и приближенного (вариационного) решений.

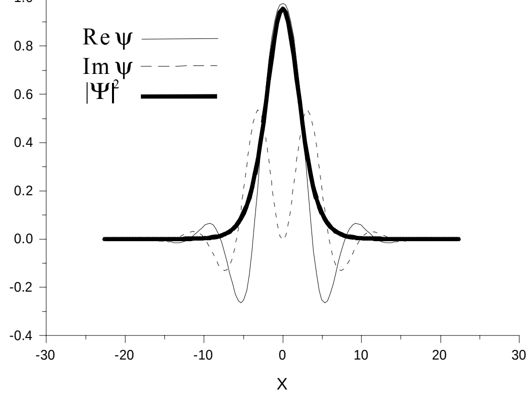

Рис.2. Численно найденное точное решение стационарного ОНУШ (13) при D=1, P=1, B=-1, C=-2.8, λ=-0.562

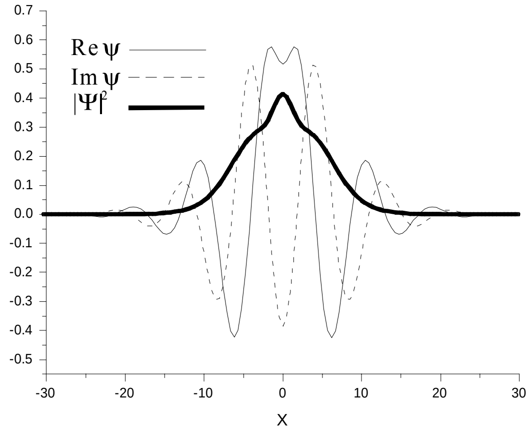

Рис 3. Численное решение стационарного ОНУШ (13) в виде солитона с НПФ при D=1, P=1, B=-1, C=-5, λ=-0.378

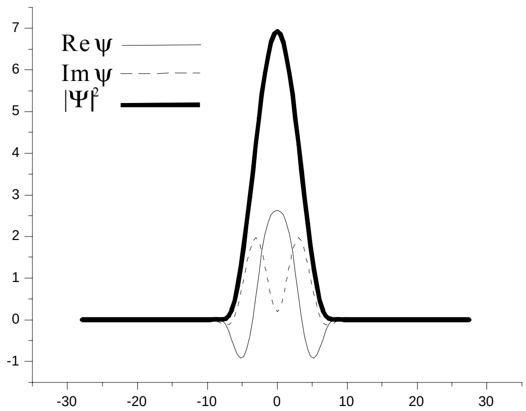

Рис 4. Численное решение стационарного ОНУШ (13) в виде солитона с НПФ при D=1, P=1, B=-1, C=-5, λ=-3.328

4. Выводы

В данной работе изучены стоячие солитоны ОНУШ, фаза которых нелинейно зависит от пространственной координаты. Представлено точное стационарное решение в виде солитона с НПФ и с помощью вариационного метода произведен анализ динамики волновых пакетов с НПФ. Путем численного интегрирования стационарного ОНУШ подтверждено существование солитонов с НПФ и хорошее количественное согласие между приближенными и точными параметрами.

Работа была частично поддержана Украинським Министерством Науки и Технологии, грант № 2.4/846.

Литература

1. T.A. Davydova, A.I. Fishchuk Bistable Upper-Hybrid Solitons // Phys. Scr., 1998, vol. 57, p.118.
2. T.A. Davydova, A.I. Fishchuk Two Kinds of Upper-Hybrid Soliton Bistability// Phys.Lett., 1998, vol.A245,. p.453.
3. A.F. Kaufman, L. Stenflo Upper-Hybrid Solitons // Phys. Scr., 1975, vol. 11, p.269.
4. M.V. Porkolab, M.V. Goldman Upper-Hybrid Solitons and Oscillating – two – stream instabilities // Phys. Fluids, 1976, vol. 19, p. 872.
5. K.P. Sharma, P.R. Shukla Nonlinear Effects at the Upper–Hybrid Layer//Phys. Fluids, 1983, vol. 26, p. 87.
6. A.S. Davydov Solitons in Molecular Systems. Kluwer Academic Press, Holland, 1985.
7. H.A. Haus, W.S. Wong Solitons in Optical Communications // Rev.Mod.Phys., 1996, vol.68, No.2, p.423.
8. Numerical Recipes in FORTRAN77: the Art of Scientific Computing, Cambridge Univ. Press, 1986.