УДК 533.9

ТЕОРИЯ ДРОБЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

О.В.Куклина[1], А.В.Тур[2], В.В.Яновский[3]

[1]Харьковский национальный университет, физический факультет, Харьков, Украина

[2]Center D'etude Spatiale Des Rayonnement, TOULOUSE, CEDEX 4.

[3]Институт монокристаллов, Национальная академия наук Украины, Харьков

В работе предложена теория фрагментации объектов под внешними воздействиями. Учтено, что поверхность фрагментов, появляющихся в результате разрушения объектов, может быть фрактальной. Получены универсальные асимптотики функции распределения фрагментов по размерам в крупномасштабной области и проведен численный анализ выхода в асимптотические режимы. Обсуждаются экспериментальные данные, которые демонстрируют хорошее согласие с теоретическими результатами.

1. Введение

Впервые постановка вопроса о фрагментации была стимулирована исследованием турбулентности, под влиянием хорошо известного механизма дробления вихрей, в работе [1]. И хотя эта работа не привела к построению теории дробления, основанной на физически ясных принципах, она предопределила один из возможных путей развития такой теории. Особенно важной она оказалась для исследования перемежаемости в теории турбулентности. Известно большое число физических явлений, относящихся к процессам фрагментации. Например, формирование мелкодисперсных систем под внешним воздействием, в частности, формирование поверхностного слоя (реголита) малых планет, образование и статистические свойства метеоритов [2, 3, 4] и астероидов [5], входящих в состав астероидного пояса, прессование порошков, разрушение жидких капель [7, 6], разрушение скал [8, 9]. Во всех физических процессах фрагментация связана с внешними воздействиями на исходный фрагмент или среду, состоящую из фрагментов, приводящими к разрушению фрагментов на более мелкие фрагменты. Процесс дробления продолжается пока не будет израсходована подведенная извне энергия. Дробление возобновиться, если возобновить внешнее воздействие на эту среду.

Существует несколько возможных способов описания процессов дробления. Один из них, используемый в работе Колмогорова [1], основан на общих предположениях о вероятностях распада зерен на N - частей и доказательстве предельной теоремы о функции распределения по размерам. Этот путь приводит к нормально логарифмическому закону. Однако этот вывод базировался на равновероятности распада на N - частей независимо от размера зерна и ряде других математических ограничениях, практически не учитывающих коллективный характер дробления, а также физических условий, приводящих к разрушению зерен. Обобщение этой теоремы на случай вероятностей распада, зависящих от размеров зерен, отсутствует к настоящему времени.

Другой путь возникает при взгляде на процесс дробления, как обратный процессу слипания, т.е. коагуляции (см. например [10]). Тогда появляется возможность описания процесса дробления с помощью кинетического уравнения со "столкновительным" членом, описывающим дробление зерен. Именно на таком пути и был достигнут значительный прогресс. Используя линейные интегральные кинетические уравнения, описывающие распады со временем фрагментов на заданное число частей, были построены сначала простые модели каскадных процессов [11, 12, 13] и проанализированы их решения в зависимости от различных способов выбора правил деления и вероятностей распадов. Особенно детально были исследованы одномерные модели с распадами фрагментов на две части при постоянных вероятностях распадов и различные модификации этих моделей [14, 15, 16, 17, 18]. Были построены интересные обобщения этих моделей на многомерный случай [19, 20]. Предложены и проанализированы обобщения на нелинейные кинетические уравнения [21]. Введены модели с "замороженными" фрагментами, не участвующими в последующем дроблении [22].

Основная физическая сложность таких подходов связана с обоснованием выбора вероятностей и правил распада зерен в коллективной среде. Следует отметить, что попытки вычисления этих вероятностей из термодинамических соображений (если они вообще применимы) требуют достаточно детального анализа сильно взаимодействующих зерен, например, под внешней нагрузкой. Вычисление даже локальных сил, действующих на некоторое зерно в такой среде, трудно осуществимо. С другой стороны, высокая чувствительность решений кинетического уравнения к заданию вероятностей распада означает, по сути, эквивалентность задания вероятностей распада заданию вида функции распределения. Поэтому этот путь в силу отсутствия физических принципов, определяющих вероятности распада, трудно признать физическим основанием для теории дробления.

Существуют также подходы к теории фрагментации - вычисления функции распределения по разме-

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ 2000. №1.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (2), с. 238-242.

рам из энтропийных принципов с использованием как энтропии Шенона, так и Тсалиса [23, 24, 25].

В работе используется другой кинетический подход к теории дробления [26], обобщенный на случай, когда поверхность разлома зерен фрактальна. По современным представлениям это наиболее часто реализуемый в природе случай [27]. В качестве характеристики таких поверхностей в работе используется фрактальная размерность D_F [28].

2. Описание процесса фрагментации

Прежде чем перейти к обсуждению фрагментации, задержимся на важном элементе теории - определении понятия фрагмента или зерна. Существует два свойства, позволяющих говорить о некотором физическом или математическом объекте, как о фрагменте. Во-первых, этот объект должен иметь конечную внутреннюю меру. В качестве таковой удобно представлять массу или объем. Во-вторых, он должен обладать границей, мера которой, также должна быть определена. В качестве меры границы можно понимать площадь поверхности фрагмента. Присутствие обоих этих свойств одинаково важно. Действительно, легко представить себе фрагменты одинакового объема и с разными площадями поверхностей, как и наоборот. Граница границы всегда нуль, и поэтому нет необходимости в ведении других геометрических мер для фрагмента. Наличие этих двух геометрических мер и есть центральным принципом теории фрагментации. С физической точки зрения, возможно существование и других уже не геометрических мер, характеризующих внутреннее состояние фрагмента. В процессе разрушения отдельного фрагмента на некоторое число более мелких фрагментов возможны два типа физического поведения: 1) когда внутренние состояния фрагментов не меняются, 2)когда претерпевают изменения и внутренние состояния фрагментов. Все существующие теории фрагментации ограничиваются естественным предположением об отсутствии изменения внутренних состояний фрагментов в процессе дробления. Такое предположение обосновано как простотой, так и реализуемостью этого случая в большом числе физических систем. Далее ограничимся также этим приближением. Две геометрические меры фрагментов при наличии не слишком больших отклонений в формах фрагментов не являются абсолютно произвольными и связаны, по крайней мере статистически, определенным соотношением. При этом существует выбор, какой параметр, характеризующий фрагмент, выбрать в качестве независимого. Это может быть одна из мер, например, масса фрагмента, или характерный размер фрагмента. Интуитивно ясно, что размер фрагмента определяет как его объем, так и его площадь поверхности. Именно последний выбор, возможно, не самый удобный, но более традиционный и будет использован в работе.

Следующее замечание касается роли времени в теории фрагментации. Хотя процессы фрагментации развиваются со временем, с физической точки зрения более естественно рассматривать в качестве времени энергию, затраченную на разрушение. Действительно процесс фрагментации развивается под внешним воздействием, при прекращении которого прекращается и разрушение фрагментов, хотя течение времени не прекращается. В определенном смысле связать фрагментацию со временем можно благодаря пересчету энергии, затраченной на разрушение, на соответствующий временной интервал. Однако более естественно использовать именно энергию в качестве физического "времени", в котором развивается процесс фрагментации.

В работе изучается фрагментация трехмерных зерен и в этом смысле ее можно отнести к многомерной теории фрагментации. Основное предположение, используемое для этого, сводится к гипотезе о слабом различии форм фрагментов. Это означает, что возникающие при фрагментации фрагменты имеют близкие характерные масштабы по всем направлениям, или более точно, статистически подобны. Другими словами при фрагментации *одновременно* в реализациях не присутствуют фрагменты, близкие к кубическим или сферическим формам с "иглоподобными" фрагментами, имеющими сильную анизотропию размеров в различных направлениях. Разумеется, случай анизотропных фрагментов при подобии их форм легко учесть, выбирая в качестве характерного масштаб, например максимальный. Такое предположения кажется естественным, хотя возможно и потребуется его уточнение для некоторых специальных физических систем.

Итак, рассмотрим эволюцию зерен при дроблении в среде, состоящей из большого числа зерен. Конкретный механизм разрушения на данном этапе несущественен. Важно только, что дробление происходит в результате подвода энергии извне (например, за счет внешней нагрузки, удара и т.п.). Введем огрубленное описание свойств такой среды, используя функцию распределения $f(R,E)$ в пространстве размеров зерен. Функция распределения $f(R,E)$ определяет число зерен в среде $dN = f(R,E)\,dR$ с характерными размерами в интервале $(R, R+dR)$ после вложения в среду энергии E, затраченной на разрушение зерен.

Более детально обсуждаются общие свойства фрагментов, т. е. рассматривается наиболее общий случай, когда возникающие в процессе фрагментации зерна обладают фрактальной поверхностью. В качестве основной характеристики фрактальной поверхности зерен используется её фрактальная размерность D_F (в частности, случай гладких поверхностей соответствует $D_F = 2$). Устанавливается связь между радиусом фрагмента R, его объемом и поверхностью.

Предложенная теория дробления основывается на использовании законов сохранения, заведомо справедливых для процессов разрушения (или фрагментации) в системах самой различной природы. Это закон сохранения вещества при дроблении и баланс между притоком энергии извне и энергией, затрачиваемой на образование новой поверхности (поверхности разломов) зерен. Роль второго закона сохранения (баланса энергии) фундаментальна, так как этот закон неявно доопределяет неизвестную скорость дробления зерен. Из этих законов сохранения получена система уравнений, описывающая эволюцию функции распределения зерен по размерам с изменением вложенной в систему энергии. Эта система уравнений решается методом введения *лагранжевых переменных*, в данном описании это переменные (R_0, E). Полученное решение полностью описывает эволюцию функции распределения зерен по размерам в зависимости от затраченной на разрушение энергии E, однако с точностью до двух неизвестных начальных функций $f_0(R_0)$ и $\gamma_0(R_0)$:

$$f(R,E) = f_0(R_0)\left\{\frac{R_0}{R}\right\}^{7-D_F} \times \\ \times\left\{1+\frac{E}{3}\left[\gamma_0(R_0)(3-D_F) - R_0\frac{\partial\gamma_0(R_0)}{\partial R_0}\right]\right\}^{-1} \quad (1)$$

где $f(R,E)$ - функция распределения фрагментов в лагранжевых переменных. Входящая в выражение (1) функция $f_0(R_0)$ является первоначальным распределением фрагментов по размерам до начала дробления, а $\gamma_0(R_0)$ определяет начальную скорость дробления фрагментов. Произвол в выборе $\gamma_0(R_0)$ имеет глубокую физическую природу. Причина этого связана с существованием различных механизмов дробления или, точнее, типов материалов, которые могут разрушаться по различным сценариям. Эти сценарии определяются более частными отличиями в структуре дробящихся материалов. На эти процессы влияет много различных факторов, например, различия в прочности материалов, в их дефектной структуре, кристаллической и поликристаллической, и много других. Поэтому общая теория должна содержать некоторый произвол, позволяющий при его фиксации выбирать различные сценарии дробления, например, характерное число образуемых при разрушении фрагментов. Именно такая свобода в выборе частных сценариев становится допустимой благодаря вхождению неопределенной функции $\gamma_0(R_0)$.

Существуют некоторые общие естественные ограничения на $\gamma_0(R_0)$, позволяющие сделать качественные выводы о характере ее поведения. Прежде всего, естественное требование $\gamma_0(0) = 0$ (невозможность разрушения зерен нулевого размера). В силу положительной определенности $\gamma_0(R_0)$ (отсутствие слипания), она - монотонно возрастающая функция в области малых масштабов R_0. В крупномасштабной области $\gamma_0(R_0)$ - монотонно убывающая функция. К этому выводу можно прийти, исходя, например, из энергетических соображений. Действительно, разрушение крупных зерен требует больших затрат энергии в силу больших поверхностей разломов, образующихся при их разрушении.

3. Универсальные асимптотики функции распределения в крупномасштабной области

Детальный анализ функции распределения по размерам требует знания функции $\gamma_0(R_0)$. В принципе, это означает необходимость построения более детальной теории, уже основанной на конкретных механизмах разрушения с учетом структурных свойств разрушаемых материалов, или проведение экспериментальных исследований этой функции. Однако описанный выше качественный характер поведения $\gamma_0(R_0)$ позволяет сделать важные выводы об асимптотических свойствах функции распределения по размерам в крупномасштабной области. Далее, рассмотрим более близкие к реальным распределения зерен по размерам. В частности, в таких системах обычно существует такой размер $R_{0\max}$, зерен с размером больше которого в среде нет. В силу описанного выше поведения $\gamma_0(R_0)$ окрестность $R_{0\max}$ является наиболее медленно эволюционирующей. Кроме этого, с увеличением E малая окрестность $R_{0\max}$ расширяется, захватывая все большую часть масштабов. Количественно такое расширение определяется значением производной $\gamma_0'(R_{0\max})$. В этом и состоит основная причина формирования нетривиальных асимптотик функции распределения в крупномасштабной области.

При этом возникают два качественно различных физических режима.

1) Первый случай соответствует медленной эволюции максимального масштаба с E и условие его реализации

$$\gamma_0(R_{0\max}) >> R_{0\max}\frac{\partial\gamma_0}{\partial R_0}/_{R_0=R_{0\max}}. \quad (2)$$

Далее будем называть этот случай *эволюционным*. Легко доказать, что при выполнении условия (23) асимптотика функции распределения в главном порядке примет следующий вид

$$f(R,E) \approx f_0(R_{0\max})\left\{\frac{R_{0\max}}{R}\right\}^4 \times \\ \times\left[1-\frac{R_{0\max}\gamma_0'(R_{0\max})}{\frac{3}{E}+\gamma_0(R_{0\max})(3-D_F)}\right]^{-1} \sim R^{-4}. \quad (3)$$

Следует отметить, что при выполнении условия $(3-D_F)E\gamma_0\left(R_{0\max}\right)/3 >> 1$ численный коэффициент в асимптотическом законе (3) стабилизируется и теряет зависимость от энергии E.

2) Другой предельный случай реализуется при выполнении условия

$$\gamma_0\left(R_{0\max}\right) << R_{0\max} \frac{\partial \gamma_0}{\partial R_0} / R_0 = R_{0\max} . \tag{4}$$

Условно будем называть его *не эволюционным* случаем. Основанием для этого служит малость $\gamma_0\left(R_{0\max}\right)$, которая и определяет скорость изменения максимального масштаба с увеличением E. Асимптотический вид функции распределения в крупномасштабной области в главном порядке также легко получить

$$f(R,E) \approx f_0\left(R_{0\max}\right)\left\{\frac{R_{0\max}}{R}\right\}^{7-D_F} \times \left\{1-\frac{E}{3} R_{0\max}\, \gamma_0{}'\left(R_{0\max}\right)\right\}^{-1} \sim R^{D_F-7} . \tag{5}$$

Зависимость численного коэффициента от E в этом режиме сохраняется на всех этапах эволюции в отличие от предыдущего случая.

Таким образом, в крупномасштабной области при дроблении возникают два типа универсальных асимптотических режима. Особенно интересно подчеркнуть, что в случае, когда крупный масштаб дробится, степень асимптотики не зависит от фрактальной размерности поверхностей разлома объектов и является универсальной для всех типов разрушаемых материалов. В не эволюционном случае показатель степени асимптотического закона (5) зависит от фрактальной размерности поверхности зерен и поэтому характер поведения в области крупных зерен отличается для различных типов материалов. Ширина области, в которой наблюдаются такие асимптотические законы, расширяется с увеличением вкладываемой энергии E, идущей на дробление зерен.

4. Заключение

В заключение обсудим некоторые экспериментальные наблюдения, связанные с процессом фрагментации. Прежде всего, следует отметить, что полученные асимптотики функции распределения по размерам фрагментов могут быть легко переформулированы в терминах функции распределения по массам фрагментов. В некоторых экспериментах измеряются именно такие функции распределения. Такая переформулировка соответствует просто замене переменных $m \sim R^3$. Полученные асимптотики принимают в этих переменных следующий вид:

$$f(m,E) \sim m^{-2}, \tag{6}$$

$$f(m,E) \sim m^{-\frac{9-D_F}{3}} . \tag{7}$$

Первая соответствует *эволюционному* случаю, вторая - *не эволюционному* случаю. Иногда используются и интегральные функции $P(m,E) = \int_m^\infty f(m,E)\,dm$, естественно, асимптотики для которых легко получить из приведенных выше формул (6) и (5). Одним из установленных экспериментально фактов, имеющих отношение к процессам фрагментации, являются данные, полученные на дробильных установках, которые используются в технологических целях. Экспериментально доказано, что после нескольких сотен часов работы дробильных машин формируется распределение фрагментов по размерам $f(R,E) \sim R^{-4}$ [30, 2], хорошо известное в технике как "закон дробления". Протекающие в них процессы подобраны так, чтобы разрушать крупномасштабные фрагменты, и, следовательно, соответствуют эволюционному случаю. С этой точки зрения, предсказания теории находятся в хорошем согласии с экспериментальными наблюдениями.

Другим примером, который соответствует этому случаю, служит формирование распределения метеоритов по размерам (см. [2, 3, 4]). Экспериментально установлено, что $f(R) \sim R^{-\nu}$, где $\nu = 4 \pm 0.9$. В этой работе для определения показателя ν использовались данные по наблюдениям и находкам упавших метеоритов. Распределение астероидов по размерам также хорошо согласуется с законом $f(R,E) \sim R^{-4}$ [5].

Априори кажется очевидным реализуемость именно эволюционного случая в процессе дробления метеоритов и астероидов. Действительно, основной механизм разрушения связан со столкновениями крупных фрагментов. При столкновении крупных метеоритов их разрушение очевидно. Однако вероятность столкновения двух крупных метеоритов мала. А столкновение крупного метеорита с мелкими метеоритами может не приводить к их разрушению. Поэтому требуются более детальные теоретические исследования для выяснения того, какой из двух вариантов реализуется в действительности. Если реализуется не эволюционный случай (5), распределение метеоритов по размерам должно иметь более высокую степень чем 4, $f(R,E) \sim R^{-(7-D_F)}$, и быть ближе к 5 при не очень больших значениях размерности $D_F \cong 2$. Экспериментальные измерения показателя степени ν для метеоритов сталкиваются с большими техническими трудностями. Большая погрешность в его измерении препятствует определению из экспериментальных данных, какой из предложенных случаев реализуется в природе. Интересно отметить, что случай, соответствующий $f(R,E) \sim R^{-4}$ или (6), наблюдается во многих с физической точки зрения, совершенно разных системах. Например, он характерен для распределения городов по числу жителей или фирм по числу служащих (данные соответствуют интегральной функции $P(m) \sim \frac{1}{m}$) [31, 32, 33]. Большое число примеров наблюдения этого степенного закона для различных систем приведено в [34]. Возможно, что появление такой асимптотики, основанное на общих законах сохранения, и объясняет его широкую распространенность в различных физических процессах.

Литература

1. А.Н.Колмогоров //ДАН СССР, 1941, т.31, с.99.
2. G.S.Hawkins// Astron. J., 1960, vol.65, №5, p.318.
3. G.S.Hawkins //Astron. J., 1959, vol.64, p.450.
4. H.Brown //J. of Geophys. Res., 1960, vol. 65, №6, p.1679.
5. G.P.Kuiper, Y.Fumita, T.Gehrels, I.Groeneveld, J.Kent, G.Van Biesbroeck, C.J.Van Houten // Astrophys. J. *Supplement,* 1958, vol.32, №3, p.289.
6. B.L.Holian, E.D. McGrady // Phys.Rev. Lett., 1988, vol.60, p.1355.
7. R.Shinnar // J. Fluid Mech., 1961 vol.10, p.259.
8. J.J.Gilvarry // J.Appl.Phys., 1961, vol.32, p.391.
9. L.Austin, K.Shoji, V.Bhatio, K.Savage, R.Klimpel //Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 1976, vol.15, p.187.
10. K.Binder// Phys. Rev., 1977, vol.B15, p.4425.
11. E.W.Montroll, R.Simba //J.Chem.Phys., 1940, vol.8, p.721.
12. A.Cherlesby// Proc.R.Soc. London Ser.A ,1954, vol.224, p.120.
13. R.M.Ziff, E.D.McGrady// J.Phys.A, 1985, vol.18, p.3027.
14. G.J.Rodgers, M.K.Hassan//Phys.A 1996,vol.223, p.19.
15. Z.Tavassoli, A.E.Shirvani// arXiv:cond-mat/0003092.
16. G.J.Rodgers, M.K.Hassan// Phys.Rev.E, 1994, vol.50, p.3458.
17. A.F.Filipov// Theor.Prob.Appl.(USSR) 1961, vol.6, p.275.
18. T.A.Bak, K.Bak// Acta. Chem. Scand.,1959, vol 13, p.1997.
19. P.L.Krapivsky, E.Ben-Naim// Phys.Rev.E.,1994, vol. 50, p.3502.
20. .P.Sinyh, M.K.Hassan// Phys.Rev.E, 1996, vol.53, p.3134.
21. Z.Cheng, S.Redner// Phys.Rev.Lett., 1988, vol.60, p.2450.
22. P.L.Krapivsky, I.Grosse, E.Ben-Naim// Phys.Rev.E, 2000, vol.61, p.R993.
23. X.Li, R.S.Tankin// Combust. Sci. and Tech., 1987, vol.56, p.65.
24. R.Englman, N.Rivier, Z.Jaeger// Phil.Mag., 1987, vol.56, p.751.
25. O.Solongo-Costa, A.H.Rodriguez, G.J.Rodgers //arXiv: cond-mat/0002339.
26. Р.З.Сагдеев, В.В.Яновский, А.В.Тур //ДАН СССР, 1987, т.294, с.1105.
27. R.S.Sayles, T.R.Tomas //Nature, 1978, vol.271, p.431.
28. Е.Федер, Фракталы. М: "Мир", 1991.
29. В.Ю.Гончар, А.В.Тур, В.В.Яновский, Кинетика случайных фракталов// Проблемы твердого тела. Киев: "Наука", 1991, с.118-129.
30. A.Gaudin, Principles of Mineral Dressing, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1944.
31. С.Д.Хайтун, Наукометрия. М: "Наука", 1983.
32. И.Разумнова// Наука и жизнь, 1990, №5, с.3.
33. G.K.Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort* (Addison-Wesley, Cambridge, 1949).
34. Б.А.Трубников// Природа, 1993, №11, с.3.