УДК 533.9

О ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.И. Колосов, Е.Н. Мазур, А.В. Чалый
Харьковская государственная академия городского хозяйства, Харьков, Украина

В представленной работе рассматривается возможность применения теории полуупорядоченных пространств к исследованию нелинейных задач математической физики, описывающих различные процессы, происходящие в нелинейных средах. Предлагается метод исследования нелинейных краевых задач математической физики, основанный на результатах теории нелинейных операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Данный метод позволяет строить искомое решение краевой задачи путем последовательных приближений, в том числе и с двусторонними приближениями.

В современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи физики плазмы, гидро- и газодинамики, теории химических реакций и др.

В связи с постановкой новых задач возникает необходимость разработки новых подходов в исследовании нелинейных задач математической физики, являющихся математическими моделями процессов в нелинейных средах.

Один из эффективных методов исследования задач математической физики состоит в построении подходящих автомодельных (инвариантных) решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ).

А.А.Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов путем построения и анализа автомодельных решений исследуют задачи для квазилинейных уравнений [1].

При этом многие из указанных задач для параболических уравнений приводятся к краевым задачам со свободной границей для ОДУ, в которых требуется определить как искомую функцию, так и величину интервала, на котором рассматривается задача.

Для ряда прикладных краевых задач для ОДУ характерно то, что одна или несколько из производных решения задачи может сохранять знак на всем интервале исследования. Это относится к таким задачам, как задача Томаса – Ферми из статистической теории атома, задачи Лагерстрема и Фокнера – Скэн из гидродинамики, задачи химической кинетике и ряду других. Среди перечисленных краевых задач имеются задачи на заданном отрезке (конечном или бесконечном), а также задачи со свободной границей.

Все подобные задачи могут быть эффективно исследованы в единой объединяющей их схеме краевых задач со свободной границей.

Кроме того, условие сохранения знака одной из производных решения позволяет сузить множество искомых решений задачи (для ряда прикладных задач такое решение единственно, как, например, для задачи Фокнера – Скэн).

Указанные выше задачи, а также ряд задач для эллиптических дифференциальных уравнений могут быть конструктивно исследованы следующим путем.

Краевая задача тем или иным способом (например, с помощью функции Грина) преобразуется к эквивалентному ей нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна:

$$u(x) = \int_{\Omega} F(x,s,u(s))ds\,, \tag{1}$$

которое в дальнейшем рассматривается как нелинейное операторное уравнение

$$u = Au \tag{2}$$

в некотором полуупорядоченном пространстве.

Методы теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах, разработанные школой М.А. Красносельского [2], позволяют доказывать существование решения уравнения (2) и строить двусторонние приближения, сходящиеся к решению.

Достигается это в том случае, когда оператор A из уравнения (2) обладает следующими свойствами:

а) A – гетеротонный оператор;

б) AK⊂K, где K – конус неотрицательных функций в некотором пространстве функций (например, пространстве C);

в) для оператора A существует сильно инвариантный отрезок $<\overline{u},\overline{v}>$ в конусе K;

г) оператор A является псевдовогнутым;

д) оператор A непрерывен (вполне непрерывен) на указанном выше конусном отрезке.

Последовательные приближения решения уравнения (2) строятся по классической схеме

$$u_{n+1} = Au_n\,, \quad (n = 0,1,\ldots). \tag{3}$$

В качестве u_0 берем концы конусного отрезка $<\overline{u},\overline{v}>$ и получаем приближения, двусторонним образом сходящиеся к решению уравнения (2).

Необходимо отметить, что для нелинейных краевых задач, которые являются математическими

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ 2000. №1.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (2), с. 234-237.

моделями реальных процессов, условия а) – д) для оператора А выполнимы.

Более подробно остановимся на следующем классе краевых задач со свободной границей для ОДУ [3]:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad t_0 < t < t_*,$$
$$x^{(s)}(\tau_s) = a_s, \ (\tau_s \in \{t_0, t_*\}, \tau_p = t_*),$$
$$x^{(p)}(t_0) = a, \qquad (4)$$

$$x^{(p+h)}(t) > 0 \ (< 0) \quad (t_0 < t < t_*),$$
$$\left(s = \overline{0, n-1};\ p \in \left\{\overline{0, n-2}\right\},\ h = \overline{1, n-p-1}\right)$$

где $f:]t_0, t_*[\times R^n \to R$.

Под решением задачи (4) понимаем пару

$$(x(t), t_*) \in C^{(n-1)}[t_0, t_*] \cap C^{(n)}\,]t_0, t_*[\times]t_0, \infty],$$

где x(t) удовлетворяет дифференциальному уравнению, краевым условиям и условиям выпуклости.

Можно показать, что краевой задаче (4) соответствует эквивалентная ей система нелинейных интегральных уравнений

$$\varphi_j(z) = \left|a_{p+j}\right|^{\frac{1}{k_j}} + \operatorname{sgn} x^{(p+j)} \cdot \operatorname{sgn} x^{(p+j+1)} \cdot \frac{1}{k_j} \int_{C_{p+j}}^{z} \frac{\varphi_{j+1}^{k_j+1}(\omega)}{\varphi_j^{k_j-1}(\omega)}\, dt[\varphi], \qquad (5)$$

$$\varphi_{n-p-1}(z) = \left|a_{n-1}\right|^{\frac{1}{k_{n-p-1}}} + \operatorname{sgn} x^{(n-1)} \cdot \frac{1}{k_{n-p-1}} \int_{C_{n-1}}^{z} \frac{(f[\varphi])(\omega)}{\varphi_{n-p-1}^{k_{n-p-1}-1}(\omega)}\, dt[\varphi],$$

$$dt[\varphi] = \operatorname{sgn} x^{(p+1)} \cdot \varphi_1^{-k_1}(z)\, dz, \quad \left(j = \overline{1, n-p-2}\right),$$

которую в дальнейшем будем рассматривать как операторное уравнение

$$\varphi = A\varphi. \qquad (6)$$

Здесь

$$x^{(p+h)}(z) \equiv \operatorname{sgn} x^{(p+h)} \cdot \varphi_h^{K_h}(z), \qquad (7)$$

где $\varphi_h \geq 0$, $0 < K_h < 1$, $h = \overline{1, n-p-1}$.

В дальнейшем уравнение (6) исследуется как операторное уравнение в полуупорядоченном пространстве.

Если система интегральных уравнений (5) имеет решение, то и задача (4) имеет решение:

$$x^{(p+h)}(z) \equiv \operatorname{sgn} x^{(p+h)} \cdot \varphi_h^{K_h}(z),$$

$$x^{(r)}(z) = a_r + \operatorname{sgn} x^{(p+1)} \cdot \int_{C_r}^{z} \frac{x^{(r+1)}(\omega)}{\varphi_1^{K_1}(\omega)}\, d\omega, \qquad (7)$$

$$x^{(p)}(z) \equiv z,$$

$$t(z) = t_0 + \operatorname{sgn} x^{(p+1)} \cdot \int_a^z \frac{d\omega}{\varphi_1^{K_1}(\omega)},$$

$$t_* = t(a_p),$$

$$\left(r = \overline{0, p};\ h = \overline{1, n-p-1};\ C_r = x^{(p)}(\tau_r)\right).$$

К задачам вида (4) может быть отнесена следующая краевая задача

$$x'' = \frac{x^{3/2}}{t^{1/2}},$$

$$x(0) = 1, \ x(t_*) = 0, \ x'(t_*) = -a \leq 0, \qquad (8)$$
$$x'(t) < 0 \quad (0 < t < t_*),$$

известная в статистической теории атома как задача Томаса – Ферми.

Положив $x' = -\varphi^{1/2}(x)$, приведем задачу (8) к следующему интегральному уравнению

$$\varphi(x) = (A\varphi)(x) \equiv a^2 + 2\int_0^x \sigma^{3/2} \cdot \left[\int_\sigma^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)}\right]^{-1/2} d\sigma, \qquad (9)$$

где $t(x, a) = \int_x^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega, a)}, \quad (0 \leq x \leq 1),$

$$t_*(a) = \int_0^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega, a)}.$$

Можно показать, что при любом $a \geq 0$ оператор А обладает свойствами:

1) оператор А монотонен в конусе К неотрицательных функций в С [0, 1];
2) существует инвариантный для А конусный отрезок $<\bar{u}, \bar{v}> \subset K$:

   $A<\bar{u}, \bar{v}> \subset <\bar{u}, \bar{v}>$;
3) оператор А u_0 – вогнутый в К.

Справедлива [3] :

Теорема 1. При каждом $a \geq 0$ краевая задача (8) имеет единственное решение, которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему.

Исследование уравнения (9) наиболее сложно при а = 0 (случай свободных нейтральных атомов). В этом случае $t_* = \infty$.

Хорошо известно, что бесконечность интервала, на котором рассматривается задача, составляет существенную сложность как при качественном, так и при численном решении соответствующих задач.

В рамках задачи (4) может быть исследована и следующая задача из магнитной гидродинамики

$$x''' + \alpha \cdot x \cdot x'' + \beta \cdot (1 - x'^2) + \gamma(1 - x') = 0,$$
$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x'(\infty) = 1, \qquad (10)$$

$x''(t) > 0, \quad (0 < t < \infty)$,

где коэффициенты α, β - гидродинамические характеристики погранслоя, γ - характеристика напряженности магнитного поля.

При $\gamma = 0$ имеем известную задачу Фокнера – Скэн из теории гидродинамического ламинарного погранслоя [3].

Теорема 2. При каждом $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma \ge 0$, $\beta\cdot\gamma \ne 0$ задача (10) имеет единственное решение, которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему.

При теоретических исследованиях влияния на сплошную среду граничных режимов с обострениями рассматривается следующая краевая задача со свободной границей [1]

$$x'' = \frac{f(t)}{x^{\nu}}, \quad 0 < t < t_*, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$x(0) = a, \quad x(t_*) = x'(t_*) = 0, \tag{11}$$

$$x'(t) < 0, \quad 0 < t < t_*.$$

Среди задач (11) особый интерес вызывает та, в которой

$$f(t) = t^{-p}, \quad (p>0), \tag{12}$$

и которая рассматривается при исследовании эффектов локализации и образования структур в газовой динамике.

Задача (11), (12) приводится к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$\varphi(z) = A\varphi(z) = \frac{2}{\lambda}\int_0^z \left(\int_s^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)} \right)^{-p} \cdot \frac{ds}{s^{\nu}}, \tag{13}$$

где $x(t) = a\,z(t)$, $a^{1+\nu} = \lambda$,

$(z')^2 = \varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$.

Исследование уравнения (13) приводит к следующему утверждению [4].

Теорема 3. При любых $a > 0$, $0 < \nu < 1$, $0 < p < 2$ задача (11), (12) имеет единственное решение, которое может быть получено путем двусторонних приближений, сходящихся к нему.

Задача (11), (12) численно реализована при $a = 2$, $\nu = \frac{1}{2}$, $p = \frac{2}{3}$. Результаты двусторонних приближений, полученных при десяти итерациях приведены в таблице 1, где φ и ψ - нижние и верхние приближения решения уравнения (13), а $\underline{t}$ и $\overline{t}$ - нижние и верхние приближения $t(x)$ – обращения $x(t)$ – решения задачи (11), (12).

Таблица 1.

x	φ	ψ	$\underline{t}$	$\overline{t}$
0,000000	0,000000	0,000000	0,99938	0,99980
0,001000	0,044726	0,044928	0,99309	0,99350
0,010401	0,145596	0,145849	0,96299	0,96336
0,100000	0,473531	0,473939	0,80287	0,80315
0,200000	0,700363	0,700916	0,67226	0,67249
0,300000	0,896732	0,897357	0,56027	0,56046
0,400000	1,084646	1,085328	0,45973	0,45989
0,500000	1,275122	1,275863	0,36760	0,36773
0,600000	1,477601	1,478407	0,28229	0,28239
0,700000	1,704285	1,705179	0,20291	0,20299
0,800000	1,977257	1,978299	0,12906	0,12913
0,900000	2,355493	2,356968	0,06086	0,06090
0,990094	3,135440	3,137824	0,00544	0,00545
0,999000	3,502619	3,507458	0,00052	0,00053
1,000000	3,958221	3,983256	0,00000	0,00000

Рассмотрим такую задачу [5]:

$$x'' = -\frac{\gamma}{t}\cdot x' + x - x^{\lambda}, \quad (0 < t < \infty),$$

$$x'(0) = 0, \quad x(\infty) = 0, \tag{14}$$

$$x'(t) < 0, \quad (0 < t < \infty),$$

где γ и λ - действительные числа, $\lambda > 0$.

Эта задача возникает в нелинейной теории поля при исследовании взаимодействия элементарных частиц.

Задача (14) приводится к задаче вида (4) и исследуется так же, как и предыдущие задачи.

Справедливо утверждение [5]:

Теорема 4. Пусть $\gamma > 0$, $\lambda > 1$. Тогда

1) существует единственное решение задачи (14);
2) возможно построение двусторонних приближений к этому решению.

Численно реализован случай, когда $\gamma = \frac{1}{3}$, λ=2.

Результаты двадцати итераций приведены в таблице 2.

Таблица 2.

x	φ	ψ	$\underline{t}$	$\overline{t}$
0,00001	0,000000	0,000000	12,51316	12,56084
0,00106	0,000001	0,000001	7,93296	7,94970
0,01051	0,000115	0,000115	5,69924	5,70571
0,10000	0,009689	0,009690	3,47433	3,47477
0,20000	0,034733	0,034735	2,75335	2,75377
0,30000	0,068726	0,068730	2,30530	2,30570
0,40000	0,105105	0,105114	1,96436	1,96475
0,50000	0,137243	0,137259	1,67721	1,67758
0,60000	0,158469	0,158494	1,41804	1,41839
0,70000	0,162084	0,162118	1,16962	1,16995
0,80000	0,141369	0,141408	0,91471	0,91500
0,90000	0,089588	0,089622	0,62224	0,62249
0,99002	0,010590	0,010595	0,18823	0,18832
0,99903	0,001066	0,001066	0,05901	0,05904
0,99999	0,000011	0,000011	0,00601	0,00601
1,00000	0,000000	0,000000	0,00000	0,00000

Наконец, отметим, что методы теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах позволяют исследовать и краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений и строить для них двусторонние приближения.

Математической моделью задачи о течении среды, которая проводит электрический ток в цилиндре с непроницаемыми стенками является следующая нелинейная краевая задача

$$\begin{aligned} &\Delta u + e^{-u} = 0 \qquad \forall\, t \in \Omega, \\ &u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ &u(t) \geq 0 \qquad \forall\, t \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\Omega = \{(t_1, t_2) \mid 0 < t_1 < a;\ 0 < t_2 < b\}$.

Задача (15) приводится к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$u(t) = \int_{\Omega} G(t,s) e^{-u(s)} ds\ , \tag{16}$$

где G(t,s) – функция Грина первой краевой задачи.

Исследование уравнения (16) приводит к следующему утверждению [6]:

Теорема 5. Задача (15) имеет единственное решение, которое может быть получено с помощью двусторонних приближений.

Численно реализован случай, когда a = 0,50; b = 0,25.

Результаты десяти итераций приведены в таблице 3.

Литература

1. А.А Самарский., В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.

2.М.А.Красносельский, П.П.Забрейко. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975.

3. А.И. Колосов. Нелинейные краевые задачи со свободной границей для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики; автореф. докт. дисс., М. ИПМ им. М.В. Келдыша, 1991.

4. А.И.Колосов, Е.Н.Мазур О двусторонних приближениях в решении некоторых нелинейных задач теории локализации и образования структур в газовой динамике.// Докл. НАН Украины, 1999, № 6, с. 22 – 25.

5. А.И. Колосов, Е.Н. Мазур Об одной сингулярной краевой задаче, возникающей в нелинейной теории поля. //Докл. НАН Украины, 1998, № 11, с. 34

6. С.В.Колосова, А.В.Чалый. О двусторонних приближениях положительных решений одного класса нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений. //Докл. НАН Украины, 1999, № 11, с. 28

Таблица 3.

	t_1						
t_2	0	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,50
0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
0,025	0 0	0,000795 0,002205	0,001629 0,003308	0,001810 0,003515	0,001629 0,003308	0,000795 0,002205	0 0
0,075	0 0	0,002011 0,004242	0,004033 0,007135	0,004487 0,007691	0,004033 0,007135	0,002011 0,004242	0 0
0,125	0 0	0,002390 0,004813	0,004838 0,008329	0,005994 0,009018	0,004838 0,008329	0,002390 0,004813	0 0
0,175	0 0	0,002011 0,004242	0,004033 0,007135	0,004487 0,007691	0,004033 0,007135	0,002011 0,004242	0 0
0,225	0 0	0,000795 0,002205	0,001629 0,003308	0,001810 0,003515	0,001629 0,003308	0,000795 0,002205	0 0
0,250	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0