УДК 621.396.67

ДИНАМИКА СИСТЕМ ПРИ ВТОРИЧНЫХ РЕЗОНАНСАХ С НИЗКОЧАСТОТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В.А. Буц

Национальный Научный Центр "Харьковский физико-технический институт" 61108, Харьков, Украина

Исследована динамика гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии слабого низкочастотного периодического возмущения. В нулевом приближении по величине возмущения степени свободы рассматриваемой системы изолированы. В первом приближении эти степени свободы резонансно связаны. Показано, что наличие низкочастотного возмущения, которое действует на такую связанную систему, приводит к возникновению стохастической неустойчивости. Кроме того, показано, что низкочастотное возмущение может приводить к развитию параметрической неустойчивости. Показано, что при наличии возмущения, зависящего от времени, корректный анализ даже малых колебаний требует учета нелинейных характеристик системы

Известно, что вторичные резонансы могут играть существенную роль в динамике гамильтоновых систем только при достаточно большой величине возмущения (смотри, например, [1]). Действительно, если величина возмущения мала ($\varepsilon << 1$), то величина эффектов, связанных со вторичными резонансами, малы (например, ширина вторичных нелинейных резонансов) и пропорциональны $1/(1/\varepsilon)!$. Ниже мы покажем, что при наличии низкочастотного возмущения вторичные резонансы с ним могут играть значительно более существенную роль.

Постановка задачи и общие уравнения

Рассмотрим динамику системы с двумя степенями свободы, которая имеет следующий гамильтониан:

$$H = H_0(\vec{J}) + \varepsilon \cdot H_1(\vec{J},\vec{\theta},t) . \qquad (1)$$

Будем считать, что возмущение периодично по угловой переменной и представляется в виде ряда

$$: \qquad H_1 = \sum_{k,m} h_{k,m}(\vec{J},t)\cdot \exp\left(i\vec{n}\vec{\theta}\right),$$

где $\vec{n}\cdot\vec{\theta} = k\theta_1 + m\theta_2$.

Пусть между невозмущенными системами существуют резонансные соотношения $s_1\cdot\omega_1 = s_2\cdot\omega_2$, где s_k -- целые числа, $\omega_k = \partial H_0 / \partial J_k$. Следуя резонансной теории возмущений для перехода к новым каноническим переменным, воспользуемся следующей производящей функцией

$$W(\vec{\theta},\vec{I}) = \left(s_1\theta_1 - s_2\theta_2\right)I_1 + I_2\theta_2 . \qquad (2)$$

Обратим внимание, что производящая функция явно не зависит от времени. Используя эту функцию, получим следующее выражение для нового гамильтониана

$$\overline{H}(\vec{I},\vec{\Psi}) = \overline{H}_0(\vec{I}) + \varepsilon\cdot \sum_{k,m} h_{k,m}(\vec{I},t) \cdot \exp\left[i\left(\frac{k}{s_1}\Psi_1 + \left(k\cdot\frac{s_2}{s_1} + m\right)\cdot\Psi_2\right)\right]. \qquad (3)$$

Здесь $\vec{I}, \vec{\Psi}$ -- новые канонические переменные. Причем, новая угловая переменная $\Psi_1 = s_1\theta_1 - s_2\theta_2$ является медленно меняющейся. Угловая переменная $\Psi_2 = \theta_2$ остается быстрой. Усредним гамильтониан (3) по быстрой угловой переменной. Будем считать при этом, что коэффициенты в ряду разложения возмущения обладают следующей симметрией $h_{-k,m} = h_{k,-m}$, то есть возмущение действительно. Тогда усредненный гамильтониан приобретет вид:

$$\overline{H} = H_0(\vec{I}) + \varepsilon\cdot\sum_m h_{-ms_1, ms_2} \cdot\cdot 2\cdot\cos\left(m\Psi_1\right). \qquad (4)$$

Динамика систем без вырождения

Пусть $\vec{I}_0$ -- значения действий, при которых условие резонансов выполняется точно. Разложим члены в (4) в малой окрестности этих действий. Ограничиваясь только главными членами, входящими в (4), получим следующее простое выражение для гамильтониана

$$\overline{H} = \left(\frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial I_1^2}\right)_{\left(\vec{I}_0\right)} \cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\Delta I\right)^2 + + 2\varepsilon\cdot h_{-s_1,s_2}(\vec{I}_0,t)\cdot\cos\Psi_1. \qquad (5)$$

Здесь учтено, что I_2 является интегралом. Поэтому $\Delta I = I_1 - I_{10}$. Гамильтониан (5) представляет собой стандартный гамильтониан, в котором коэффициенты зависят от времени. Динамика системы, которая имеет гамильтониан (5) описывается следующим уравнением математического маятника:

$$\ddot{\Psi}_1 + \omega_B^2 \cdot \sin \Psi_1 = 0 \ , \qquad (6)$$

где $\omega_B^2 = -2\varepsilon \cdot h_{-s_1, s_2} (\vec{I}_0, t) \cdot \left(\dfrac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial I_1^2} \right)_{(\vec{I}_0)}$.

Выберем для определенности и простоты зависимость коэффициентов возмущения от времени в виде $h = h(\vec{I}_0)(1+\mu \cdot \cos \Omega t)$; $h \equiv h_{-s_1, s_2}$. При этом уравнение (6) можно представить в виде

$$\ddot{\Psi} + \sin \Psi = \frac{\mu}{2} \left[\sin(\Psi + \Omega_1 \tau) + \sin(\Psi - \Omega_1 \tau) \right] \ , \qquad (7)$$

где $\Psi \equiv \Psi_1$; $\tau = \omega_B t$; $\Omega_1 = \Omega / \omega_B$.

Динамика системы, которая описывается уравнением (7), характеризуется тремя нелинейными резонансами. Полуширина основного из них равна 2 ($\Delta \dot{\Psi} = 2$), двух других - $2\sqrt{\mu}$. Расстояние между этими нелинейными резонансами равно Ω_1. Отсюда следует, что при выполнении условия $\Omega_1 < 2(1+\sqrt{\mu})$ динамика системы становится хаотической. Из этого условия, в частности, следует, что если частота внешнего низкочастотного возмущения порядка или меньше частоты биения связанной системы (баунс - частоты), то динамика возмущенной системы будет всегда хаотической при любых значениях амплитуды возмущения.. Нужно, конечно, помнить, что характеристики этого хаотического движения, такие, например, как коэффициент диффузии, будут существенно зависеть от величины возмущения.

Обратим внимание еще на одну важную особенность динамики малых колебаний возмущенной системы. Как видно из уравнения (6), при малых амплитудах колебаний оно описывает динамику линейного маятника. Если частота возмущения такова, что выполняются условия параметрического резонанса $\Omega = 2\omega_B$, то внешнее низкочастотное возмущение вызовет параметрическую неустойчивость. Амплитуды колебаний при этом будут экспоненциально нарастать с инкрементом $\sim \mu$.

Динамика систем с вырождением

Выше мы рассмотрели невырожденный случай, то есть случай, когда вторая производная от невозмущенного гамильтониана не равна нулю. Этот случай соответствует случаю зависимости невозмущенной частоты от величины действия. Рассмотрим теперь динамику системы, обладающей вырождением. Для такой системы $\left(\partial^2 \overline{H}_0 / \partial I^2\right)_{(I_0)} = 0$. В этих условиях, как известно, под действием малого возмущения одинаково мало меняются как величина действия, так и угловая переменная. Разложим выражение для гамильтониана (4) в малой окрестности тех точек, которые соответствуют стационарным точкам в отсутствии явной зависимости от времени. При этом будем производить разложение не только по переменной действия, но и по угловой переменной. Получаемый при этом гамильтониан соответствует гамильтониану линейного маятника. Уравнения движения этого маятника удобно записать в виде

$$\dot{\varphi} = A(t) \cdot j; \ \ \dot{j} = B(t) \cdot \varphi \ , \qquad (8)$$

где $\varphi \equiv \Psi - \Psi_0$ - малое отклонение угловой переменной от стационарного состояния; $j \equiv I_1 - I_{10}$ - малое отклонение переменной действия от значения, которое соответствует точному резонансу;

$$A = \left[\partial^2 h_{00} \big/ \partial I_1^2 + 2 \cdot \partial^2 h_{-s_1, s_2} / \partial I_1^2 \right];$$

$$B = 2h_{-s_1, s_2} .$$

Из (8), в частности, следует, что если отношение коэффициентов A и B не зависит от времени ($A / B = const \equiv c$), то система (8) имеет дополнительный интеграл - $\varphi^2 - c \cdot j^2 = const$.

. В этом случае система (8) полностью интегрируется. Параметрические неустойчивости в ней не развиваются. Если же отношение коэффициентов A и B зависит от времени, то система (8) эквивалентна обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с меняющимися во времени коэффициентами:

$$\ddot{z} + \left[-AB + \left(\dot{A} / 2A\right)^2 + \ddot{A} / 2A \right] \cdot z = 0 , \qquad (9)$$

где $z = \Psi / \sqrt{A}$.

Из уравнения (9) видно, что при определенных значениях параметров возмущения возможна параметрическая неустойчивость.

Связанные линейные осцилляторы

Важным примером вырожденных систем являются линейные системы. В качестве примера такой системы рассмотрим систему, представляющую собой два связанных между собой линейных осциллятора. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2} \left[a_k \cdot p_k^2 + b_k \cdot q_k^2 \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k=1}^{2} \left[\alpha_k(t) \cdot p_k^2 + \beta_k(t) \cdot q_k^2 \right] + \qquad (10) \\ & + \varepsilon \cdot \left[c(t) \cdot p_1 \cdot p_2 + d(t) \cdot q_1 \cdot q_2 \right]. \end{aligned}$$

Первая сумма в (10) описывает систему двух независимых осцилляторов. Вторая сумма описывает малое возмущение этих независимых осцилляторов. Третье слагаемое в (10) описывает малую связь между осцилляторами. Перейдем от канонических переменных $\vec{p}$ и $\vec{q}$ к новым каноническим переменным - действиям $\vec{J}$ и углам $\vec{\theta}$. Для такого перехода воспользуемся следующей производящей функцией

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2} R_i \cdot q_i^2 \cdot ctg\theta_i \ ,$$

где $R_i = \sqrt{b_i / a_i}$.

Чтобы связь между линейными осцилляторами была эффективной необходимо, чтобы их невозмущенные частоты совпадали. Поэтому ниже мы будем считать, что выполнены условия (условия резонанса) $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \omega^2$. Гамильтониан (10) в переменных действия - угол будет иметь вид гамильтониана (1). Производя в этом гамильтониане те же действия, которые мы проводили выше при переходе от гамильтониана (1) к усредненному гамильтониану (4), получим

$$\overline{H} = \omega \cdot I_2 + \frac{\varepsilon}{4}\left[\begin{array}{l} I_1 \cdot \left(\alpha_1 \cdot R_1 + \beta_1 / R_1\right) + \\ +\left(I_2 - I_1\right) \cdot \left(\alpha_2 \cdot R_2 + \beta_2 / R_2\right) \end{array}\right] +$$

$$+ \varepsilon \sqrt{I_1 \cdot \left(I_2 - I_1\right)} \left[c \cdot \frac{b_1 \cdot b_2}{\omega^2} + d \cdot \frac{\omega^2}{b_1 \cdot b_2} \right] \cdot \qquad (11)$$

$$\cdot \cos \Psi_1 .$$

Легко увидеть, что соответствующая ему система обыкновенных дифференциальных уравнений типа (8) такова, что отношение ее коэффициентов A и B не зависит от времени ($A / B = const \equiv c$).

Таким образом, система связанных линейных осцилляторов, которая описывается гамильтонианом (10) приобретает под действием возмущения, зависящего от времени, сложную временную динамику. Однако, в ней не могут реализоваться условия для параметрической неустойчивости под действием внешнего низкочастотного возмущения.

Следует иметь в виду, что описание системы с помощью линейной аппроксимации в большинстве случаев оправдывается только малостью изучаемых отклонений. При достаточно больших отклонениях на динамику системы начинают существенное влияние оказывать нелинейные особенности этой системы. Однако, как видно из проведенного выше анализа движения системы связанных линейных осцилляторов и сравнения этой динамики с динамикой малых отклонений нелинейной системы (смотри формулы (8) и (9)), факт малости анализируемых отклонений может оказаться недостаточным, чтобы систему можно было анализировать в линейном приближении. Действительно, как мы видели выше, в общем случае отношение коэффициентов A и B зависит от времени . В этом случае динамика даже малых колебаний связанных нелинейных осцилляторов может существенно отличаться от динамики, которая следует из анализа динамики линейных осцилляторов. Действительно, уравнение (9) описывает динамику малых отклонений нелинейной системы. Это уравнение линейное. Однако оно содержит существенные члены, которые порождены нелинейностью системы. В частности, решениями уравнения (9) при соответствующих параметрах могут быть параметрически нарастающие функции. Таких решений мы не получим, если при анализе динамики связанных осцилляторов будем сразу исходить из гамильтониана (10).

Литература

1. А. Лихтенберг, М. Либерман Регулярная и стохастическая динамика. Москва, «Мир», 1984