УДК 533.9

10π-КИНК И КОНЦЕПЦИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО СКЛЕИВАНИЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ВИХРЕЙ

А.С.Малишевский, В.П.Силин, С.А.Урюпин
Физический Институт им. П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия

В рамках подхода Обри-Волкова, когда связь плотности джозефсоновского тока с разностью фаз волновых функций куперовских пар имеет пилообразный вид, дано описание структуры и дискретного спектра собственных скоростей свободного движения бегущего 10π-кинка. В наиболее интересной области скоростей движения 10π-кинка близких к скорости Свихарта установлена зависимость дискретного спектра скоростей от набора двух чисел, определяющих число длин волн Свихарта, захваченных кинком. Захваченные волны локализованы в двух областях, одна из которых вложена в другую. При этом, во внутренней области имеет место интерференция захваченных волн, которая определяет как структуру кинка, так и скорость его движения. Показано, как захваченные волны Свихарта склеивают пять отдельных 2π-кинков в единый 10π-кинк. Именно благодаря существованию своеобразного клея волн Свихарта открывается возможность существования сложных кинков.

1. Введение

Интерес к исследованию мультикинков, несущих несколько квантов магнитного потока, возник сравнительно давно [1,2]. Экспериментальная работа [1] поставила перед теорией задачу получения 10π-кинка – синхронизированной структуры пяти обычных джозефсоновских вихрей, каждый из которых несет единичный квант магнитного потока. Эта задача до сих пор была не разрешена.

В последние годы в связи с разработкой нелокальной электродинамики джозефсоновских переходов получен ряд новых результатов в теории мультикинков в таких бездиссипативных переходах, для которых плотность тока связана с разностью фаз φ соотношением $j(\varphi) = j_c \sin\varphi$, где j_c - критическая плотность тока Джозефсона. В частности, в работах [3-5] дано описание 4π-кинка применительно к переходам с большой критической плотностью тока, когда джозефсоновская длина λ_j оказывается меньше лондоновской длины λ. Используя применимое для переходов с небольшой критической плотностью тока приближение слабой нелокальности в уравнении разности фаз, дано как численное [6], так и аналитическое [7] описание монотонного 4π-кинка. В этом же приближении предложено численное описание немонотонного 4π-кинка и монотонного 6π-кинка [8].

Существенное продвижение в теории мульти-кинков оказалось возможным в рамках подхода Обри-Волкова [9-12], когда связь плотности джозеф-соновского тока с разностью фаз волновых функций куперовских пар имеет пилообразный вид [13]

$$j(\varphi) = j_c\left\{\frac{\varphi}{\pi} - 2I\left[\frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right]\right\}, \qquad (1.1)$$

где $I[x]$ - целая часть числа x. В рамках такого подхода в работах [14-16] дано описание структуры свободно движущихся 4π, 6π и 8π - кинков. В этих работах показано, что существование счетного множества мультикинков обусловлено явлением черенковского захвата обобщенных волн Свихарта, которые обеспечивают фазовое согласование отдельных 2π-кинков и образование единого мультикинка.

В настоящем сообщении, следуя предложенной в [16] общей схеме описания сложных мультикинков, дано описание структуры и дискретного спектра скоростей 10π-кинка. Подчеркнем, что именно на существование 10π-кинков было указано в экспериментальной работе [1]. Теория таких кинков до сих пор оставалась неразработанной.

2. Основные соотношения

Основу рассмотрения вихрей, бегущих с постоянной скоростью v, составляет уравнение для разности фаз $\varphi(z,t) = \psi(z - vt) \equiv \psi(\zeta)$, которое имеет вид [16]

$$\psi - 2\pi I\left[\frac{\psi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] + \left(\frac{v}{\omega_j}\right)^2 \psi''(\zeta) = = \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda}\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' K_0\left(\frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda}\right)\psi'(\zeta'). \qquad (2.1)$$

где K_0 - функция Макдональда, а частота ω_j и длина λ_j связаны с критической плотностью тока соотношениями

$$\omega_j \equiv 4\sqrt{|e| j_c d/\varepsilon\hbar}\,, \quad \lambda_j \equiv c\sqrt{\hbar/|e|\lambda j_c}\,/4, \qquad (2.2)$$

$\hbar$ - постоянная Планка, $2d$ - ширина несверхпроводящего слоя, ε - его диэлектрическая постоянная, $-|e|$ - заряд электрона, c - скорость света.

Остановимся на рассмотрении 10π-кинка, для которого на бесконечности выполнены условия $\psi(-\infty) = 0$ и $\psi(+\infty) = 2\pi n$. Кроме того, в соответствии с формулой (1.1), будем считать, что распределение разности фаз 10π-кинка удовлетворяет следующим условиям согласования:

$$\begin{gathered}\psi(-\zeta_2) = \pi, \psi(-\zeta_1) = 3\pi, \psi(0) = 5\pi, \\ \psi(\zeta_1) = 7\pi,\ \psi(\zeta_2) = 9\pi.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда, следуя предложенной в [16] общей схеме построения решений вида 2πn-кинк, из (2.1) и (2.3) находим для 10π-кинка следующее решение:

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_2) + \psi_{2\pi,m}(\zeta + \zeta_1) \\ &+ \psi_{2\pi,m}(\zeta) + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_1) + \psi_{2\pi,m}(\zeta - \zeta_2) + \\ &+ \psi_w(\zeta, \zeta_1) + \psi_w(\zeta, \zeta_2).\end{aligned} \tag{2.4}$$

В (2.4) функции вида

$$\psi_{2\pi,m} \equiv \pi + \pi[1 - f(\zeta)]\,\mathrm{sign}\,\zeta \tag{2.5}$$

описывают монотонную зависимость разности фаз, характерную для одного 2π-кинка, а функции вида

$$\begin{aligned}\psi_w(\zeta, \zeta_s) \equiv 2\pi C \cos[k_0(|\zeta| - \zeta_s)]\,\mathrm{sign}\,\zeta \times \\ \times [\theta(-\zeta + \zeta_s) - \theta(-\zeta - \zeta_s)]\end{aligned} \tag{2.6}$$

описывают осцилляции разности фаз, обусловленные волнами Свихарта, локализованными внутри интервала $[-\zeta_s, \zeta_s]$ и имеющими волновое число $k_0(v)$. Специально следует подчеркнуть, что k_0 является действительным решением уравнения

$$k^2 v^2 = \omega^2(k) = \omega_j^2 + \frac{k^2 v_s^2}{\sqrt{1 + k^2\lambda^2}},$$

которое представляет собой резонансное условие черенковского излучения и поглощения волн Свихарта со спектром $\omega(k)$ вихрем, равномерно движущимся со скоростью v, $v_s \equiv \omega_j \lambda_j$ - скорость Свихарта. В (2.5), (2.6) $\theta(\zeta)$ - функция Хэвисайда, а $\mathrm{sign}\,\zeta$ - знаковая функция. Решение вида (2.4)-(2.6) реализуется только тогда, когда выполнены условия согласования (2.3)

$$\cos k_0\zeta_1 + \cos k_0\zeta_2 = -\frac{1}{2}, \tag{2.7}$$

$$f(\zeta_2 - \zeta_1) + f(\zeta_2) + f(\zeta_1 + \zeta_2) + f(2\zeta_2) = C, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}f(\zeta_1) + f(2\zeta_1) + 2f(\zeta_1 + \zeta_2) + f(\zeta_2) + f(2\zeta_2) = \\ = 4C\cos^2[k_0(\zeta_2 - \zeta_1)/2].\end{aligned} \tag{2.9}$$

Явный вид функции $f(\zeta)$ и параметра C зависит от отношения λ/λ_j и от отношения v/v_s. Далее ограничимся рассмотрением условий, характерных для джозефсоновских переходов с небольшой критической плотностью тока, когда

$$\lambda << \lambda_j, \tag{2.10}$$

Примем также, что скорость 10π-кинка близка к скорости Свихарта

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda_j} << 1 - \left(\frac{v}{v_s}\right)^2 << 1. \tag{2.11}$$

В этих условиях для $f(\zeta)$ и C имеют место соотношения [16]:

$$C \cong \varepsilon^2, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}f(\zeta) &\cong (1 - \varepsilon^2)\exp\left[-2^{1/4}|\zeta|\sqrt{\varepsilon/\lambda\lambda_j}\right] = \\ &= (1 - \varepsilon^2)\exp\left[-|\zeta|/\lambda_j\sqrt{1 - (v/v_s)^2}\right],\end{aligned} \tag{2.13}$$

где использовано обозначение для зависящего от скорости v малого параметра

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda_j}\frac{1}{1 - (v/v_s)^2}. \tag{2.14}$$

Этот же параметр определяет волновое число захваченных вихрем волн Свихарта

$$k_0 \cong \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\varepsilon\lambda\lambda_j}} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}\sqrt{1 - (v/v_s)^2}. \tag{2.15}$$

Из общего вида решения (2.4)-(2.6) следует, что на внутреннем отрезке $[-\zeta_1, \zeta_1]$ имеет место интерференция захваченных волн. Возникающая в результате интерференции волновая часть разности фаз описывается выражением

$$4\pi C\,\mathrm{sign}\,\zeta\cos\left[\frac{k_0}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)\right]\cos\left[k_0\left(|\zeta| - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right)\right]. \tag{2.16}$$

Согласно (2.16) амплитуда колебаний функции ψ на внутреннем отрезке существенно зависит от числа длин волн $2\pi/k_0$, укладывающихся на отрезке длиной $\zeta_2 - \zeta_1$.

3. Решение уравнений согласования

В соответствии с неравенствами (2.10) и (2.14) необходимо найти решение уравнений согласования (2.7)-(2.9) при следующих значениях малого параметра ε:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda_j} << \varepsilon << 1. \tag{3.1}$$

Для таких ε при построении приближенного решения уравнений согласования достаточно удержать в левых частях (2.8), (2.9) лишь главные слагаемые $f(\zeta_2 - \zeta_1)$ и $f(\zeta_1)$. Далее, принимая во внимание явный вид $f(\zeta)$ (2.13) и C (2.12), с учетом соотношения (2.15) и малости ε из (2.8), (2.9) имеем

$$\exp[-\varepsilon k_0(\zeta_2 - \zeta_1)] = \varepsilon^2, \tag{3.2}$$

$$\exp[-\varepsilon k_0\zeta_1] = 4\varepsilon^2\cos^2\left[\frac{k_0}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)\right]. \tag{3.3}$$

Отсюда находим размеры областей захвата волн в зависимости от величины параметра ε:

$$k_0\zeta_1 = -\frac{2}{\varepsilon}\ln\left[2\varepsilon\left|\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|\right], \tag{3.4}$$

$$k_0\zeta_2 = -\frac{2}{\varepsilon}\ln\left[2\varepsilon^2\left|\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|\right]. \quad (3.5)$$

Вследствие малости ε как на внутреннем отрезке длиной $2\zeta_1$, так и на внешнем отрезке длиной $\zeta_2 - \zeta_1$ укладывается большое число длин волн $2\pi/k_0$. Соотношения (3.4), (3.5) и (2.7) позволяют записать одно уравнение для определения параметра ε:

$$\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\cos\left\{\frac{2}{\varepsilon}\ln\left[2\varepsilon^{3/2}\left|\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|\right]\right\} = -\frac{1}{4}. \quad (3.6)$$

Наличие в левой части (3.6) периодических функций указывает на возможность большого числа решений. Эти решения существуют при условии, что

$$\left|4\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right| \geq 1. \quad (3.7)$$

Имея в виду это замечание и вводя дискретное число n, являющееся мерой числа длин волн, укладывающихся на отрезке длиной $\zeta_1 + \zeta_2$, из (3.6) имеем

$$-\frac{2}{\varepsilon}\ln\left[2\varepsilon^{3/2}\left|\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|\right] = \pi n + \pi\frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{n+1}\arccos\left[\frac{1}{4\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right]. \quad (3.8)$$

В соответствии с неравенствами (3.1) число n должно быть достаточно большим

$$1 \ll n \ll \frac{3\sqrt{2}\lambda_j}{\pi\lambda}\ln\left(\frac{\lambda_j}{\lambda}\right), \quad (3.9)$$

хотя и ограниченным сверху. Для таких значений n из (3.8) находим

$$\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \cong -1 + \frac{1}{2\varepsilon^3}\exp(-\pi n\varepsilon). \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) имеет решения, если

$$\cos^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{4\varepsilon^3}\exp(-\pi n\varepsilon) \leq 1. \quad (3.11)$$

Вводя еще одно дискретное число p, характеризующее число полуволн на внутреннем отрезке длиной $2\zeta_1$, из (3.10) находим

$$\frac{2}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon} = \pi(2n - p) + \pi\frac{1+(-1)^p}{2} + (-1)^{p+1}\arccos\left(1 - \frac{e^{-\pi n\varepsilon}}{2\varepsilon^3}\right). \quad (3.12)$$

Поскольку параметр ε удовлетворяет неравенствам (3.1), то число $2n - p$ может изменяться в интервале

$$1 \ll 2n - p \ll \frac{2\sqrt{2}\lambda_j}{\pi\lambda}\ln\left(\frac{\lambda_j}{\lambda}\right). \quad (3.13)$$

Левое неравенство (3.13) позволяет записать приближенное решение уравнения (3.12) в виде

$$\varepsilon \cong \frac{1}{\pi\left(n - p/2\right)}\ln\left[\pi\left(n - p/2\right)\right] \ll 1. \quad (3.14)$$

При этом, в соответствии с определением (2.14), находим следующий закон, характеризующий собственные значения скоростей свободного движения 10π-кинка:

$$\frac{v}{v_s} \cong 1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\lambda_j}\frac{\pi\left(n - p/2\right)}{\ln\left[\pi\left(n - p/2\right)\right]}. \quad (3.15)$$

Как видно из (3.15), при фиксированном значении p скорость вихря уменьшается с увеличением номера n. Напротив, если n - задано, а увеличивается p, то скорость вихря также увеличивается. В соответствии с условиями применимости (3.7), (3.11) как уравнения (3.12), так и его приближенного решения (3.14), при заданном n число p может изменяться в интервале от целой части $4n/3 - \left(4n\ln 2/9\ln(\pi n/3)\right)$ до целой части $4n/3 + \left(4n\ln 2/9\ln(\pi n/3)\right)$. В том случае, когда p близко к своему минимальному значению, в результате интерференции на внутреннем отрезке устанавливаются колебания с наибольшей амплитудой (2.16), (3.4), (3.5) порядка $4\pi\varepsilon^2$. Напротив, при максимально возможном p амплитуда колебаний минимальна и составляет $\pi\varepsilon^2$. Отметим, что вне интервала интерференции захваченных волн их амплитуда равна (2.6), (2.12) $2\pi\varepsilon^2$.

4. Структура 10π-кинка

В соответствии с общим видом решения (2.4)-(2.6) и соотношениями (2.12), (2.13), (2.15) структура и свойства 10π-кинка однозначно определяются величиной параметра $\varepsilon(v)$, который зависит от набора двух чисел n и p (3.14). Базируясь на результатах третьего раздела, обсудим более детально структуру 10π-кинка. Согласно соотношениям (2.5), (2.13), (2.15) функции $\psi_{2\pi,m}$ локализованы в окрестности точек 0, $\pm\zeta_1$ и $\pm\zeta_2$ на расстоянии

$$L_m = 2^{-1/4}\sqrt{\lambda\lambda_j/\varepsilon} = \lambda_j\sqrt{1 - (v/v_s)^2} = 1/k_0\varepsilon \gg 1/k_0, \quad (4.1)$$

где $\lambda_0 \equiv 2\pi/k_0$ - длина волны захваченных волн Свихарта. Очевидно, что L_m представляет собой тот размер, который подобен размеру обычного движущегося 2π-кинка в теории, базирующейся на уравнении синус-Гордона. В свою очередь расстояние между точками 0, ζ_1 и ζ_2 (3.4), (3.5) и (3.16) характеризуется формулами:

$$\zeta_1 = \frac{1}{k_0}\left(\pi n - \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \cong \pi p/2k_0 >> 1/k_0\varepsilon = L_m, \quad (4.2)$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{1}{k_0}\frac{2}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon} \cong \frac{\pi}{k_0}(2n - p) >> 1/k_0\varepsilon = L_m. \quad (4.3)$$

Имея в виду такие соотношения между длинами, характеризующими распределение разности фаз, и принимая во внимание малость амплитуды захваченных волн Свихарта, можно сделать следующее утверждение о структуре полученного нами 10π-кинка. Именно, 10π-кинк представляет собой пять отдельных 2π-кинков, локализованных вблизи точек 0, $\pm\zeta_1$ и $\pm\zeta_2$ на расстоянии порядка L_m и разнесенных друг от друга на расстояния много больше L_m. Характерные расстояния между 2π-кинками сравнимы по величине и составляют $\cong 2\pi n/3k_0$. Отдельные 2π-кинки склеиваются в единый 10π-кинк благодаря захвату волн Свихарта в промежутки между кинками. Хотя амплитуда захваченных волн сравнительно мала, но именно эти волны позволяют синхронно склеивать отдельные 2π-кинки и обеспечивают в существенной мере приближенно монотонную структуру единого 10π-кинка.

Из-за малости амплитуды захваченных волн мал и их вклад в полную энергию 10π-кинка. В рассматриваемых условиях энергия движущегося 10π-кинка в основном аддитивно складывается из энергии отдельных движущихся синхронно 2π-кинков

$$W \cong 5\,W_{2\pi}\Big/\sqrt{1 - (v/v_s)^2}, \quad (4.4)$$

где $W_{2\pi} \equiv \phi_0^2/32\pi\lambda\lambda_j$ - энергия покоящегося 2π-кинка, ϕ_0 - квант магнитного потока.

Структура магнитного поля единого 10π-кинка с большой точностью определяется суммой магнитных полей почти эквидистантно разнесенных отдельных 2π-кинков, которые слабо промодулированы захваченными волнами Свихарта. Подчеркнем, что отдельные свободные 2π-кинки в рассматриваемой модели не обладают возможностью свободного движения. Напротив, будучи черенковски склеенными волнами Свихарта, комплексы 2π-кинков движутся свободно.

В заключение следует отметить, что в настоящем сообщении для длинного бездиссипативного джозефсоновского перехода впервые получен 10π-кинк в виде когерентной структуры 2π-кинков, обычных джозефсоновских вихрей. В то же время подчеркнем, что получен лишь один вариант склеивания 10π-кинка из 2π-кинков, в то время как в экспериментальной работе [1] обсуждаются и другие варианты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-02-16076) , Государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00-15-96720) и при поддержке Научного совета по сверхпроводимости (задание «Вихри Абрикосова-Джозефсона»).

Литература

1. B. Dueholm, O.A. Levring, J. Mygind, N.F. Pedersen, O.H. Soerensen, M. Cirillo Multisoliton excitations in long Josephson junctions // Physical Review Letters, 1981, vol. 46, p. 1299.
2. M. Peyrard, M.D. Kruskal Kink dynamics in the highly discrete sine-Gordon system // Physica D., 1984, vol. 14, p. 88.
3. Yu.M. Aliev, V.P. Silin Travelling 4π-kink in nonlocal Josephson electrodynamics // Physics Letters A, 1993, vol. 177, p.259.
4. Ю.М. Алиев, В.П. Силин Нелокальная джозефсоновская электродинамика //ЖЭТФ, 1993, т.104. с. 2526.
5. В.П. Силин, С.А. Урюпин Вихри Абрикосова-Джозефсона в слоистой туннельной структуре // ЖЭТФ, 1995, т. 108, с. 2163.
6. G.L. Alfimov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin, N.V.Mitzkevich Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions // Chaos., 1993, vol. 3, p. 405.
7. V.P .Silin, A.V. Studenov About 4π-kink in a Josephson junction // Physics Letters A, 1999, vol. 264, p. 324.
8. G.L. Alfimov, V.M. Eleonsky, L.M. Lerman Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations // Chaos, 1998, vol. 8. p. 257.
9. S. Aubry, P.J. Le Daeron // Physica D, 1983, vol. 7, p. 240.
10. S. Aubry Exact models with a complete Devil's staircase // Journal of Physics C, 1983, vol. 16. p. 2497.
11. A.F. Volkov Josephson-like vortices in a layered superconductor. An analytically solvable model // Physica C, 1991, vol. 183. p. 177.
12. A.F. Volkov On the magnetization of layered superconducting structures in a parallel magnetic field // Physica C, 1992, vol. 192, p. 306.
13. K.K. Likharev. Superconducting weak links. //Reviews of Modern Physics, 1979 vol. 51. p. 101.
14. A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. 4π-kink vortices in long Josephson junctions // Physics Letters A, 1999, vol. 253, p. 333.
15. А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин Черенковский захват волн и дискретность движения 6π-кинков в длинном джозефсоновском переходе // Письма в ЖЭТФ, 1999, т. 69, с. 318.
16. А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин Склеивание джозефсоновских вихрей черенковски захваченными волнами Свихарта // ЖЭТФ, 2000, т. 117, с. 771.