УДК 533.9

ЧЕРЕНКОВСКИЙ РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ ВОЛН ВИХРЕВЫМИ СТРУКТУРАМИ В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ И КВАНТОВАННОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕЙ

А.С.Малишевский, В.П.Силин, С.А.Урюпин
Физический Институт им. П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия

С помощью допускающей аналитическое рассмотрение модели Обри-Волкова предлагается общий подход к описанию мультикинков, несущих несколько квантов магнитного потока и движущихся со скоростями близкими к скорости Свихарта. Последнее позволяет использовать обобщение оператора Д'Аламбера, учитывающее дополнительно только четвертую пространственную производную. В таком слабонелокальном обобщении джозефсоновской электродинамики, для которого оказывается возможным черенковское взаимодействие джозефсоновских вихрей с обобщенными волнами Свихарта, продемонстрировано, как черенковский резонанс обеспечивает наполнение пространства между обычными 2π-кинками захваченными волнами. Наличие захваченных малоамплитудных волн, создающих когерентную вихревую структуру, разрешает существование 2πn-кинков. Когерентность вихревых структур определяется, в частности, числом длин волн захваченных возмущений. Это проявляется в дискретности собственных значений скоростей свободного движения мультивихрей в длинном бездиссипативном джозефсоновском переходе.

Проблематика исследования мультисолитонных состояний в джозефсоновских переходах уже давно привлекает внимание исследователей. Так, в экспериментальной работе [1] приведены убедительные доказательства существования бунчированных состояний пяти элементарных джозефсоновских вихрей в длинных переходах. В работе [2] сообщалось о наблюдении вихревых структур несущих до девяти квантов магнитного потока. В то же время, теоретиками не было предложено аналитической схемы, позволяющей получать решения уравнений вихревой электродинамики, которые отвечали бы бегущим возмущениям, переносящим больше одного кванта магнитного потока.

Использование нелокальных уравнений джозефсоновской электродинамики [3] совместно с использованием аналитической модели Обри-Волкова (см. [4] и цитируемую там литературу) позволяет получить большое количество аналитических результатов для нелинейных бегущих волн [5,6]. В этих работах на примере джозефсоновских вихрей, несущих 2 и 3 кванта магнитного потока, теоретически предсказано явление черенковского захвата волн Свихарта движущимися вихрями. Свойства когерентных вихревых структур определяются числом длин волн укладывающихся на размерах мультикинка и изменяются дискретно с изменением числа захваченных длин волн.

Изначально предложенная для описания дислокаций, модель Обри-Волкова использует вместо обычной синусной зависимости плотности сверхпроводящего тока от разности фаз φ следующую периодическую кусочно-линейную функцию

$$j(\varphi) = j_c\left(\frac{\varphi}{\pi} - 2I\left[\frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right]\right),$$

где j_c - критическая плотность тока Джозефсона, $I[x]$ - целая часть числа x. Бегущие с постоянной скоростью v одномерные джозефсоновские вихри, для которых $\varphi(z,t) = \psi(z - vt) \equiv \psi(\zeta)$, в нелокальной электродинамике в рамках модели Обри-Волкова описываются уравнением

$$\psi - 2\pi I\left[\frac{\psi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] + \left(\frac{v}{v_s}\right)^2 \lambda_j^2 \psi''(\zeta) = \\ = \frac{\lambda_j^2}{\pi\lambda}\frac{d}{d\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' K_0\left(\frac{|\zeta - \zeta'|}{\lambda}\right)\psi'(\zeta'). \qquad (1)$$

Здесь K_0 - функция Макдональда, λ - лондоновская длина, $\lambda_j \equiv c\sqrt{\phi_0/\pi c\lambda j_c}/4$ - джозефсоновская длина, d - полуширина несверхпроводящего слоя. Наконец, $v_s \equiv \omega_j\lambda_j$ - скорость Свихарта, $\omega_j \equiv 4\sqrt{\pi c j_c d/\varepsilon\phi_0}$ - плазменная (джозефсоновская) частота, ε - диэлектрическая проницаемость несверхпроводящего слоя.

В так называемой локальной электродинамике, когда плотность тока Джозефсона не слишком велика

$$\lambda << \lambda_j, \qquad (2)$$

для вихрей, скорость которых близка к скорости Свихарта

$$\gamma^2 \equiv 1 - (v/v_s)^2 << 1, \qquad (3)$$

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ 2000. №1.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (2), с. 258-260.

уравнение (1) можно приближенно представить в виде:

$$\psi - 2\pi I\left[\frac{\psi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] = \gamma^2\lambda_j^2\psi''(\zeta) - \frac{\lambda^2\lambda_j^2}{2}\psi''''(\zeta). \tag{4}$$

Продуктивность использования уравнения, содержащего в правой части четвертую производную разности фаз, продемонстрирована в [7].

Построим решение уравнения (4), описывающее бегущий 2πn-кинк. Такое решение определяется граничными условиями на бесконечности: $\psi(-\infty) = 0$, $\psi(+\infty) = 2\pi n$ и следующим набором условий:

$$\psi(\xi_1) = \pi, \psi(\xi_2) = 3\pi, \ldots, \psi(\xi_n) = (2n-1)\pi. \tag{5}$$

Последнее позволяет записать

$$I\left[\frac{\psi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{n'=1}^{n}\theta(\zeta - \xi_{n'}).$$

Теперь уравнение (4) становится линейным, и при его решении можно использовать преобразование Фурье. Используя фурье-образ функции $\theta(\zeta - \xi_{n'})$

$$\pi\delta(k) - i\,exp(-ik\xi_{n'})\,\mathrm{V.P.}(1/k),$$

решение уравнения (4), описывающее бегущий 2πn-кинк, можно представить в виде:

$$\psi(\zeta) = \sum_{n'=1}^{n}\psi_{2\pi}(\zeta - \xi_{n'}), \tag{6}$$

где

$$\psi_{2\pi}(\zeta) \equiv \pi + \omega_j^2\,\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{k}}\frac{sin(k\zeta)}{\omega^2(k) - k^2v^2} + $$
$$+ \pi\omega_j^2\int_{-\infty}^{\infty}dk\,cos(k\zeta)\delta\left[\omega^2(k) - k^2v^2\right], \tag{7}$$

$$\omega^2(k) \equiv \omega_j^2 + v_s^2k^2 - \frac{1}{2}v_s^2\lambda^2k^4,$$

при этом $\omega(k)$ описывает спектр обобщенных волн Свихарта в пределе $\lambda k \ll 1$.

Возникшее в правой части уравнения (7) слагаемое с δ - функцией отвечает условию черенковского взаимодействия движущегося со скоростью v вихря и обобщенной волны Свихарта со спектром $\omega(k)$:

$$\omega^2(k) = k^2v^2. \tag{8}$$

Подчеркнем, что в стандартном подходе локальной джозефсоновской электродинамики, когда в правой части уравнения (4) оставляется только слагаемое со второй производной, а спектр волн Свихарта описывается законом $\omega^2(k) = \omega_j^2 + v_s^2k^2$, уравнение (8) не имеет действительных решений в области (3). Это означает, что в локальной электродинамике запрещено резонансное черенковское взаимодействие волн Свихарта с вихрями, скорости которых близки к скорости Свихарта, но меньше ее.

Интегралы, входящие в правую часть (7), могут быть вычислены в явном виде, однако для простоты записи формул мы ограничимся рассмотрением скоростей движения вихря, для которых помимо (3) выполнено условие

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda_j\gamma^2} \ll 1. \tag{9}$$

Очевидно, что для переходов с малой критической плотностью тока Джозефсона (2), неравенства (3) и (9) можно реализовать совместно.

В рамках выполнения (2), (3) и (9), можно представить $\psi_{2\pi}(\zeta)$ в виде:

$$\psi_{2\pi}(\zeta) \cong \pi + \pi\left[1 - (1 - \varepsilon^2)e^{-k_1|\zeta|}\right]sign\,\zeta + $$
$$+ 2\pi\varepsilon^2\,cos(k_0\zeta)\theta(-\zeta). \tag{10}$$

Здесь

$$k_1 = k_1(\varepsilon) \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\lambda\lambda_j}} = \frac{1}{\lambda_j\sqrt{1 - (v/v_s)^2}} \tag{11}$$

- модуль чисто мнимого корня уравнения (8), а

$$k_0 = k_0(\varepsilon) \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\lambda\lambda_j}} = \frac{k_1}{\varepsilon} \gg k_1$$

- модуль действительного корня уравнения (8).

В соответствии с (6), (10) и (11) монотонная часть разности фаз 2πn-кинка в области скоростей, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}\lambda_j} \ll \gamma^2 \ll 1, \tag{12}$$

имеет характерный масштаб изменения $\approx 1/k_1 = \lambda_j\sqrt{1 - (v/v_s)^2}$. Такой же масштаб, равный Лоренц-сокращенной джозефсоновской длине, имеют вихри в обычной локальной джозефсоновской электродинамике.

Вклад слагаемых, содержащих θ - функции в (10), в разность фаз (6) 2πn-кинка, отвечает обобщенным волнам Свихарта, черенковски взаимодействующим с движущимся вихрем. В области скоростей (12) длина таких волн Свихарта в $2\pi\varepsilon \ll 1$ раз меньше, чем размер, на котором изменяется монотонная составляющая разности фаз.

Согласно (10), функция (6) удовлетворяет граничному условию при $\zeta = +\infty$. Так как всегда можно положить $\xi_1 = -\xi_n$, то удовлетворение n условиям (5) позволяет определить величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и дискретный набор значений скорости v. При этом автоматически выполнится граничное условие при $\zeta = -\infty$.

Рассмотрим, к каким следствиям приведут условия (5), если $\xi_k = -\xi_{n+1-k}$, $k = 1,2,...,n$. Складывая все уравнения (5), получим:

$$\sum_{n'=1}^{n} \cos k_0 \xi_{n'} = 0. \qquad (13)$$

Это означает, что при $\zeta < \xi_1$ в разности фаз отсутствуют слагаемые, содержащие $\cos k_0(\zeta - \xi_{n'})$. Поэтому можно говорить, что свихартовские волны, резонансно взаимодействующие с вихрем, локализованы на интервале $[\xi_1, \xi_n]$. Иными словами, об области $[\xi_1, \xi_n]$ можно говорить как об области захвата обобщенных волн Свихарта, которые испущены вихрем и захвачены им в процессе своего движения, а сами волны называть черенковски захваченными волнами Свихарта. Необходимо подчеркнуть, что явление захвата малоамплитудных ($\varepsilon^2 << 1$) волн Свихарта возникает только при использовании подхода нелокальной джозефсоновской электродинамики. При этом использование нелокального описания необходимо даже для обычных джозефсоновских переходов, когда лондоновская длина много меньше джозефсоновской (2). Наконец, условие (13) и уравнение (10) означают, что разность фаз $2\pi n$-кинка (6) удовлетворяет граничному условию $\psi(-\infty) = 0$.

Уравнение (13) позволяет представить выражение (6) в следующем виде:

$$\psi(\zeta) = \pi \sum_{n'=1}^{n} \left\{1 + \left[1 - \left(1 - \varepsilon^2\right) e^{-k_1|\zeta - \xi_{n'}|}\right] \times \right.$$
$$\left. \times\, sign(\zeta - \xi_{n'})\right\} + \sum_{s=1}^{s(n)} \psi_w(\zeta, \zeta_s), \qquad (14)$$

где $\zeta_1 = -\xi_1 = \xi_n, \zeta_2 = -\xi_2 = \xi_{n-1}, ...,$

$$\psi_w(\zeta, \zeta_s) \equiv 2\pi\varepsilon^2 \cos k_0(|\zeta| - \zeta_s) sign\zeta \times$$
$$\times \left[\theta(-\zeta + \zeta_s) - \theta(-\zeta - \zeta_s)\right],$$

$s(n) \equiv \left[2n - 1 + (-1)^n\right]/4$. Первая сумма в (14) описывает монотонную часть разности фаз $2\pi n$-кинка и представляет собой сумму вкладов описывающих вихревую структуру отдельных элементарных вихрей; вторая сумма описывает осцилляционную зависимость и отвечает полю совокупности черенковски захваченных движущимся вихрем обобщенных волн Свихарта. При этом каждое слагаемое второй суммы описывает захваченные волны Свихарта на интервале $\Xi_s \equiv [-\zeta_s, \zeta_s]$.

На границах этого интервала производная функции $\psi_w(\zeta, \zeta_s)$ равна нулю, что означает отсутствие потока энергии свихартовских волн. При $n \geq 4$ возникает семейство вложенных друг в друга интервалов Ξ_s: $\Xi_1, \Xi_2 ...$, что указывает на возможность реализации интерференции волн Свихарта во "внутренних" интервалах, то есть во всех областях захвата Ξ_s с $s \geq 2$.

Подставляя (14) в условия согласования (5), получаем систему уравнений для определения размеров областей захвата и скорости вихря. Одно из этих уравнений – содержащее периодические функции уравнение (13) – мы уже использовали. В остальные уравнения также войдут периодические функции. Это сразу указывает на множественность решений уравнений согласования. А именно, состояние 2πn-кинка однозначно определяется заданием $s(n)$ «квантовых» чисел. Эти числа определяют количество длин захваченных волн, укладывающихся в областях $[-\zeta_s, \zeta_s]$, размеры этих областей, дискретный набор скоростей вихря и амплитуду поля возникшего в результате интерференции захваченных волн.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-02-16076) , Государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00-15-96720) и при поддержке Научного совета по сверхпроводимости (задание «Вихри Абрикосова-Джозефсона»).

Литература

1. B. Dueholm, O.A. Levring, J. Mygind, N.F. Pedersen, O.H. Soerensen, M. Cirillo Multisoliton excitations in long Josephson junctions // Physical Review Letters, 1981, vol. 46, p. 1299.
2. A.V. Ustinov, T. Doderer, R.P. Huebener, N.F. Pedersen, B. Mayer, V.A. Oboznov Dynamics of sine-Gordon solitons in the annular Josephson junction // Physical Review Letters, 1992, vol. 69, p.1815.
3. Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин К теории нелинейных диспергирующих волн в джозефсоновских контактах // Сверхпроводимость: физика, химия, техника , 1992, т. 5, с. 228.
4. A.F. Volkov On the magnetization of layered superconducting structures in a parallel magnetic field // Physica C, 1992, vol. 192, p. 306.
5. A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. 4π-kink vortices in long Josephson junctions // Physics Letters A, 1999, vol. 253, p. 333.
6. А.С. Малишевский, В.П. Силин , С.А. Урюпин Черенковский захват волн и дискретность движения 6π-кинков в длинном джозефсоновском переходе // Письма в ЖЭТФ, 1999, т. 69, . 318.
7. G.L. Alfimov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin, N.V.Mitzkevich Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions // Chaos., 1993, vol. 3, p. 405.