УДК 533.9

ДРЕЙФОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ И СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ИСКРИВЛЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ

Я.М. Соболев

Радиоастрономический институт НАН Украины, Харьков, Украина

sobolev@ira.kharkov.ua

Синхротронное излучение имеет широкое применение в лабораторной и астрофизической плазме. Если скорость дрейфа релятивистского электрона в искривленном магнитном поле сравнима с ларморовской скоростью, то существующие формулы синхротронного излучения требуют уточнения. Рассматривается излучение электрона, движущегося по спиральной траектории, навивающейся на искривленную магнитную силовую линию. Показано, что для получения правильных формул синхротронного излучения необходимо использовать траекторию, которая наряду с дрейфом учитывает наклон ларморовской окружности к магнитному полю. Получены формулы, имеющие в качестве предельных случаев синхротронное и изгибное излучение. Найдены спектрально-угловое распределение излучаемой энергии, спектральное распределение мощности излучения, поляризационные характеристики излучения.

1. Введение

Синхротронное излучение (СИ) имеет широкое применение в различных областях науки и техники. В плазменной электронике оно является средством исследования фундаментальных законов природы и создания новых приборов [1, 2]. Нетепловые спектры космических радиоисточников обязаны своим происхождением СИ. Для изгибного излучения, возникающего при движении ультрарелятивистских электронов с нулевым питч-углом в магнитосферах пульсаров, также используются формулы СИ в прямом и однородном магнитном поле с тем отличием, что радиус ларморовской окружности заменяется на радиус кривизны магнитной силовой линии [3].

Таким образом имеем два предельных случая: синхротронное излучение, когда релятивистский электрон движется под достаточно большим питч-углом к внешнему магнитному полю, и изгибное излучение, которое соответствует движению релятивистской частицы вдоль магнитной силовой линии с нулевым питч-углом. Промежуточный случай между этими двумя предельными случаями можно определить из условия того, что скорость дрейфа за счет кривизны магнитного поля сравнима с поперечной скоростью ларморовского вращения частицы. В этом случае в формулах излучения необходимо учитывать кривизну магнитной силовой линии. В работах [4,5] были выведены формулы излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся по спиральной траектории, навивающейся на искривленную магнитную силовую линию. В работе [4] рассмотрен случай синхротронно-изгибного излучения, в работе [5] — ондуляторно-изгибное излучение. Термин “изгибное” здесь добавлен для того, чтобы отличать формулы синхротронного и ондуляторного излучения в криволинейном магнитном поле от излучения в магнитном поле с прямыми магнитными силовыми линиями.

Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле можно представить в виде суммы движения ведущего центра и вращения по окружности вокруг него [6]. В работе [4] траектория электрона в магнитном поле с круговыми силовыми линиями заменяется ларморовской окружностью в системе отсчета ведущего центра, который движется с релятивистской скоростью вдоль силовой линии внешнего магнитного поля. При этом оказалось, что в промежуточной области питч-углов, для которой необходимо учитывать в формулах излучения кривизну магнитной силовой линии, интенсивности излучения σ- и π-поляризаций имеют различные весовые множители. Вместе с тем, как известно, траекторию частицы в окрестности некоторой точки можно заменить окружностью и применить формулы СИ для кругового движения [7], для которых σ- и π-поляризации имеют одинаковый вес в спектре излучения. Из-за чего возникает несоответствие результатов? Каков вид имеют правильные формулы излучения?

В настоящей работе проведено исследование поставленных вопросов.

Траектория заряженной частицы в магнитном поле с искривленными силовыми линиями находится путем разложения решений уравнений движения в ряды по малому отношению ларморовского радиуса r_{B} и радиуса R кривизны силовой линии внешнего магнитного поля и усреднения по быстрым движениям [8]. Получены решения с точностью до второго порядка по этому малому параметру. Траектория частицы состоит из дрейфовой траектории ведущего центра и ларморовской окружности, плоскость которой наклонена под малым углом (см. формулу (1)) к магнитной силовой линии.

Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (2), с. 27-30.

Излучаемая энергия находится путем вычисления плотности потока энергии в дальней зоне. Для получения правильных выражений интенсивности излучения оказалось необходимым учитывать наличие гармонического движения вдоль магнитной силовой линии. Учет дрейфа не приводит к правильным выражениям.

Потери энергии на излучение не учитываются.

2. Траектория частицы

Предполагается, что магнитные силовые линии имеют вид окружности радиуса R. Компонента скорости частицы вдоль магнитного поля $v_{\parallel} \to c$. Выберем декартову систему координат так, что магнитные силовые линии лежат в плоскости x y; ось магнитной поверхности лежит вдоль оси z. Направление продольной скорости частицы совпадает с направлением магнитного поля. Угловая скорость этого движения имеет величину $\Omega = v_{\parallel} / R$ и направлена против оси z. Величина магнитного поля постоянна.

Решение уравнений движения находим в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = r_{\mathrm{B}} / R \ll 1$, где r_{B} — ларморовский радиус, методом усреднения [8].

Радиус-вектор траектории частицы имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = &\left[\left(-2\delta \sin\omega_0 t + \varepsilon A_1 \sin 2\omega_0 t\right) r_{\mathrm{B}} \cos\Omega t + \left(R + \right.\right.\\ &\left.\left. + r_{\mathrm{B}} \cos\omega_0 t\right) \sin\Omega t\right]\mathbf{i} + \left[\left(2\delta \sin\omega_0 t - \varepsilon A_1 \sin 2\omega_0 t\right) r_{\mathrm{B}} \sin\Omega t\right.\\ &\left. + \left(R + r_{\mathrm{B}} \cos\omega_0 t\right)\cos\Omega t\right]\mathbf{j} + \left[v_{\mathrm{D}} t - (\omega_{\mathrm{B}} / \omega_0) r_{\mathrm{B}} \sin\omega_0 t\right.\\ &\left. + \varepsilon(\omega_{\mathrm{B}} / 2\omega_0)\delta^2 r_{\mathrm{B}} \sin 2\omega_0 t\right]\mathbf{k},\end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega_0^2 = \omega_{\mathrm{B}}^2 + 3\Omega^2$, $\omega_{\mathrm{B}} = eB / mc\gamma$, $\gamma \gg 1$ — лоренц-фактор, $\omega_0 = (e/|e|)|\omega_0|$, $\delta = \Omega / \omega_0$, $A_1 = -(\delta / 4)(1 - 4\delta^2)$, $v_{\mathrm{D}} = -\Omega^2 R / \omega_{\mathrm{B}} - \varepsilon^2 \omega_{\mathrm{B}} R C_0$ — дрейфовая скорость, $C_0 = \delta^2\left(3/8 - 2\delta^2\right)/\left(1 - 3\delta^2\right)$, **i, j, k** — орты декартовой системы координат. Отметим, что в выражении (1) не предполагается малость Ω по сравнению с ω_{B}.

В дальнейшем полагаем, что угловая скорость Ω значительно меньше циклотронной частоты ω_{B}, т.е. $\delta \ll 1$.

Как следует из выражения (1), движение заряженной частицы можно представить в виде движения ведущего центра по магнитной поверхности и движения по окружности в системе отсчета K', вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг оси z и движущейся вдоль нее с дрейфовой скоростью v_{D}. Ведущий центр движется по магнитной поверхности с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = R \sin\Omega t\,\mathbf{i} + R \cos\Omega t\,\mathbf{j} + v_{\mathrm{D}}\,\mathbf{k}. \tag{2}$$

Линия (2) составляет угол $a_{\mathrm{D}} = |v_{\mathrm{D}}|/v_{\parallel} = |\Omega / \omega_{\mathrm{B}}|$ с магнитной силовой линией. Для положительно (отрицательно) заряженной частицы траектория ведущего центра отклоняется в направлении отрицательных (положительных) значений координаты z. Вокруг ведущего центра частица движется по окружности радиуса r_{B}, но плоскость ларморовской окружности наклонена под углом $2|\delta|$ к плоскости перпендикулярной магнитной силовой линии. В формуле (1) наклон окружности описывается малым слагаемым, содержащим множитель $2\delta \sin\omega_0 t$. Учет этих слагаемых позволяет получить правильные формулы для СИ.

Скорость частицы равна

$$v = (\Omega^4 R^2 + v_{\mathrm{D}}^2 + \omega_{\mathrm{B}}^2 r_{\mathrm{B}}^2)^{1/2}. \tag{3}$$

Радиус кривизны траектории (1) равен

$$r_{\mathrm{C}} = v^2 / (\Omega^4 R^2 + \omega_{\mathrm{B}}^4 r_{\mathrm{B}}^2 + 2\Omega^2 R \omega_{\mathrm{B}}^2 r_{\mathrm{B}} \cos\omega_{\mathrm{B}} t)^{1/2}. \tag{4}$$

3. Синхротронно-изгибное излучение

Спектрально-угловое распределение излучаемой частицей энергии в дальней зоне (энергия излучаемая в телесный угол между o и $o + do$ и в интервале частот $\omega + d\omega$) имеет вид [7]:

$$\frac{d\mathrm{E}}{do\, d\omega} = \frac{cR_0^2}{4\pi^2}\left|\mathbf{E}(\omega)\right|^2, \tag{5}$$

где $\mathbf{E}(\omega)$ — фурье-компонента электрического поля в волновой зоне,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{-i\omega e}{cR_0}\exp\{\frac{i\omega R_0}{c}\}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{n}[\mathbf{n},\hat{\mathbf{a}}]]\exp\{i\omega(t - \mathbf{nr}/c)\}dt. \tag{6}$$

Здесь R_0 — расстояние до наблюдателя, $\mathbf{n}$ — направление на наблюдателя, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\mathbf{r}$ —радиус-вектор (1).

Выберем единичный вектор $\mathbf{n}$ в виде

$$\mathbf{n} = \cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{j} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{k}, \tag{7}$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{n}$ и осью x; φ — азимутальный угол в плоскости *y, z,* который отсчитывается (против часовой стрелки) от положительного направления оси *z*.

Как известно [7], основной вклад в интеграл (6) дает малый участок траектории, направления скорости в пределах которого образуют угол $\sim 1/\gamma$. Поэтому для данного направления $\mathbf{n}$ выбираем точку

t_0 на траектории (1), в которой выполняется условие

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\nu}(t_0)=0\,, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\nu}(t_0)$ — единичный вектор нормали траектории (1) в точке t_0.

Разлагая выражение (1) в ряд Тейлора по малым $t-t_0$ и воспользовавшись формулой (7), находим

$$\begin{aligned}&\mathbf{nr}=\mathbf{nr}(t_0)+(t-t_0)v\cos\chi\\&+\frac{(t-t_0)^3}{6}(-k^2v^3\cos\chi+\kappa k v^3\sin\chi)\end{aligned}, \tag{9}$$

здесь $k=1/r_{\text{C}}$ и κ — кривизна и кручение траектории (1), χ — угол между вектором скорости частицы **v** и направлением на наблюдателя **n**.

Единичные векторы в плоскости перпендикулярной направлению **n**, определим как

$$\mathbf{e}_\sigma=[\mathbf{b},\mathbf{n}]/|[\mathbf{b},\mathbf{n}]|,\quad \mathbf{e}_\pi=[\mathbf{n}[\mathbf{b},\mathbf{n}]]/|[\mathbf{b},\mathbf{n}]|, \tag{10}$$

где **b** — единичный вектор бинормали к траектории (1). Орт $\mathbf{e}_\sigma$ перпендикулярен плоскости (**v,n**), а орт $\mathbf{e}_\pi$ — лежит в этой плоскости.

Воспользовавшись формулами (1), (5), (6), (9), (10), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d\text{E}_i}{do\,d\omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi c^2}\frac{\beta^2}{k^2\gamma^4}\\&\times\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau\begin{Bmatrix}\gamma\chi\\ \tau\end{Bmatrix}\exp\left\{\frac{i\omega}{2\gamma^3kc}\left[\left(1+\gamma^2\chi^2\right)\tau+\tau^3/3\right]\right\}\right|,\end{aligned} \tag{11}$$

где $i=\pi,\sigma$, причем верхняя строка относится к π-поляризации, а нижняя — к σ-поляризации. Выражения (11) отличаются от соответствующих выражений в однородном магнитном поле [1] тем, что в формуле (11) радиус кривизны траектории изменяется в зависимости от точки t_0 (формула (4)).

Для вычисления мощности, теряемой электроном в интервале частот ω и $\omega+d\omega$, нужно проинтегрировать выражения (11) по телесному углу и усреднить по времени. Излучение сконцентрировано в пределах угла с угловым раскрывом $\delta\chi\sim1/\gamma$ относительно поверхности, образуемой единичным вектором скорости $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{v}(t_0)/v$, при изменении фазы $0\le\omega_{\text{B}}t_0\le2\pi$. Угол χ отсчитывается в направлении перпендикулярном этой поверхности, второй угол отсчитывается вдоль кривой, описываемой концом вектора $\boldsymbol{\tau}(t_0)$ в плоскости v_y,v_z. Телесный угол равен $do=d\chi d\mu$, где $d\mu=(1/v)(dv_y^2+dv_z^2)^{1/2}$ = $|v_{\text{D}}/v|(1+q^2+2q\cos\omega_{\text{B}}t)^{1/2}\,d\omega_{\text{B}}t_0$, $q\equiv\omega_{\text{B}}^2r/\Omega^2R$. В качестве временного интервала возьмем циклотронный период $2\pi/\omega_{\text{B}}$.

Получаем, интегрируя формулы (11), спектральные мощности π- и σ-поляризаций

$$\begin{aligned}&\frac{dP_\pi}{d\omega}=\frac{3\sqrt3}{8\pi}\frac{1}{\gamma^3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\omega_{\text{B}}t}{2\pi}\frac{W}{kc}y\left[\int\limits_y^\infty dxK_{5/3}(x)-K_{2/3}(y)\right];\\&\frac{dP_\sigma}{d\omega}=\frac{3\sqrt3}{8\pi}\frac{1}{\gamma^3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\omega_{\text{B}}t}{2\pi}\frac{W}{kc}y\left[\int\limits_y^\infty dxK_{5/3}(x)+K_{2/3}(y)\right],\end{aligned} \tag{12}$$

где $y=\omega/\omega_{\text{S}}$, $\omega_{\text{S}}=(3/2)\gamma^3kc$, $W=(2/3)(e^2/c)k^2c^2\gamma^4$ — полная мощность излучения электрона при круговом движении, $kc=\Omega(1+q^2+2q\cos\omega_{\text{B}}t)^{1/2}$.

Просуммировав выражения (12), находим полную спектральную потерю энергии в единицу времени:

$$\frac{dP}{d\omega}=\frac{3\sqrt3}{4\pi}\frac{1}{\gamma^3}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\omega_{\text{B}}t}{\pi}\frac{W}{kc}y\int\limits_y^\infty dxK_{5/3}(x)\,. \tag{13}$$

Меняя в формуле (13) порядок интегрирования и интегрируя по $d\omega_{\text{B}}t$, получаем

$$\frac{dP}{d\omega}=\frac{W_1}{\omega_1}f(y_1,q)\,, \tag{14}$$

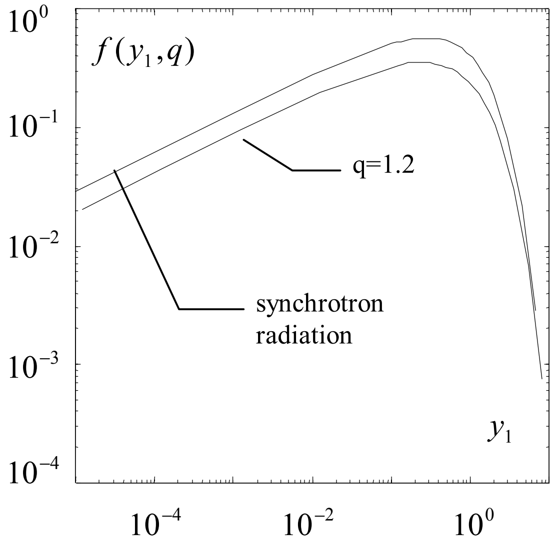
где универсальная функция $f(y_1,q)$, описывающая излучение в искривленном магнитном поле, имеет вид:

$$\begin{aligned}&f(y_1,q)=\frac{|1-q|}{1+q}f\left(\frac{1+q}{|1-q|}y_1\right)\\&+\frac{9\sqrt3}{8\pi}y_1\int\limits_{y_1}^{y_1\frac{1+q}{|1-q|}}dxK_{5/3}(x)\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1+q}{2\sqrt q}\sqrt{1-\frac{y_1^2}{x^2}}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $y_1=\omega/\omega_1$, $\omega_1=(3/2)\gamma^3\Omega(1+q)$, $W_1=(2/3)(e^2/c)\gamma^4\Omega^2(1+q)^2$, $f(y)=\dfrac{9\sqrt3}{8\pi}y\int\limits_y^\infty dxK_{5/3}(x)$ — функция [1, 2], характеризующая зависимость СИ от частоты в однородном магнитном поле.

Таким образом, получаем формулу такого же вида, что и для СИ при круговом движении, однако характерные частоты и вид универсальной функции, описывающей зависимость излучаемой мощности от частоты, меняются.

В случае больших $q\gg1$ (в фигурных скобках в выражении (15) преобладает первое слагаемое) получаем формулы СИ при винтовом движении в однородном магнитном поле. Для $q \ll 1$ имеем формулы изгибного излучения. Для промежуточных значений параметра $q \sim 1$ (основной вклад вносит второе слагаемое в фигурных скобках в формуле (15)) спектральная мощность уменьшается в сравнении со случаем однородного магнитного поля (см. Рисунок).



Функция, характеризующая зависимость СИ от частоты в искривленном магнитном поле

Таким образом, для получения правильных формул излучения ультрарелятивистской заряженной частицы, движущейся по спиральной траектории в изогнутом магнитном поле, необходимо учитывать наклон ларморовской орбиты к магнитной силовой линии. В случае $q \sim 1$ универсальная функция, характеризующая зависимость излучения от частоты, изменяется.

Область параметров, в которой существенна кривизна силовой линии внешнего магнитного поля, определяется из условия $q = \omega_B^2 r_B / \Omega^2 R \sim 1$. При этом $\omega_B r_B / c \sim 1/\gamma_\parallel$, где $\gamma_\parallel = (1 - v_\parallel^2 / c^2)^{-1/2}$, $\Omega = c/R$. Полагая $\gamma_\parallel \sim 10^{-1}\gamma$, получаем

$$q \sim \frac{\omega_B R}{\gamma_\parallel c} \sim 7 \cdot 10^{-4} \frac{BR}{\gamma^2} \sim 10^{-2} \frac{BR}{\gamma^2}. \qquad (16)$$

Как видно, условие (16) легко выполнимо как в лабораторных установках, так и в космических объектах.

Литература

1. А.А. Соколов, И.М. Тернов. Релятивистский электрон. М.: “Наука'”, 1974.
2. И.М. Тернов, В.В. Михайлин. Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. М.: “Энергоатомиздат”, 1986.
3. V. Radkhakrishnan // Proc. Astron. Soc. Austr. 1969, vol.1, p.254.
4. K.S. Cheng, J.L. Zhang. General Radiation Formulae for a Relativistic Charged Particle Moving in Curved Magnetic Field Lined: the Synchrocurvature Radiation Mechanism // Astrophys.J. 1996, vol.463, p.271.
5. Я.М. Соболев. К теории излучения релятивистской заряженной частицы в магнитном поле с искривленными силовыми линиями // Радиофизика и Радиоастрономия. 2000, т.5, №2, с.138.
6. Д.В. Сивухин. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // Вопр. теор. пл. 1963, т.1, с.7.
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М.: “Наука”, 1973.
8. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: “Наука”, 1974.

Drift trajectory and synchrotron radiation of a relativistic electron in curved magnetic field

Synchrotron radiation has broad application in laboratory and astrophysical plasma. If the drift velocity of relativistic electrons in curved magnetic field is comparable to the velocity of cyclotron rotation, then the existing formulae of synchrotron radiation require an improvement. Radiation of an ultrarelativistic electron moving with small pitch angle within spiral trajectory winded on curved force line is considered. It is shown that for deriving the correct formulae of the synchrotron radiation are necessary to use the trajectory, which takes into account both the drift and declination of a cyclotron circle to magnetic field. The new formulae, which have as limiting cases synchrotron or curvature radiation, are obtained. The radiated spectrum, emitted power, and polarization characteristics are calculated.