2К

УДК 519.7

З.Д. Коноплянко, К.П. Терещук
Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи
Національного банку України
zenovij@ukr.net, kostyatereshchuk@rambler.ru

Дослідження класів упорядкованих двомісних *k*-значних комутаційних функцій

У статті досліджено метричні властивості добре впорядкованих двомісних *k*-значних комутаційних функцій. Описаний основний принцип роботи алгоритму обчислення *Np* та два методи аналізу впорядкованих двомісних функцій k-значної логіки.

Вступ

При сьогоднішніх соціально-економічних умовах первинна інформація має дуже велику цінність. Проте при наявних обчислювальних засобах добути деякі важливі знання надзвичайно складно, і це може займати багато часу і коштів. Одним із методів зменшення вартості інформації є розвиток та впровадження *k*-значної логіки у проектування обчислювальних механізмів. Проте це несе за собою ряд комбінаторних проблем.

k-значна логіка є типом формальної логіки, в основі якої лежать натуральні числа, визначені на проміжку $E_k = \{0,1,...,k-1\}$. Функцією *k*-значної логіки є відображення виду $f(x_1, x_2,..., x_n): E_k^n \to E_k$ [1].

Оскільки в основі будь-яких алгебр лежать відповідні двомісні функції додавання та множення (в комбінаториці – «+» та «×», в булевій алгебрі – «$\vee$» та «$\wedge$» тощо), розглянемо двомісні функції *k*-значної логіки виду $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, де $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ – функції, що реалізуються одновходовим універсальним елементом (мультиплексором) [2] і пробігають усю множину функцій з P_k^1 однієї змінної, тобто їх можна записати у вигляді одновимірного кортежу. Усі функції, визначені на E_k, зі значеннями також у $E_k = \{0,1,...,k-1\}$.

Первісні результати у цій сфері щодо аналізу структури і роботи двовходового *k*-значного логічного елемента та дослідження метричних властивостей двомісних функцій *k*-значної логіки описані у [2-8].

Метою даної роботи є подальша розробка методів аналізу двомісних добре впорядкованих *k*-значних комутаційних функцій, що дозволить у майбутньому впорядкувати деякі слабоструктуровані двомісні *k*-значні функції.

Суперпозицію двомісної *k*-значної комутаційної функції можна записати у вигляді квадратної матриці (табл. 1).

При розгортанні суперпозиції функції двох змінних породжується k^{2k} функцій, але не всі з них різні. Проблема в тому, що немає єдиної аналітичної залежності, яка б дозволила швидко підрахувати кількість різних функцій, які породжує довільна двомісна функція (ця кількість в роботі позначається N_p) [5]. Тому одним із методів швидкого, але не універсального обчислення N_p є пошук серед усіх функцій групи впорядкованих функцій, N_p яких можна обчислити за формулою.

Таблиця 1 – Суперпозиція двомісної функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$			
		0	1	…	(k-1)
$\varphi_2(x_2)$	0	e_{00}	e_{01}	…	$e_{0(k-1)}$
	1	e_{10}	e_{11}	…	$e_{1(k-1)}$
	⋮	⋮	⋮	…	⋮
	(k-1)	$e_{(k-1)0}$	$e_{(k-1)1}$	…	$e_{(k-1)(k-1)}$

Де e_{ij} – значення функції $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ в точках, які визначаються функціями однієї змінної $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ [3].

Впорядковані функції, схожі на інші досліджувані k- значні функції

Розглянемо, для прикладу, функцію $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ (дальше *min*). Суперпозиція цієї функції при $k = 3$ має такий вигляд:

Таблиця 2 – Суперпозиція функції виду min

$\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**1**
	2	**0**	**1**	**2**

У табл. 3 зображено механізм розгортання суперпозиції функції *min* при $k = 3$. Як видно з цієї таблиці, функції однієї змінної $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ набувають усіх можливих значень від <0 0 0> до <2 2 2> в порядку лексикографічного наступного. Таких суперпозицій кожної одномісної функції буде $k^k = 3^3 = 27$, тому породиться 27 × 27= 729 суперпозицій двомісних функцій, але кількість різних буде $N_p = 411$.

Таблиця 3 – Розгортання суперпозиції 3-значної функції виду *min*

		$\varphi_1(x_1)$						
		0 0 0	0 0 1	0 0 2	0 1 0	0 1 1	…	2 2 2
$\varphi_2(x_2)$	0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0		0 0 0
	0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0		0 0 0
	0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0		0 0 0
	0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0		0 0 0
	0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0		0 0 0
	1	0 0 0	0 0 1	0 0 1	0 1 0	0 1 1		1 1 1
	⋮							
	2	0 0 0	0 0 1	0 0 2	0 1 0	0 1 1		2 2 2
	2	0 0 0	0 0 1	0 0 2	0 1 0	0 1 1		2 2 2
	2	0 0 0	0 0 1	0 0 2	0 1 0	0 1 1		2 2 2

Оскільки функція *min* є суттєво впорядкованою, то існує аналітичний вираз [9], який дозволяє знайти N_p цієї функції при будь-якому k:

$$N_p = \sum_{i=1}^{k} (i^k - (i-1)^k)^2. \tag{1}$$

Також існує певна кількість схожих на *min* функцій, N_p яких обчислюється за формулою (1).

Введемо число N_f – кількість різних, схожих за властивостями, функцій, N_p яких обчислюється за однією спеціалізованою формулою. Оскільки формула N_p k-значної функції не зміниться, якщо над нею проводити такі операції, як перестановки рядків або стовпців (перша властивість N_p), транспонування (друга властивість) та заміни елементів (третя властивість) функції, і поки відомо небагато випадків, коли N_p не мінялась при перетворенні функції без використання жодної з цих операцій, під N_f будемо розуміти кількість усіх різних двомісних k-значних функцій, утворених з функції шляхом перестановок рядків (стовпців), транспонування та заміни її елементів. Тож, усі двомісні k-значні функції, утворені із функції *min* за допомогою цих операцій, можна віднести до одного класу еквівалентності (клас функцій виду *min*). Загалом, усі 3-значні двомісні функції (їх кількість становить $k^{k^2} = 3^{3^2} = 19683$) можна за цими трьома властивостями об'єднати аж у 75 класів, але деякі формули обчислення N_p можна зробити більш універсальними, щоб вони об'єднували кілька класів.

Для функції виду *min* при $k = 3$ число $N_f = 216$ (приблизно 1% від усіх 3-значних функцій). Це залежить від того, що усі рядки і стовпці функцій даного виду є різними (табл. 2), тому при перестановках рядків (стовпців) утвориться $k!\cdot k! = (k!)^2$ різних функцій (згідно з першою властивістю N_p). У даному випадку транспонування функції не враховуємо при обчисленні N_f, тому що дана функція є симетричною відносно основної діагоналі, тобто її можна транспонувати шляхом перестановок рядків чи стовпців, що вже було враховано. Дана функція має найбільше число нулів, потім одиниць і так далі, тобто усі k елементів зустрічаються різну кількість разів (табл. 2), що не дозволяє переставити місцями елементи функції за допомогою попередніх операцій. Тому можемо легко обчислити кількість функцій, отриманих шляхом заміни одних елементів на інші (третя властивість). Таких функцій можна утворити $k!$. Отже, використовуючи основне правило комбінаторики (правило множення), маємо $N_f = (k!)^2 \cdot k! = (k!)^3$.

Є також інші функції, схожі за властивостями на інші суттєво впорядковані функції. Наприклад, суперпозиція функції

$$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) + \left\lfloor \frac{\min(k - \varphi_1(x_1), k - \varphi_2(x_2))}{k} \right\rfloor$$

відрізняється від $\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ лише значенням при $f(0,0)$ (табл. 2 і табл. 4). Тому формула обчислення N_p виведена із формули N_p для функції *min*:

$$N_p = \sum_{i=1}^{k} (i^k - (i-1)^k)^2 - 2(2^{k-1} - 1)^2. \qquad (2)$$

Таблиця 4 – Суперпозиція подібної до *min* функції

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**1**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**1**
	2	**0**	**1**	**2**

Ще одним прикладом є суперпозиція функції, записаної з умовою:
$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, з умовою, що $f(1,1) = 0$.

Для цієї функції $N_p = \sum_{i=1}^{k} (i^k - (i-1)^k)^2$.

Як видно, формула N_p даної функції така ж, як і у функцій виду *min*, при чому за допомогою перестановок рядків (стовпців), транспонування та заміни елементів цієї функції можна утворити $N_f = (k!)^3$ різних функцій, що також дорівнює N_f функцій виду *min*. Таким чином кількість функцій, N_p яких обчислюється за формулою (1) становить $(k!)^3 + (k!)^3 = 2(k!)^3$.

Таблиця 5 – Суперпозиція подібної до *min* функції з додатковою умовою

$\min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$, $f(1,1)=0$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**0**	**1**
	2	**0**	**1**	**2**

Алгоритм обчислення *Np*. Впорядковані функції, несхожі на інші досліджувані *k*-значні функції

Проте є багато функцій, не схожих на інші досліджені впорядковані функції. За допомогою розроблення універсального оптимізованого алгоритму для обчислення N_p можна вивести формули для таких класів впорядкованих *k*-значних функцій. Ідея алгоритму обчислення N_p проста [2], [5], [7] – аналізувати і перевіряти на унікальність потрібно не кожну функцію, а групу подібних за властивостями функцій. Однією із таких властивостей є цифровість функцій однієї змінної (кількість чисел, використаних в окремо взятій функції).

Таблиця 6 – Суперпозиція функції виду *mod*

$(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**1**	**2**
	1	**1**	**2**	**0**
	2	**2**	**0**	**1**

Розглянемо детальніше алгоритм обчислення N_p на прикладі впорядкованої функції виду $f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = (\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k$ (далі *mod*, табл. 6) з використанням цієї властивості. Для неї $N_p = \frac{(k^k)^2}{k}$ [8].

При розгортанні суперпозиції двомісної функції посортуємо функції однієї змінної $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ на 1-, 2-, ..., *k*-цифрові. У табл. 7 зображений приклад такого розгортання для функції *mod*. Таким чином, можна сформувати таблицю з усіма групами породжених функцій (табл. 8), у якій суперпозицій є набагато менше – $(\sum_{i=1}^{k} C_k^i)^2 = (2^k - 1)^2$ переформованих суперпозицій. Це означає, що перебір при підрахунку N_p буде невеликим і при зростанні *k* кількість операцій, яку повинен здійснити комп'ютер, буде зростати без комбінаторного вибуху, як при застосуванні методу прямого перебору.

У [3], [5] описана формула підрахунку числа різних кортежів *i*-го класу. Це є підхід через число розміщень без повторень A_k^i та числа Стирлінга 2-го роду:

$$N_\Sigma = k^k = \sum_{i=1}^{k} A_k^i \Phi(k,i),$$

де $A_k^i = \frac{k!}{(k-i)!}$ – число розміщень довжиною із *k* значень E_k;

Таблиця 7 – Таблиця розгортання суперпозиції 3-значної функції виду *mod*, трансформована згідно із розбиттям на класи еквівалентності функцій однієї змінної

mod		1-цифрові			2-цифрові		…	3-цифрові
		0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0	…	0 1 2
1-цифрові	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	1 1 2	1 2 1		1 2 0
⋮	⋮							
3-циф р.	0	0 0 0	1 1 1	2 2 2	0 0 1	0 1 0		0 1 2
	1	1 1 1	2 2 2	0 0 0	0 0 2	0 2 0		1 2 0
	2	2 2 2	0 0 0	1 1 1	0 0 0	0 0 0		2 0 1

Таблиця 8 – Вигляд таблиці істинності 3-значної комутаційної функції *mod*, трансформованої згідно із розбиттям на класи еквівалентності функцій однієї змінної

min		1-цифрові			2-цифрові			3-цифрові
		0	1	2	0 1	0 2	1 2	0 1 2
1-цифрові	0	0	1	2	0 1	0 2	1 2	0 1 2
	1	1	2	0	1 2	1 0	2 0	1 2 0
	2	2	0	1	2 0	2 1	0 1	2 0 1
2-цифрові	0 1	0 1	1 2	2 0	0 1 1 2	0 2 1 0	1 2 2 0	0 1 2 1 2 0
	0 2	0 2	1 0	2 1	0 1 2 0	0 2 2 1	1 2 0 1	0 1 2 2 0 1
	1 2	1 2	2 0	0 1	1 2 2 0	1 0 2 1	2 0 0 1	1 2 0 2 0 1
3-цифрові	0 1 2	0 1 2	1 2 0	2 0 1	0 1 1 2 2 0	0 2 1 0 2 1	1 2 2 0 0 1	0 1 2 1 2 0 2 0 1

$\Phi(k,i) = \frac{1}{i}\sum_{k_1,\dots,k_k}\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_k!}$ – числа Стирлінга 2-го роду (числа розбиттів *k*-елементної множини на *i* блоків), причому

$\Phi(k,k) = 1$, при $k > 0$;

$\Phi(k,0) = 0$, при $k > 0$;

$\Phi(k,i) = \Phi(k-1,i-1) + i\Phi(k-1,i)$, при $0 < i < k$ [1], [3].

Але кожен *i*-цифровий клас може містити C_k^i підкласів, наприклад, при $k = 3$, 2-цифрові кортежі можуть містити такі сполучення чисел: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$. Отже, кількість кортежів розміру *k*, які можна утворити із *i* елементів, описується формулою:

$$\frac{\Phi(k,i)A_k^i}{C_k^i} = \Phi(k,i)\frac{\dfrac{k!}{(k-i)!}}{\dfrac{k!}{i!(k-i)!}} = \Phi(k,i)\frac{k!i!(k-i)!}{(k-i)!k!} = \Phi(k,i)i!.$$

За допомогою таких комбінаторних властивостей, а також інших особливостей класів породжуючих функцій, можна швидко обчислити N_p довільної функції.

Проте при великих значеннях k (8 і більше) використання такого алгоритму потребує дуже багато часу. Отже, для того щоби остаточно уникнути перебору, потрібно формувати класи впорядкованих функцій та виводити унікальну для них формулу N_p.

Найпростішими є уже описані суттєво впорядковані двомісні функції виду *min* і *mod*, а також ті, які залежать тільки від однієї змінної. Для останніх

$$N_p = n^k, \tag{3}$$

де n – кількість різних елементів функції. Суперпозиції деяких із них зображені в табл. 9.

Таблиця 9 – Суперпозиції залежних від однієї змінної двомісних функцій

$\varphi_2(x_2) \bmod 2$		$\varphi_1(x_1)$				$\varphi_2(x_2)$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2				0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**		$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**1**	**1**	**1**			1	**1**	**1**	**1**
	2	**0**	**0**	**0**			2	**2**	**2**	**2**

Усі інші двомісні k-значні комутаційні функції є складнішими. Їх оцінка потребує великих затрат часу. Наприклад, суперпозиція функції (табл. 10)

$$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \min(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \cdot \left\lfloor \frac{(k - \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) - 1) \bmod k}{k-1} \right\rfloor$$

при розгортанні породжує таку кількість груп функцій, яку легко комбінаторно перелічити і виведена формула обчислення N_p повторює механізм описаного алгоритму:

$$N_p = k! + \sum_{i=1}^{k-1} (C_k^i (\Phi(k,i) i!)^2 + 2C_{k-1}^i \Phi(k,i) \Phi(k,i+1) i! (i+1)!), \tag{4}$$

де $\Phi(k,i)$ – числа Стирлінга 2 роду, C_k^i – кількість комбінацій з k елементів по i елементах.

Таблиця 10 – Суперпозиція функції виду діагонального мінімуму

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**1**	**0**
	2	**0**	**0**	**2**

Дуже близькою до цієї функції є функція діагонального виду (табл. 11)

$$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) = \left\lfloor \frac{(\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)) \bmod k}{k-1} \right\rfloor.$$

N_p функцій цього виду обчислюється за такою формулою:

$$N_p = 2 + k!(1 + 2\Phi(k,k-1))^2 + \sum_{i=2}^{k-1} (\Phi^2(k,i)(i+1)! + 2\Phi(k,i)\Phi(k,i-1) i!). \tag{5}$$

Таблиця 11 – Суперпозиція функції діагонального виду

$f(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$		$\varphi_1(x_1)$		
		0	1	2
$\varphi_2(x_2)$	0	**0**	**0**	**1**
	1	**0**	**1**	**0**
	2	**1**	**0**	**0**

Як видно, формальний опис цих функцій є об'ємним, проте оцінка впорядкованих двомісних *k*-значних функцій дозволить оптимізувати роботу комутаційного обладнання, зокрема забезпечити необхідний обсяг пам'яті для здійснення відповідного числа комутацій під час обслуговування процесів обміну даними у системах штучного інтелекту.

Висновки

1. Серед усіх можливих двомісних *k*-значних комутаційних функцій існують суттєво впорядковані функції, які можна об'єднати у класи за принципом того, що кожну функцію певного класу можна звести до будь-якої іншої функції цього ж класу за допомогою перестановок рядків, перестановок стовпців, транспонування і перестановок елементів функції, в результаті чого N_p не зміниться.
2. Суть алгоритму обчислення N_p полягає у тому, що аналізувати і перевіряти на унікальність потрібно не кожну функцію, а групу подібних за властивостями функцій, що дозволяє значно прискорити процедуру підрахунку N_p.
3. Запропоновано два методи виведення формули N_p впорядкованих функцій: на основі порівняння їх з іншими впорядкованими функціями та виведення формули N_p «з нуля» за допомогою алгоритму обчислення N_p.
4. Дослідження упорядкованих функцій дозволяє скоротити перебір при підрахунку числа різних функцій, які породжує довільна двомісна функція.

Література

1. Алексеев В.Б. Дискретная математика (II семестр): конспект лекций / В.Б. Алексеев, А.Д. Поспелов. – М. : МГУ имени М.В. Ломоносова, 2002. – 44 с.
2. Пат. 20462 Україна, МКВ Н03К 19/08. Двовходовий багатозначний логічний елемент / Бондаренко М.Ф., Коноплянко З.Д., Четвериков Г.Г. – № 97031289/24; заявл. 20.03.97; опубл. 15.07.97; Бюл. № 3. – 5 с.
3. Бондаренко М.Ф. Основи теорії багатозначних структур і кодування в системах штучного інтелекту / Бондаренко М.Ф., Коноплянко З.Д., Четвериков Г.Г. – Х. : Фактор-Друк, 2003. – 336 с.
4. Коноплянко З.Д. Концепції організації інформаційно-інтелектуальних технологій та інтелектуальної підтримки суспільно-економічних процесів / З.Д. Коноплянко, Д.П. Вєніков // Вісник УБС НБУ. – 2008. – № 1. – С. 180-182.
5. Коноплянко З.Д. Багатозначні структури та кодування систем економічної кібернетики : [монографія] / Коноплянко З.Д., Чаплига В.М., Чаплига М.В. – Львів : ЛБІ НБУ, 2004. – 314 с.
6. Коноплянко З.Д. Дослідження метричних властивостей k-значних функцій / Коноплянко З.Д., Терещук К.П. // Международная научно-практическая конференция «Современные направления теоретических и прикладных исследований'2008», (15 – 25 марта 2008 г., Одеса, Україна). – С. 37-42.
7. Коноплянко З.Д. Алгоритм обчислення Np у сфері досліджень метричних властивостей k-значних функцій / З.Д. Коноплянко, К.П. Терещук // Международная научно-практическая конференция «Современные направления теоретических и прикладных исследований'2008», (15 – 25 марта 2008 г., Одеса, Україна). – С. 42-46.
8. Реализация многозначных структур автоматики / под ред. М.А. Ракова. – К. : Наук. думка, 1976. – 350 с.

З.Д. Коноплянко, К.П. Терещук

Исследование классов упорядоченных двуместных *k*-значных коммутационных функций

В статье исследованы метрические особенности хорошо упорядоченных двуместных *k*-значных функций. Описан основной принцип работы алгоритма расчета *Np* и два метода анализа упорядоченных двуместных функций *k*-значной логики.

Стаття надійшла до редакції 27.05.2009.