УДК 519.863:338.3

М.В. БОЙЧУК, Н.М. ШМУРИГІНА

ДИНАМІЧНА УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ З УРАХУВАННЯМ КОНТРОЛЮ НАД ЗАБРУДНЕННЯМ

Abstract: *Generalized mathematical model of dynamic intersector balance taking into account the control above contamination and the resulted algorithm of its researching is offered.*
Key words: *intersector balance, highway, management, point of switching managements.*

Анотація: *Запропонована узагальнена математична модель динамічного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням і приведений алгоритм її дослідження*
Ключові слова: *міжгалузевий баланс, магістраль, керування, точка перемикання керувань.*

Аннотация: *Предложена обобщенная математическая модель динамического межотраслевого баланса с учетом контроля над загрязнением и приведен алгоритм ее исследования*
Ключевые слова: *межотраслевой баланс, магистраль, управление, точка переключения управлений.*

1. Вступ. Постановка проблеми

Забруднення навколишнього середовища є побічним продуктом кожної нормальної економічної діяльності – в будь-якій із своїх численних форм воно пов'язане з певними процесами виробництва і споживання.

Боротьба із забрудненням навколишнього середовища вимагає постійно зростаючих витрат, приводить до створення нових виробництв по переробці і знищенню шкідливих відходів. В результаті розширюється сама сфера суспільного виробництва: вона включає не тільки створення матеріальних благ, але й різні види діяльності, пов'язані із зменшенням забруднення навколишнього середовища і відновлення природних ресурсів.

Однією із основних проблем є прогнозування подальшого розвитку екологічної ситуації, метою якого служить пошук оптимального плану розвитку економіки. Основним засобом прогнозування у цьому випадку є динамічні моделі еколого-економічної взаємодії. Моделі цього класу зберігають традиційну структуру економіко-математичних моделей, а також містять додаткові змінні і зв'язки, що характеризують екологічну підсистему.

У даній роботі проводиться дослідження однієї з економічних задач – оптимізація динамічної узагальненої моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням. Процес описується моделлю економічної динаміки, в основу якої покладений міжгалузевий баланс, а потужності галузей описуються виробничими функціями. В динамічній моделі міжгалузевого балансу припускається миттєвість перетворення виробничого накопичення (капітальних вкладень) у приріст виробництва продукції.

Автори досліджували динаміку узагальненої моделі міжгалузевого балансу, визначили можливі сценарії її розвитку і зростання, особисто запропонували алгоритм обчислення моменту перемикання керувань.

Отже, за методами системного аналізу дослідимо процес і визначимо можливі й оптимальні траєкторії зростання узагальненої динамічної моделі міжгалузевого балансу з метою її використовування в задачах прогнозування, планування та управління.

2. Аналіз основних досліджень і публікацій, в яких започатковане розв'язання поставленої проблеми

Перша міжгалузева модель, яка охоплює взаємозв'язки економіки і навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим і Д. Фордом. Вона охоплює дві групи галузей (виробництв): галузі матеріального виробництва і галузі, які знищують шкідливі відходи.

Запропонована В. Леонтьєвим на початку 50-х років динамічна міжгалузева модель [1] стала класичним прикладом використовування систем диференціальних рівнянь у дослідженні проблем економічного зростання. З часу своєї появи модель В. Леонтьєва знайшла широкий відгук, і вже накопичений значний досвід практичного використовування моделі і її модифікацій на національному і регіональному рівнях. Зокрема, в [2] проведені дослідження і числове моделювання статичної моделі міжгалузевого балансу. Це дало можливість отримати такі результати:

– запропонувати механізм для визначення магістральних траєкторій і відповідних їм керувань;

– досліджувати граничні траєкторії і керування.

В [3] приведено побудову узагальненої статичної моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням.

Серед сучасних досліджень в області математичного моделювання еколого-економічних систем слід зазначити роботи М.В. Михалевича, А.А. Петрова, І.Г. Поспєлова, О.В. Рюміної, І.М. Ляшенка, В.С. Григорківа та ін., в яких обґрунтовується необхідність оцінювання еколого-економічної взаємодії на основі моделей, що в сукупності описують систему екологічних і економічних процесів.

3. Мета і методика проведення досліджень

Основною метою даної роботи є подальша розробка методологічних питань аналізу розвитку економіки, дослідницьких прийомів узагальненої динамічної моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням.

Теоретичну і методологічну основу дослідження складають фундаментальні положення і принципи економічної теорії, методи оптимізації, економіко-математичне моделювання, теорії невід'ємних матриць і диференціальних рівнянь.

Динамічна узагальнена модель міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням має вигляд:

$$X^{(1)}=A_{11}X^{(1)}+A_{12}X^{(2)}+A_{13}X^{(3)}+Y^{(1)},\ X^{(2)}=A_{21}X^{(1)}+A_{22}X^{(2)}+A_{23}X^{(3)}-Y^{(2)};$$

$$X^{(3)}=A_{31}X^{(1)}+A_{32}X^{(2)}+A_{33}X^{(3)}-Y^{(3)};$$

$$Y_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}q_{kj}I_j+C_k,\ I=B_1\dot{X}^{(1)}+B_2\dot{X}^{(2)}+B_3\dot{X}^{(3)};$$

$$\dot{K}_k=I_k-\mu_k K_k,\ K_k(0)=K_{k0},\ k\in\{1,...,n\};$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_k \le N\ ,\ 0 \le X_k^{(1)} \le F_k\ (t, K_k, L_k)\ ;$$

$$Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)} \ge 0\ ,\ I_k \ge 0\ ,\ K_k \ge 0\ ,\ C_k \ge C_k^{\min}\ ,\ k \in \{1,...,n\}\ , \qquad (1)$$

де $X^{(1)}, (n \times 1) -$ вектор валового випуску продукції; $Y^{(1)}, (n \times 1) -$ вектор кінцевої продукції; $X^{(2)}, (n \times 1) -$ вектор створеного рукотворного капіталу; $Y^{(2)}, (n \times 1) -$ заданий запас наявного капіталу; $X^{(3)}, (n \times 1) -$ вектор знищених забруднювачів; $Y^{(3)}, (n \times 1) -$ задані ліміти на викиди забруднювачів в навколишнє середовище; $A_{11}, A_{12}, A_{13} -$ невід'ємні матриці матеріальних витрат; $A_{21}, A_{22}, A_{23} -$ невід'ємні матриці використання рукотворного капіталу; $A_{31}, A_{32}, A_{33} -$ невід'ємні матриці випуску забруднювачів; $I -$ інвестиції; $C -$ невиробниче споживання; $K -$ основні виробничі фонди; $L -$ трудові ресурси; $\mu -$ норми амортизації капіталів; $\dot{X}^{(1)}, (n \times 1) -$ вектор абсолютних приростів випуску продукції; $\dot{X}^{(2)}, (n \times 1) -$ вектор абсолютних приростів створеного рукотворного капіталу; $\dot{X}^{(3)}, (n \times 1) -$ вектор абсолютних приростів знищених забруднювачів; $B_1, B_2, B_3 -$ невід'ємні матриці коефіцієнтів капіталоємності приростів відповідних виробництв.

Задача полягає в тому, щоб знайти такий процес, який би задовольняв умови (1) і був оптимальним у змісті функціоналу

$$R(\pi) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(t, C) dt \to \max_{\pi \in M}\ , \qquad (2)$$

де $M -$ множина процесів, які допускають виконання умов (1); $\delta -$ норма дисконтування.

Функції F_k є виробничими функціями кожної галузі з властивостями [4]. На функцію корисності g накладають такі вимоги: двічі неперервно-диференційована по C і неперервна по $t \ge 0$; монотонно зростаюча по C; угнута по C; $\lim\limits_{C \to 0} \frac{\partial g}{\partial C} = \infty$, $\lim\limits_{C \to \infty} \frac{\partial g}{\partial C} = 0$.

Матриця структури капіталовкладень $Q -$ невід'ємна, причому $q_{kj} > 0$ при всіх $k > s$, $j \in \{1,...,n\}$. Галузі з номерами $k \le s$ такі, що для кожного $k \le s$ існує хоча б одне j, при якому $q_{kj} > 0$, називаються фондоутворюючими. Для кожної галузі j знайдеться фондоутворююча галузь k така, що $q_{kj} > 0$, причому $\sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj} = 1$ для всіх $j \in \{1,...,n\}$.

У задачі (1)-(2) в ролі стану виступає вектор капіталу, а решта змінних $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, Y^{(1)}, I, L, C -$ компоненти вектора керування.

Оскільки економіка розвивається в умовах стійкої екологічної рівноваги, то $Y^{(2)} = const$, $Y^{(3)} = const$.

З системи (1) виразимо $X^{(2)}$ і $X^{(3)}$ через $X^{(1)}$ і продиференціюємо ці вирази:

$$X^{(2)}=(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}\{(A_{21}+UA_{31})X^{(1)}-UY^{(3)}-Y^{(2)}\};$$

$$X^{(3)}=(E-A_{33})^{-1}\{[A_{31}+A_{32}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}(A_{21}+UA_{31})]X^{(1)}-$$

$$-[A_{32}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}U+E]Y^{(3)}-A_{32}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}Y^{(2)}\};$$

$$\dot{X}^{(2)}=(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}(A_{21}+UA_{31})\dot{X}^{(1)};$$

$$\dot{X}^{(3)}=(E-A_{33})^{-1}[A_{31}+A_{32}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}(A_{21}+UA_{31})]\dot{X}^{(1)}.$$

Підставимо останні рівності в перше і п'яте рівняння системи, отримаємо

$$X_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{n} w_{kj}X_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{n}(z_{kj}+b_{kj})Y_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{n}s_{kj}Y_j^{(3)}+Y_k^{(1)},\ k\in\{1,...,n\},$$

$$I=D\dot{X}^{(1)},$$

де матриці $U=A_{23}(E-A_{33})^{-1}$, $Z=A_{12}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}$, $R=A_{13}(E-A_{33})^{-1}$, $B=RA_{32}(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}$, $D1=(Z+B)(A_{21}+UA_{31})+RA_{31}$, $W=A_{11}+D1$, $S=(Z+B)U+R$, $D2=(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}(A_{21}+UA_{31})$, $D=B_1+B_2D2+B_3(E-A_{33})^{-1}(A_{31}+A_{32}D2)$, $M=QD$.

Відповідно до достатніх умов оптимальності [2, с. 382–385], необхідно оптимізувати дві функції:

$$R(t,K,C,I)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,K)}{\partial K_k}[-\mu_k K_k+I_k]+e^{-\delta t}g(t,C)+\frac{\partial\varphi(t,K)}{\partial t}\to\max,$$

$$\lim_{t\to\infty}\min_{K\geq 0}\varphi(t,K). \qquad (3)$$

Невідому функцію φ шукатимемо у вигляді

$$\varphi(t,K)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)K_k.$$

Тоді (3) набуває вигляду

$$R=\sum_{k=1}^{n}[\dot{\psi}_k-\mu_k\psi_k]K_k+\sum_{k=1}^{n}\psi_k I_k+e^{-\delta t}g(t,C)\to\max;$$

$$\lim_{t\to\infty}\min_{K_k\geq 0}\psi_k(t)K_k=0,\ \forall k\in\{1,...,n\}.$$

Враховуючи міжгалузеві зв'язки моделі (1), за допомогою методу множників Лагранжа замінимо задачу про максимум R на максимум функції

$$\widetilde{R}=\sum_{k=1}^{n}[\dot{\psi}_k-\mu_k\psi_k]K_k+\sum_{k=1}^{n}\psi_k I_k+e^{-\delta t}g(t,C)+\gamma\left(N-\sum_{k=1}^{n}L_k\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(X_k^{(1)}-\sum_{j=1}^{n}w_{kj}X_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}(z_{kj}+b_{kj})Y_j^{(2)}+\sum_{j=1}^{n}s_{kj}Y_j^{(3)}-\sum_{j=1}^{n}q_{kj}I_j-C_k\right)\to\max_M \tag{4}$$

на множині M всіх $X^{(1)},C,K,I,L$ моделі (1). Тут $\gamma(t\geq 0)$, $\lambda_k(t\geq 0)$, $k\in\{1,...,n\}$ - множники Лагранжа. Введемо позначення:

$$G(t,C)=e^{-\delta t}g(t,C)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k C_k\ ,\ h_k=\lambda_k-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_{jk}\ ,\ \omega_k=\psi_k-\sum_{j=1}^{n}q_{jk}\lambda_j\ ;$$

$$P_k=-\dot{\psi}_k+\mu_k\psi_k\ ,\ R_k(t,K,X^{(1)},L)=-P_k K_k+h_k X_k^{(1)}-\gamma L_k\ .$$

Тоді

$$\tilde{R}=\sum_{k=1}^{n}R_k(t,K,X^{(1)},L)+\sum_{k=1}^{n}\omega_k I_k+G(t,C)+\gamma N+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{j=1}^{n}\{(z_{kj}+b_{kj})Y_j^{(2)}+s_{kj}Y_j^{(3)}\}\ .$$

Задача (4) набуває такого вигляду в нових позначеннях:

$$R_k(t,K,X^{(1)},L)\to\max_{\substack{0\leq X_k^{(1)}\leq F_k(t,K,L),\\ K_k\geq 0,L_k\geq 0}} \tag{5}$$

$$\max_{I_k\geq 0}\omega_k I_k=0\quad\forall k,t\ . \tag{6}$$

Пошук оптимального режиму економічного розвитку зводиться до максимізації функцій $R_k(t,K,X^{(1)},L)$ і $G(t,C)$ і підбору таких множників $\psi_k(t),\lambda_k(t),\gamma(t)$, щоб цей процес $\pi\in M$ виявився допустимим.

Множники ψ_k,λ_k,γ мають зміст дисконтованих до початкового моменту внутрішніх цін. Зміст поточних цін мають величини

$$\overline{\psi}_k(t)=\psi_k(t)e^{\delta t}\ ,\ \overline{\lambda}_k(t)=\lambda_k(t)e^{\delta t}\ ,\ \overline{\gamma}(t)=\gamma(t)e^{\delta t}\ .$$

Режим розвитку економіки, визначений (5)–(6), назвемо оптимальним при даних цінах. Він забезпечує максимум всіх видів прибутку в кожний момент часу. Ціни $\zeta=(\psi,\lambda,\gamma)\in\Pi$ назвемо допустимими.

Згідно з (5), споживання $C(t\geq 0)$ забезпечує максимум комерційного прибутку $G(t,C)$. З урахуванням властивостей функції $g(t,C)$ необхідною умовою існування цього максимуму є невід'ємність вектора $\lambda(t)$ при кожному $t\geq 0$. Якщо корисність лінійна $g=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$, то внутрішні поточні ціни не нижче за зовнішні: $\overline{\lambda}_k\geq\theta_k,\ k\in\{1,...,n\}$. Якщо $C_k>C_k^{\min}$, то поточна ціна даного продукту дорівнює граничній корисності $\overline{\lambda}_k=\frac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$. Якщо $\overline{\lambda}_k>\frac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$, то $C_k=C_k^{\min}$. В частинному випадку, якщо $g=\sum_{k=1}^{n}\theta_k C_k$, то значення $C_k > C_k^{\min}$ можливе тільки при такому $k=l$, що

$$\frac{\theta_l}{\overline{\lambda}_l}=\max_k \frac{\theta_k}{\overline{\lambda}_k}=1 . \tag{7}$$

Галузь l є єдиною.

Згідно з (5), оптимальний продукт галузі X_k, капітал K_k і робоча сила L_k повинні забезпечити максимум прибутку R_k. А це можливо при виконанні умови

$$X_k = \begin{cases} F_k\,(t, K_k, L_k), & \text{якщо } h_k > 0, \\ 0, & \text{якщо } h_k < 0, \\ \text{не визначено}, & \text{якщо } h_k = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Позначимо

$$\tilde{R}_k = \max_{0 \le X_k \le F_k\,(t,K_k,L_k)} R_k = h_k F_k\,(t,K_k,L_k) - P_k\,K_k - \gamma L_k . \tag{9}$$

Враховуючи лінійну однорідність виробничих функцій F_k, можемо записати

$$\tilde{R}_k = \tilde{r}_k\,(t,k_k) L_k ,$$

де $k_k = K_k / L_k -$ фондоозброєність, $\tilde{r}_k\,(t,k_k) = h_k\, f_k\,(t,k_k) - P_k\, k_k - \gamma -$ виробничий прибуток галузі з одиниці праці. Оскільки $L_k > 0$ для всіх k і t, отримаємо необхідні і достатні умови максимуму $\tilde{R}_k$ за K_k і L_k:

$$\tilde{r}_k\,(t,\hat{k}_k) = \max_k \tilde{r}_k\,(t,k_k) \tag{10}$$

для всіх k і t. Для існування такого $\hat{k}_k$ необхідно, щоб $P_k > 0$, $\gamma > 0$ для всіх k і t. Якщо $h_k > 0$ і $f_k\,(t,k_k) > 0$, $P_k > 0$, $\gamma > 0$, то існує $\hat{k}_k > 0$.

Вектор $H = (h_1, ..., h_n)$ виражається через вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ матричною формулою

$$H = (E - W^T)\lambda . \tag{11}$$

Із (8), згідно з (10), випливає повна загруженість галузей на оптимальному режимі:

$$X_k = F_k\,(t, K_k, L_k) , \; k \in \{1, ..., n\}, \; t \ge 0 .$$

На основі властивості обмеженості на сумарну робочу силу матимемо

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(t) = N(t), \; t \ge 0 . \tag{12}$$

Використовуючи (9) і (10), отримаємо

$$h_k \frac{\partial F_k\,(t,K_k,L_k)}{\partial L_k} = \gamma,\; h_k \frac{\partial F_k\,(t,K_k,L_k)}{\partial K_k} = P_k \tag{13}$$

для всіх k і $t \geq 0$. Це означає, що чистий граничний прибуток з одиниці праці однаковий для всіх галузей і повинен співпадати з ціною праці, а з одиниці фондів – з ціною їх зношення. Якщо $\eta_k(t,k_k) = \dfrac{\partial F_k / \partial L_k}{\partial F_k / \partial K_k}$, $\tilde{P}_k = P_k / \gamma$, тоді $\tilde{P}_k \eta_k(t,k_k) = 1$, тобто оптимальна фондоозброєність залежить тільки від відношення ціни зношення фондів до ціни праці .

Зокрема, для виробничої функції Кобба- Дугласа $F_k = a_k e^{\sigma_k t} (K_k)^{\alpha_k} (L_k)^{\beta_k}$ маємо

$$\eta_k(t,k_k) = \frac{\beta_k}{\alpha_k} k_k \quad k_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k} (\tilde{P}_k)^{-1}. \tag{14}$$

Позначивши $\tilde{h}_k = h_k / \gamma$, $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k / \gamma$, з (11) отримаємо

$$\tilde{\lambda} = (E - W^T)^{-1} \tilde{H},\; \tilde{h}_k = \left(\frac{\partial F_k\,(t,K_k,L_k)}{\partial L_k} \right)^{-1},\; k \in \{1,...,n\}. \tag{15}$$

Максимум (6) за I_k визначений при умові $\omega_k = \psi_k - \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j \leq 0$. Тоді

$$I_k = \begin{cases} 0, & якщо\; \psi_k - \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\lambda_j < 0, \\ > 0, & якщо\; \psi_k - \sum_{j=1}^{n} q_{jk}\lambda_j = 0. \end{cases}$$

Назвемо $k-$ту галузь розвиваючою в момент часу t, якщо $I_k(t) > 0$. Якщо всі галузі розвиваються, то

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \lambda_j,\; k \in \{1,...,n\}.$$

Тоді ціни зношення приймають вигляд

$$\tilde{P}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} (\mu_k \tilde{\lambda}_j - \nu_j),\; \nu_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{\gamma},\; k \in \{1,...,n\},\; j \in \{1,...,s\}. \tag{16}$$

Перші s рівнянь в (15) при заданих λ_j, $j \in \{1,...,s\}$ утворюють замкнену нелінійну систему з s невідомими ν_j. Позначимо через $\tilde{\nu}_j(\tilde{\lambda}_1,...,\tilde{\lambda}_s)$ розв'язок цієї системи при заданих $\tilde{\lambda}_1,...,\tilde{\lambda}_s$. Тоді для цін фондоутворюючих продуктів λ_j, $j \in \{1,...,s\}$ одержимо задачу Коші:

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_j=\gamma\tilde{\nu}_j(\lambda_1/\gamma,...,\lambda_s/\gamma), & j\in\{1,...,s\},\\ \lambda_j(0)=\lambda_{j0},\end{cases}$$

яку при заданій ціні праці $\gamma(t\geq 0)$ можна розв'язати.

Якщо відомі ціни фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(t)$, $k\leq s$, ціна праці $\gamma(t)$, $t\geq 0$, то з (16) знаходимо ціни зношення $\tilde{P}_k$, з (14) – магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t\geq 0)$, з (15) – ціни нефондоутворюючих продуктів λ_k, $k>s$. Таким чином, ціни всіх продуктів і фондів $\lambda_k(t),\psi_k(t)$, $t\geq 0$, а також магістральні фондоозброєності $k_{kmag}(t\geq 0)$ залежать від ціни праці $\gamma(t)$ та початкових значень цін фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(0)$, $k\in\{1,...,s\}$.

У випадку сталих і не залежних явно від часу початкових матриць системи (1), виробничих функцій і функції корисності магістральні значення траєкторії і керування визначаються за таким алгоритмом.

1. Задамо $\lambda_k=\lambda_{k0}e^{-\delta t}$, $k\in\{1,...,n\}$, $\gamma=\gamma_0 e^{-\delta t}$, де λ_{k0},γ_0- сталі, які необхідно визначити. Тоді $\tilde{\lambda}_k=\dfrac{\lambda_{k0}}{\gamma_0}$, $\tilde{P}_k=\sum\limits_{j=1}^{n}q_{jk}(\mu_k+\delta)\tilde{\lambda}_j$, $k\in\{1,...,n\}$ і система (15) при $k\in\{1,...,s\}$ є нелінійною системою рівнянь з s невідомими $\tilde{\lambda}_k$, $k\in\{1,...,s\}$. Позначимо її розв'язок $\tilde{\lambda}^*$. Тоді $\tilde{P}_k^*$, k_k^* відповідні цьому розв'язку значення з урахуванням рівності (14). Значення змінних $\tilde{\lambda}_j$, $j\in\{s+1,...,n\}$ обчислюємо за формулою (15).

2. Нехай $g(C)=\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k C_k$. Із (5) знаходимо C_{kmag}. Якщо значення C_k не визначені умовою (5), то маємо надлишкову галузь $k=l$. Знайдемо $\dfrac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*}=\max\limits_k\dfrac{\theta_k}{\tilde{\lambda}_k^*}$ і задамо $\gamma=\dfrac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*}$.

3. З лінійної системи $n+1$ рівняння

$$\sum_{j=1}^{n}(E-W)_{kj}f_j(t,k_j)L_j=-\sum_{j=1}^{n}(z_{kj}+b_{kj})Y_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{n}s_{kj}Y_j^{(3)}+\sum_{j=1}^{n}q_{kj}\mu_j k_j L_j+C_k,\ k\in\{1,...,n\},$$

$$\sum_{k=1}^{n}L_k=N$$

знаходимо $n+1$ невідому L_k, $k\in\{1,...,n\}$; C_l при $C_k=C_k^{\min}$, $k\neq l$, $l>s$.

4. Якщо задовольняється нерівність $C_l\geq C_l^{\min}$, то знаходимо сталий оптимальний план

$$K_{kmag}=k_{kmag}L_k,\ I_{kmag}=\mu_k K_{kmag},\ X_{mag}^{(1)}=f(k_{mag})L,$$

$$X_{mag}^{(2)}=(E-A_{22}-UA_{32})^{-1}\{(A_{21}+UA_{31})X_{mag}^{(1)}-UY^{(3)}-Y^{(2)}\},$$

$$X_{mag}^{(3)}=(E-A_{33})^{-1}\{A_{31}X_{mag}^{(1)}+A_{32}X_{mag}^{(2)}-Y^{(3)}\};\ \dot{X}^{(1)}=D^{-1}I_{mag},\ \dot{X}^{(2)}=D2\cdot\dot{X}^{(1)},$$

$$\dot{X}^{(3)}=(E-A_{33})^{-1}(A_{31}+A_{32}\cdot D2)\dot{X}^{(1)},$$

$$\dot{X}_{mag}^{(i)}=\begin{cases}\dot{X}^{(i)}, & якщо\ \ \dot{X}^{(i)}>0,\\ 0, & якщо\ \ \dot{X}^{(i)}\le 0,\ i=1,2,3,\end{cases}$$

збалансований за всіма умовами постановки задачі.

Ліві граничні траєкторії знаходяться з відповідних задач Коші (1). Розв'язавши їх, отримаємо

$$K_k(t)=\frac{I_k}{\mu_k}+(K_{k0}-\frac{I_k}{\mu_k})e^{-\mu_k t},\ k\in\{1,...,n\}.$$

Перетин лівої граничної траєкторії з магістраллю дає точку перемикання τ. Її можна визначити з такої задачі математичного програмування:

$$\min\tau,\ 0\le\frac{\mu_k(K_{kmag}^{*}-K_{k0}e^{-\mu_k\tau})}{1-e^{-\mu_k\tau}}\le I_{kmag}^{*},\ \tau\ge 0,$$

де

$$I_{kmag}^{*}=\begin{cases}I_{kmag}, & K_{k0}\le K_{kmag},\\ \dfrac{K_{k0}}{K_{kmag}}I_{kmag}, & K_{k0}>K_{kmag},\end{cases}\qquad K_{kmag}^{*}=\begin{cases}K_{kmag}(1-\varepsilon_k), & K_{k0}\le K_{kmag},\\ K_{kmag}(1+\varepsilon_k), & K_{k0}>K_{kmag}.\end{cases}$$

Оскільки кожна компонента лівої крайової траєкторії $K_k(t)$ при прямуванні t до безмежності наближається знизу при $K_{k0}\le K_{kmag}$ або зверху $K_{k0}>K_{kmag}$ до відповідної компоненти магістралі K_{kmag} і їх не перетинають, тому введені досить малі додатні величини ε_k, щоб ліва крайова траєкторія перетинала $K_{kmag}(1-\varepsilon_k)$ при $K_{k0}\le K_{kmag}$ або $K_{kmag}(1+\varepsilon_k)$ при $K_{k0}>K_{kmag}$.

Після визначення точки перемикання τ можна знайти компоненту лівого керування за формулою:

$$I_{kl}=\frac{\mu_k(K_{kmag}^{*}-K_{k0}e^{-\mu_k\tau})}{1-e^{-\mu_k\tau}}.$$

Наведемо результати дослідження динамічної узагальненої моделі міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням при таких даних: $n=3$, $\mu_1=0{,}07$, $\mu_2=0{,}04$, $\mu_3=0{,}05$; $\sigma_1=0{,}08$, $\sigma_2=0{,}09$, $\sigma_3=0{,}07$; $\delta=0{,}05$; $s=1$; $\theta_1=0{,}1$, $\theta_2=0{,}2$, $\theta_3=0{,}3$; $N=30$; $F_1(K_1,L_1)=10(K_1)^{1/2}(L_1)^{1/2}$, $F_2(K_2,L_2)=12(K_2)^{1/3}(L_2)^{2/3}$, $F_3(K_3,L_3)=15(K_3)^{1/4}(L_3)^{3/4}$;

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0,003 & 0,05 & 0,099\\ 0,07 & 0,003 & 0,09\\ 0,03 & 0,07 & 0,0056\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0,03 & 0,02 & 0,01\\ 0,09 & 0,025 & 0,03\\ 0,06 & 0,059 & 0,06\end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix}0,04 & 0,02 & 0,05\\ 0,02 & 0,085 & 0,073\\ 0,18 & 0,045 & 0,025\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0,0001 & 0,0004 & 0,00043\\ 0,0002 & 0,0006 & 0,0006\\ 0,0003 & 0,0007 & 0,00076\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}0,001 & 0,1 & 0,06\\ 0,08 & 0,05 & 0,45\\ 0,07 & 0,087 & 0,004\end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix}0,1 & 0,6 & 0,13\\ 0,2 & 0,3 & 0,06\\ 0,46 & 0,5 & 0,8\end{pmatrix},$$

$$A_{31}=\begin{pmatrix}0,0008 & 0,00048 & 0,0009\\ 0,00057 & 0,0008 & 0,0007\\ 0,00073 & 0,00027 & 0,00064\end{pmatrix},\ A_{32}=\begin{pmatrix}0,002 & 0,034 & 0,012\\ 0,08 & 0,045 & 0,023\\ 0,048 & 0,075 & 0,003\end{pmatrix},\ A_{33}=\begin{pmatrix}0,13 & 0,02 & 0,05\\ 0,67 & 0,5 & 0,03\\ 0,08 & 0,9 & 0,5\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}0,037 & 0,4 & 0,05\\ 0,02 & 0,1 & 0,03\\ 0,06 & 0,01 & 0,4\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0,031 & 0,3 & 0,03\\ 0,09 & 0,5 & 0,02\\ 0,05 & 0,01 & 0,5\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}0,028 & 0,51 & 0,42\\ 0,09 & 0,7 & 0,011\\ 0,048 & 0,01 & 0,7\end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ Y^{(2)}=\begin{pmatrix}0,005\\ 0,004\\ 0,003\end{pmatrix},\ Y^{(3)}=\begin{pmatrix}0,001\\ 0,002\\ 0,006\end{pmatrix};$$

$$K_{10}=40,\ K_{20}=55,\ K_{30}=45;\ C_1^{\min}=10,\ C_2^{\min}=12,\ C_3^{\min}=15.$$

В результаті розрахунків отримали магістраль:

– ціни зношення $\tilde{P}_1=0,118$, $\tilde{P}_2=0,102$, $\tilde{P}_3=0,094$;

– ціни продуктів $\tilde{\lambda}_1=0,788$, $\tilde{\lambda}_2=0,78$, $\tilde{\lambda}_3=0,979$;

– надлишкова галузь $l=3$;

– початкове значення ціни праці $\gamma_0=0,307$;

– початкові значення цін продуктів $\lambda_{10}=0,242$, $\lambda_{20}=0,239$, $\lambda_{30}=0,3$;

– трудові ресурси $L_1=5,365$, $L_2=12,361$, $L_3=12,274$;

– невиробниче споживання $C_1=10$, $C_2=12$, $C_3=25,275$;

– капітал $K_1=45,46$, $K_2=59,532$, $K_3=43,339$;

– валовий випуск $X_1^{(1)}=156,164$, $X_2^{(1)}=249,189$, $X_3^{(1)}=252,382$;

– створений рукотворний капітал $X_1^{(2)}=518,04$, $X_2^{(2)}=773,446$, $X_3^{(2)}=1098$;

– знищені забруднювачі $X_1^{(3)}=109,352$, $X_2^{(3)}=405,717$, $X_3^{(3)}=920,798$;

– приріст випуску продукції $\dot{X}_1^{(1)}=6,381$, $\dot{X}_2^{(1)}=1,45$, $\dot{X}_3^{(1)}=0$;

– приріст рукотворного капіталу $\dot{X}_1^{(2)}=5,817$, $\dot{X}_2^{(2)}=8,684$, $\dot{X}_3^{(2)}=12,332$;

– приріст знищеного забруднення $\dot{X}_1^{(3)}=1,229$, $\dot{X}_2^{(3)}=4,556$, $\dot{X}_3^{(3)}=10,343$;

– кінцева продукція $Y_1^{(1)} = 17,73$, $Y_2^{(1)} = 12$, $Y_3^{(1)} = 25,275$;

– інвестиції $I_1 = 3,182$, $I_2 = 2,381$, $I_3 = 2,167$;

– лівий момент перемикання $\tau = 3,25$;

– ліве керування за інвестиціями $I_{1l} = 3,163$, $I_{2l} = 0,865$, $I_{3l} = 0,532$.

4. Висновки

Економічне обґрунтування для отриманих результатів таке: спочатку на часовому проміжку $(0;\ 3,25)$ перша галузь виробництва вкладає 74,282% капіталу на споживання і 25,718% на накопичення щодо кінцевої продукції, а друга і третя галузі вкладають весь свій капітал на споживання, накопичення капіталу не відбувається. Починаючи з моменту перемикання $\tau = 3,25$ розвиток усіх галузей іде за магістральним режимом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика: Пер. с англ. / Автор предисл. и науч. ред. А.Г. Гранберг. – М.: ОАО издательство «Экономика», 1997. – 479 с.
2. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Знание, 1990. – 430 с.
3. Ляшенко І.М. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва “Витрати-випуск” // International Conference: Dynamical system modelling and stability investigation. – Kyiv. – 2003. – May 27–30. – C. 200.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.