ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Г.Н. Кичигин

Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия

E-mail: king@iszf.irk.ru

Найдены аналитические решения уравнений, описывающие установившиеся одномерные нелинейные ленгмюровские волны в холодной бесстолкновительной плазме с неподвижными ионами в отсутствие магнитного поля. Полученные формулы определяют все характеристики исследуемых периодических волн: частоту, длину волны и профиль потенциала.

PACS: 52.35.-g

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время особенно интенсивно исследуются возникающие за счет разделения зарядов в плазме волны большой амплитуды (см., например, основательный обзор [1] и цитируемую там литературу). Эти нелинейные волны формируются за счет воздействия на плотную плазму либо ультрарелятивистских пучков частиц, либо мощного лазерного излучения. Впервые основополагающие результаты при исследовании нелинейных волн были получены в работах [2-4], где рассматривались установившиеся одномерные волны в безграничной плазме, состоящей из электронов, которые считались холодными, и ионов, которые предполагались бесконечно тяжелыми и неподвижными. Позднее аналогичные результаты для ленгмюровских волн были независимо получены в работе [5]. В работах [2-5] для нелинейных ленгмюровских волн получены приближенные асимптотические формулы для амплитуды электрического поля и частоты волн как функции предельной скорости электронов в волне. Величина этой скорости не определена, так как является неизвестной константой, и по этой причине полученные в [2-5] результаты фактически дают совсем мало информации о свойствах волн. В настоящей работе, используя исходные уравнения работ [2-5], мы нашли их аналитические решения. Мы показали, что профиль и амплитуда потенциала, длина волны (частота) нелинейных волн зависят от двух параметров: 1) фазовой скорости, 2) амплитуды электрического поля волн.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Так же, как и в работах [2-5], рассмотрим плазму с холодными электронами и неподвижными ионами одного сорта в отсутствие внешнего магнитного поля. Для одномерной задачи предположим, что волна распространяется в направлении оси x со скоростью u. В такой постановке все переменные зависят от координаты x и времени t. Приведем используемые в [2-5] уравнения:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_0 - n), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} = -eE = e\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad (3)$$

Здесь E, φ – электрическое поле и потенциал; n_0 – плотность ионов; e, n, v, p – абсолютная величина заряда, плотность, скорость и импульс электронов, соответственно. Для импульса используется релятивистская формула: $p = mv\gamma_e$, где $\gamma_e=(1-\beta_e^2)^{-1/2}$, $\beta_e=v/c$, m – масса покоя электрона (c – скорость света). К уравнениям (1)-(3) присоединим еще уравнение для полной энергии электрона $mc^2\gamma_e$:

$$mc^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\gamma_e + v\frac{\partial}{\partial x}\gamma_e\right) = -eEv. \qquad (4)$$

Обозначив плазменную частоту электронов через $\omega_p=(4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$, перейдем в уравнениях (1)-(4) к новым безразмерным переменным $\xi=(x-ut)\,\omega_p/c$, $\psi=e\varphi/(mc^2)$. После такого перехода все переменные задачи будут функцией только безразмерной величины ξ. Используя следующее из (2) соотношение $n_0 u = n(u-v)$, из уравнений (1), (3)-(4) получим законы сохранения

$$E^2 + 8\pi n_0 mc^2(\gamma_e - 1) = E_0^2, \qquad (5)$$

$$\gamma_e - 1 = \beta\beta_e\gamma_e + \psi. \qquad (6)$$

Здесь $\beta = u/c$, E_0 – амплитуда электрического поля, которую принимает поле волны в точках, где $n=n_0$, $v=0$, $\gamma_e=1$, $\psi=0$. Закон сохранения (5) совпадает с тем, который получен в работах [2-5]. Соотношение (6), в котором фигурирует потенциал волн, по непонятным причинам не было учтено в работах [2-5], а ведь именно оно позволяет решить задачу до конца, как это показано ниже.

Подставим в соотношение (5) величину γ_e, выраженную с помощью (6) через потенциал ψ, закон сохранения (5) можно записать в виде

$$V(\psi,\gamma) = \varepsilon - E^2/2 = \\ =\gamma^2(1+\psi) - 1 - \beta\gamma\sqrt{\gamma^2(1+\psi)^2 - 1}, \qquad (7)$$

где введены обозначения: $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ – параметр, связанный со скоростью волны, $E = -d\psi/d\xi$ – безразмерная величина электрического поля, $\varepsilon = E_0^2/2 = (d\psi/d\xi)_0^2/2 = E_0^2/(8\pi n_o mc^2)$ – параметр, связанный с амплитудой электрического поля волн. Функция $V(\psi,\gamma)$ играет роль эффективного потенциала для рассматриваемой задачи, причем величина ε – это энергия воображаемой частицы с массой, равной единице. Обратим внимание на то, что появление в задаче параметра $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ свидетельствует о том, что искомые решения в виде периодических волн потенциала возможны только при условии $u \le c$. Как мы покажем ниже, такие решения существуют и, следовательно, описываемые этими решениями волны должны иметь фазовую скорость не больше скорости света.

Нетрудно видеть, что функция $V(\psi,\gamma)$ определена в ограниченной области значений переменной ψ, а именно на отрезке $-(1-1/\gamma) \le \psi \le \infty$. Введем обозначение $\psi\_* = -(1-1/\gamma)$. Из (7) следует, что при $\psi=\psi\_*$ величина ε имеет максимальное значение: $\varepsilon_m = \gamma - 1$. Отсюда следует общеизвестный результат [1]: при заданной фазовой скорости волны, т.е. при заданной величине параметра γ, решение рассматриваемой задачи существует только для нелинейных волн, имеющих амплитуду электрического поля меньше или равной предельной величины, которая равна $E_m = [8\pi n_o mc^2(\gamma-1)]^{1/2}$. Как известно [6], нелинейная ленгмюровская волна формируется как результат конкуренции нелинейного укручения и дисперсионного расплывания некоторого начального возмущения, поэтому существование предельной амплитуды можно объяснить тем, что при амплитуде волны, больше предельной E_m, дисперсия не может остановить нелинейное укручение и волна "опрокидывается". В связи с этим величину E_m часто называют релятивистским полем опрокидывания. Для того, чтобы отразить тот факт, что величина амплитуды электрического поля E_0 для заданной величины скорости u (или γ) не может быть больше E_m, представим параметр ε в виде

$\varepsilon=E_0^2/(8\pi n_o mc^2)= \theta\,(\gamma-1)$, где $\theta =\varepsilon/\varepsilon_m = (E_0/E_m)^2 \le 1$.

3. ПРОФИЛЬ ВОЛН

Из (7) следует, что профиль потенциала волны – это периодическая структура, имеющая положительный размах потенциала ψ_+ и отрицательный – $\psi\_$, величины которых определяются из уравнения $\varepsilon - V(\psi,\gamma) = 0$:

$$\psi_+ = \varepsilon + \beta\sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}\,,\ \psi\_ = \varepsilon - \beta\sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}\,. \qquad (8)$$

Определим амплитуды ψ_+, $\psi\_$ при различных значениях параметров θ и γ. Для нелинейных волн при $\theta = 1$, т.е. для волн, имеющих предельную величину электрического поля $\varepsilon = \varepsilon_m = \gamma - 1$, размах колебаний потенциала определяется формулами

$$\psi\_* = 1/\gamma - 1,\ \psi_+* = 2\gamma - 1/\gamma - 1. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что для волн с релятивистским фактором $\gamma >> 1$, амплитуды $\psi\_* \approx -1$, $\psi_+* \approx 2\gamma$, т.е. для релятивистских волн с предельной амплитудой электрического поля отрицательный размах колебаний потенциала ψ_* примерно постоянен и по модулю чуть меньше единицы, а амплитуда положительного размаха ψ_+* пропорциональна величине параметра γ.

Для волн, распространяющихся с малой скоростью, т.е. при $\beta << 1$, $\gamma \approx 1$ из (9) получим

$$\psi_+* \approx 3\beta^2/2\,,\ \psi\_* \approx -\beta^2/2. \qquad (10)$$

В предельном случае, когда параметр ε бесконечно мал, т.е. для малых колебаний в яме, из (8) получим $\psi_+ \approx \beta\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon$, $\psi\_ \approx -\beta\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon$. Отсюда для волн, движущихся с малой скоростью ($\beta << 1$) и имеющих амплитуду близкую к предельной ($\theta \approx 1$) и, следовательно, для малых величин параметра $\varepsilon \approx \beta^2/2 << 1$, амплитуды ψ_+, $\psi\_$ выражаются формулами (10). Для волн же, движущихся с релятивистскими скоростями ($\beta \approx 1$), но имеющих бесконечно малую амплитуду ($\theta << 1$) при $\varepsilon << 1$, отрицательная и положительная амплитуды колебаний потенциала приблизительно равны:

$$\psi\_ \approx -\psi_+ \approx \sqrt{2\varepsilon}\,. \qquad (11)$$

Амплитуды ψ_+, $\psi\_$ равны и в случае, когда $\varepsilon << 1$, $\theta << 1$, $\beta << 1$:

$$\psi\_ \approx -\psi_+ \approx \sqrt{\theta}\,\beta^2. \qquad (12)$$

Для величины параметра $\varepsilon \approx 1$ из (8) получим:

$$\psi_+ \approx 1+\beta\sqrt{3}\,,\ \psi\_ \approx 1-\beta\sqrt{3}\,.$$

Теперь рассмотрим наиболее интересный для практических приложений случай, когда параметр ε велик: $\varepsilon >> 1$. Так как $\varepsilon = \theta\,(\gamma - 1)$, а $\theta \le 1$, то условие $\varepsilon >> 1$ означает, что $\gamma >> 1$, $\beta \approx 1$, $\theta\gamma >> 1$, следовательно, из (8) получим

$$\psi_+ \approx 2\varepsilon,\ \psi\_ \approx \psi\_* \approx -1. \qquad (13)$$

Мы видим, что при $\varepsilon >> 1$ отношение $\psi_+/|\psi\_| \approx 2\varepsilon$, т.е. положительный размах колебаний потенциала по величине существенно больше отрицательного.

Из проведенного выше анализа соотношений между амплитудами ψ_+ и $|\psi\_|$ мы отметим следующую особенность: волны, для которых $\varepsilon > 1$, а также волны с предельной амплитудой электрического поля ($\theta = 1$) имеют величину положительного размаха колебаний ψ_+ всегда больше величины $|\psi\_|$.

Перейдем к исследованию профиля нелинейных волн. Мы найдем зависимость потенциала волн от координаты аналитически из соотношения

$$\xi = \int \frac{d\psi}{\sqrt{2[\varepsilon - V(\psi,\gamma)]}}, \qquad (14)$$

полученного с помощью формулы (7). Из (14) видно, что зависимость $\psi = \psi(\xi)$ можно установить, если вычислить или оценить входящий в (14) неопределенный интеграл. Мы это сделаем в разных предельных случаях. Сначала рассмотрим колебания плазмы с амплитудой, много меньшей предельной ($\theta << 1$), при $\varepsilon << 1$. Учитывая справедливые в этом случае формулы (11)-(12), будем считать, что $|\psi| < \beta < 1$. Представляя функцию $V(\psi,\gamma)$ в виде

$$V(\psi,\gamma) = \gamma^2(\psi + \beta^2 - \beta^2\sqrt{1 + 2\psi/\beta^2 + \psi^2/\beta^2}\,)$$

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2006. № 5.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (5), с.60-63.

и заменяя радикал степенным рядом, члены которого содержат величину $\psi/\beta<1$, получим с точностью до квадратичных членов:

$$V(\psi,\gamma) \approx \psi^2/(2\beta^2). \quad (15)$$

С учетом (15), из формулы (14) в этом случае имеем $\xi = Const + \beta \cdot arcSin[\psi/(\beta\sqrt{2\varepsilon})]$, откуда видно, что на пространственном размере, равном длине волны, профиль волны синусоидальный:

$$\psi(\xi) = \beta\sqrt{2\varepsilon}\ Sin(\xi/\beta). \quad (16)$$

(В формуле (16) мы положили, что потенциал $\psi = 0$ в точке $\xi = 0$). Итак, если $\theta<<1$, при $\varepsilon<<1$ профиль нелинейной волны на пространственном размере, равном длине волны, имеет форму, близкую к синусоиде.

В случае больших значений параметра $\varepsilon(\varepsilon>>1)$ амплитуды ψ_+, $|\psi\_|$ сильно различаются по величине, поэтому профили положительного и отрицательного размахов потенциала рассмотрим отдельно. Так как положительный и отрицательный профили симметричны относительно максимума потенциала, то везде ниже мы будем полагать, что $\psi=|\psi_{max}|$ при значении координаты $\xi=0$. Найдем сначала профиль потенциала волн при $\psi>0$. Так как амплитуда положительного скачка в этом случае велика: $\psi_+=2\varepsilon>>1$, будем искать зависимость потенциала от координаты, полагая $\psi>1$. Считая, что $(1+\psi)>>1/\gamma^2$, в формуле (7) для функции $V(\psi,\gamma)$ представим радикал в виде степенного ряда и в результате получим $V(\psi,\gamma) \approx \psi/2$. Подставим эту зависимость для $V(\psi,\gamma)$ при $\psi>0$ в формулу (14) и после интегрирования придем к результату: $\xi = 2\sqrt{2\varepsilon - \psi}$, откуда следует, что $\psi = 2\varepsilon - \xi^2/4$. Следовательно, электрическое поле в этом случае линейно зависит от координаты: $E=-\xi/2$. Введем обозначение для пространственной длины $\xi_+ = 2\sqrt{2\varepsilon}$, на которой потенциал изменяется от нуля до амплитудного значения ψ_+. (Как видно из приведенной ниже формулы для длины волны λ при $\varepsilon>>1$ величина $2\xi_+$ приближенно равна длине волны (обезразмеренной на величину u/ω_p): $2\xi_+ \approx \lambda/(u/\omega_p)$). Если обе части выражения $\psi=2\varepsilon - \xi^2/4$ поделить на $\psi_+ = 2\varepsilon$ и ввести обозначения $Y=\psi/\psi_+$, $\tau = \xi/\xi_+$, то получим универсальное соотношение между новыми переменными для потенциала Y и координаты τ:

$$Y = 1 - \tau^2. \quad (17)$$

Итак, для $\varepsilon>>1$ мы получили параболическую зависимость положительной части потенциала от координаты.

Найдем зависимость от координаты отрицательной части потенциала волн для $\varepsilon>>1$. При $\psi<0$, абсолютное значение потенциала $|\psi|<\beta\le 1$, поэтому можно в этом случае воспользоваться для функции $V(\psi,\gamma)$ выражением (15) и тогда из формулы (14) получим $\xi = \beta\, arc\, Sin[\psi/(\beta\sqrt{2\varepsilon})] + Const$. Так как $\beta\approx 1$ и $\psi/\sqrt{2\varepsilon}<<1$, следовательно, $\xi\approx\psi/\sqrt{2\varepsilon} + Const$. Обозначив пространственный размер $\xi\_ = 1/\sqrt{2\varepsilon}$, на котором потенциал изменяется от нуля до амплитудного значения и, полагая согласно формуле (13) $\psi\_\approx\psi\_^* \approx -1$, получим, что при $\varepsilon>>1$ отрицательная часть потенциала волны имеет пилообразную зависимость от координаты:

$$\psi \approx \psi\_(1-|\xi|/\xi\_), \quad (18)$$

а электрическое поле, следовательно, имеет прямоугольную форму. Мы видим, что для $\varepsilon>>1$ размер $\xi\_$ очень мал, а отношение пространственных масштабов $\xi_+/\xi\_$ велико: $\xi_+/\xi\_ \approx 2\psi_+/|\psi\_| \approx 4\varepsilon$. Таким образом, мы приходим к следующим общим выводам: 1) форма профиля отрицательной части потенциала нелинейных волн – это либо косинус, либо пила, либо кривые, лежащие между ними; 2) форма положительной части – преимущественно косинус и парабола, визуально мало различимые на пространственном отрезке $2\xi_+$.

4. ЧАСТОТА ВОЛН

Для рассматриваемых нами нелинейных ленгмюровских волн мы подробно рассмотрим зависимость частоты волн от параметров θ и γ. Если частота волны ω известна, то длину волны λ легко найти, так как λ и ω связаны простым соотношением $\lambda=2\pi u/\omega$. С помощью (7) для частоты волны получим формулу $\omega = \omega(\varepsilon) = \omega_p\pi\beta\sqrt{2}/J(\varepsilon,\gamma)$, где $J(\varepsilon,\gamma)$ – это интеграл $J(\varepsilon,\gamma) = \int_{\psi_-}^{\psi_+} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon - V(\psi,\gamma)}}$, в котором функция $V(\psi,\gamma)$ определяется формулой (7), а величины потенциалов $\psi\_$, ψ_+ – формулами (8). С помощью эйлеровой подстановки $\sqrt{\gamma^2(1+\psi)^2 - 1} = x^2 - \gamma(1+\psi)$ интеграл $J(\varepsilon,\gamma)$ можно привести к виду

$$J(\varepsilon,\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{\gamma(1-\beta)}} \int_b^a \frac{(x^2 - x^{-2})\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}},$$

где пределы интегрирования определяются из формул

$$a^2 = \gamma(1+\beta)(1+\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}),$$

$$b^2 = \gamma(1+\beta)(1+\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}).$$

$J(\varepsilon,\gamma)$ выражается через полный эллиптический интеграл второго рода $\boldsymbol{E}(k)$:

$$J(\varepsilon,\gamma) = 2\sqrt{2}\, a\beta[\gamma(1-\beta)]^{1/2}\boldsymbol{E}(k),$$

где $k = [1-(1+\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon})^2]^{1/2}$. Таким образом, для частоты нелинейных волн получим формулу:

$$\omega(\theta,\gamma)/\omega_p = [1+\theta(\gamma-1) - \sqrt{\theta^2(\gamma-1)^2 + 2\theta(\gamma-1)}]^{1/2}(\pi/2)/\boldsymbol{E}(k), \quad (19)$$

где $\omega_p = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$. Величина эллиптического интеграла $\boldsymbol{E}(k)$, входящего в формулу (19), изменяется в пределах от $\pi/2$ до 1, поэтому влияние $\boldsymbol{E}(k)$ на величину $\omega(\theta,\gamma)$ не столь уж существенно. Из достаточно простой формулы (19) следует очень важный вывод: частота нелинейных ленгмюровских волн контролируется двумя независимыми параметрами: $\theta = (E_0 / E_m)^2$ и $\gamma = (1 - u^2 /c^2)^{-1/2}$, первый из которых определяется квадратом отношения амплитуды электрического поля волны к предельно возможной, а второй – скоростью волны u. Из формулы (19) для нерелятивистских волн, т.е. при $\beta = 0$, следует результат, впервые полученный в [2]: частота волн не зависит ни от скорости, ни от амплитуды. Частота нелинейных слаборелятивистских ($\gamma \leq 2$) и релятивистских ($\gamma >> 1$) волн всегда меньше плазменной частоты ω_p и уменьшается как с ростом скорости, так и с ростом амплитуды волн.

Если следить за зависимостью частоты волн от скорости, то для волн, распространяющихся с малыми скоростями ($\beta << 1$), из (20) получим

$$\omega(\theta, \beta) \approx \omega_p (1 - 3\beta^2 \theta/16).$$

Частота волн в этом случае мало отличается от ω_p, а длина волны $\lambda \approx 2\pi u/\omega_p$. Как мы видели выше (формула (16)), профиль волны в этом случае близок к синусоидальному.

Когда величина $\varepsilon = \theta(\gamma - 1)$ становится больше единицы, значение эллиптического интеграла $\boldsymbol{E(k)}$ мало отличается от единицы. Для релятивистских волн ($\gamma >> 1$), когда параметр θ не слишком мал, так что произведение $\theta\gamma >> 1$, частота определится выражением

$$\omega(\theta,\gamma) \approx \omega_p \pi /(2\sqrt{2\varepsilon}) \approx \omega_p \pi /(2\sqrt{2\gamma\theta}), \quad (20)$$

а длина волны выразится формулой $\lambda = 4u\sqrt{2\gamma\theta}\ /\omega_p$.

Как мы видим, частота и длина волны в этом случае одинаково зависят от параметров θ и γ.

Проследим зависимость частоты ленгмюровских волн от параметра θ. Для волн, амплитуда которых равна предельно возможной ($\theta = 1$), получим совсем простую формулу для частоты:

$$\omega(\beta) = \omega_p (\pi/2) [(1 - \beta)/(1 + \beta)]^{1/4} /\boldsymbol{E(k)},$$

где $k = [2\beta/(1+\beta)]^{1/2}$. В противоположном случае, когда амплитуда волн бесконечно мала по сравнению с предельно возможной, полагая $\theta \to 0$ и считая, что величина $\varepsilon = \theta(\gamma - 1) << 1$, для частоты и пространственного периода ленгмюровских волн получим формулы: $\omega = \omega_p$, $\lambda = 2\pi u/\omega_p$. Таким образом, при $\varepsilon << 1$ и $\theta \to 0$ как профиль потенциала, так и формулы для ω и λ точно такие же, как и в линейной теории для плазменных колебаний в холодной плазме [6]. Однако необходимо отметить, что если в случае линейных плазменных колебаний фазовая скорость u формально может быть любой – в пределах от нуля и до бесконечности, то для нелинейных ленгмюровских волн бесконечно малой амплитуды их фазовая скорость ограничена скоростью света, а длина волны не может быть больше величины $2\pi c/\omega_p$. В этом отличие точного решения для нелинейных волн бесконечно малой амплитуды от решений, полученных в линейном приближении для ленгмюровских волн в холодной плазме. В заключение отметим, что, согласно [7], приведенными в данной работе результатами, полученными в приближении бесконечно тяжелых и неподвижных ионов, можно пользоваться только при следующем условии: параметр $\varepsilon = \theta(\gamma - 1)$ по порядку величины не должен превышать величины μ, пропорциональной отношению массы ионов плазмы к массе электронов.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В данной работе получены два основных новых результата, определяющих все свойства установившихся нелинейных ленгмюровских волн:

1. Частота нелинейных ленгмюровских волн определяется простым аналитическим выражением (19).

2. Потенциал нелинейной волны представляет собой периодическую структуру. Для $\theta << 1$ при $\varepsilon << 1$ профиль ленгмюровских волн на пространственном размере, равном длине волны, имеет синусоидальную форму (16). Для значений $\varepsilon >> 1$ профиль положительной части имеет преимущественно параболическую зависимость от координаты (17), а отрицательная часть потенциала имеет форму пилы (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Балакирев, В.И. Карась, И.В. Карась // *Физика плазмы*. 2002, т.28. №2, с.144.
2. А.И. Ахиезер, Г.Я. Любарский // *ДАН*. 1951, т.80, №2, с.193.
3. А.И. Ахиезер, Р.В. Половин // *ДАН*. 1955, т.102, с.919.
4. А.И. Ахиезер, Р.В. Половин // *ЖЭТФ*. 1956, т.30, с.915.
5. A. Cavalier // *Nuovo Cimento*. 1962, v.23, p.440.
6. Л.А. Арцимович, Р.З. Сагдеев. *Физика плазмы для физиков.* М.: «Атомиздат», 1979, с.320.
7. Г.Н. Кичигин // *Физика плазмы*. 2003, т.29, №2, с.172.

THEORY OF NONLINEAR LANGMUIR WAVES

G.N. Kichigin

The analytical solutions of equations which describe the stationary one-dimensional nonlinear Langmuir waves into cold collisionless plasmas at immobile ions without a magnetic field have been found. The obtained formulae determine all characteristics of investigated periodical waves: a frequency, a wave length and potential profile.

ТЕОРІЯ НЕЛІНІЙНИХ ЛЕНГМЮРІВСЬКИХ ХВИЛЬ

Г.М. Кичигін

Знайдені аналітичні розв’язки рівнянь, що описують сталі одновимірні нелінійні ленгмюрівські хвилі у холодній беззіткневій плазмі з нерухомими іонами у відсутності магнітного поля. Отримані формули визначають всі характеристики досліджених періодичних хвиль: частоту, довжину хвилі та профіль потенціалу.