

**І. В. Янчевський,**  
д-р техн. наук

Інститут механіки  
ім. С. П. Тимошенка  
НАН України  
м. Київ, e-mail:  
yanchevsky@ukr.net

УДК 534.1:539.3

## НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

**Ключові слова:** електроружність, полога сферична оболонка, нестационарні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

*Наведено чисельно-аналітичний метод розв'язання задачі про нестационарні вісесиметричні коливання пологої сферичної оболонки, яка складена з тонких пружного та електропружного шарів, при імпульсному електромеханічному навантаженні. Постановка задачі виконана в рамках теорії тонких електропружних оболонок. Для розв'язання задачі використовуються інтегральне перетворення Лапласа за часовою координатою, розвинення шуканих функцій у ряди і методи теорії інтегральних рівнянь. Розробленим підходом задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду, розв'язання якої виконано чисельно. Наведені результати розрахунків та їх аналіз для різних варіантів закріплення краю оболонки при східчастому механічному і електричному її навантаженнях. Отримані розрахункові вирази дозволяють досліджувати коливання нестационарно навантаженого електропружного конструктивного елемента у вигляді пологої сферичної оболонки чи круглої пластини (за умови достатньо великого значення радіуса кривини поверхні з'єднання шарів) і при інших варіантах граничних умов як механічної, так і електричної групи. Викладений підхід може бути узагальнений на випадок секціонованого струмопровідного покриття електропружного шару. До переваг методу слід віднести простоту чисельної реалізації та можливість контролю точності результатів.*

### Вступ

Область практичного застосування приладів і пристроїв, які використовують у своїх конструкціях п'єзокерамічні перетворювачі енергії, на даний час дуже широка [1]. Та з усього різноманіття конфігурацій перетворювачів достатньо розповсюдженими є елементи у вигляді тонкостінних оболонок, вивченню динамічної поведінки яких приділяється значна увага [2–5]. Особливий інтерес при цьому становлять дослідження коливань при прикладанні імпульсних електромеханічних навантажень [6–9].

У даній роботі досліджуються коливання конструктивного елемента у вигляді пологої сферичної оболонки з п'єзоактивного матеріалу як при її механічному, так і електричному імпульсному навантаженні. Такі оболонки широко використовуються як фокусуючі випромінювачі у медичній техніці (ультразвукова терапія) та на виробництві (для одержання аерозолів). Серед публікацій останніх років відзначимо [10–14], які присвячені вивченню зв'язаних електропружних процесів у близьких за формою п'єзоперетворювачах.

### Постановка задачі

Розглядається в полярних координатах  $(r, \theta)$  полога сферична оболонка, яка складена з жорстко з'єднаних між собою зовнішнього пружного шару товщиною  $h_m$  і внутрішнього електропружного шару товщиною  $h_p$ . Останній виготовлений з поляризованої за товщиною п'єзокераміки класу бтт. Оболонка обмежена в плані колом радіусу  $l$ , а радіус кривизни поверхні з'єднання шарів дорівнює  $R_1$ . Припускається, що край оболонки шарнірно закріплений або жорстко защемлений, а її коливання збуджуються механічним вісесиметричним нормальним навантаженням  $q_0(t)$  ( $t$  – час). Область розподілу навантаження визначається радіусом  $l_1$ . Струмопровідні покриття п'єзокерамічного шару є суцільними нескінченно тонкими, а різниця потенціалів між ними позначена через  $V_0(t)$ . При цьому вважається, що електростатичний потенціал на внутрішньому покритті дорівнює нулеві. У загальному випадку  $V_0(t)$  може збуджуватися зовнішнім джерелом (режим зворотного п'єзо ефекту) або виникати в результаті деформацій електропружного шару (режим прямого п'єзо ефекту).

Початкові умови задачі однорідні (до моменту часу  $t = 0$  конструктивний елемент перебуває в стані спокою).

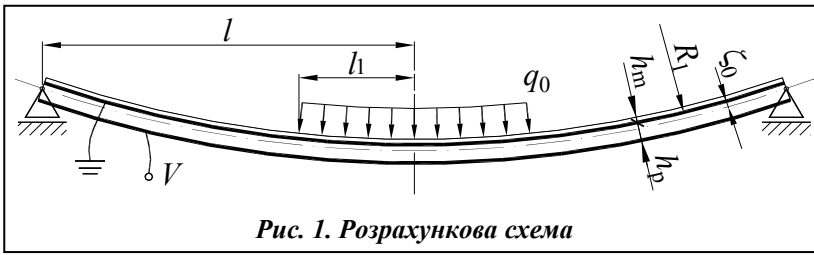


Рис. 1. Розрахункова схема

Для моделювання електропружного стану оболонки через її тонкостінність використовуються механічні гіпотези Кірхгофа–Лява для двошарової структури в цілому, які доповнені відповідної точності гіпотезами щодо характеристик електричного поля в електропружному шарі [15].

У результаті розглянута вісесиметрична задача зводиться до розв’язання системи рівнянь, які визначають рівновагу елементарного об’єму оболонки з урахуванням сил інерції [16]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{R_0} + q_r &= m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r}Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial r} - \frac{N_r + N_\theta}{R_0} + q_\zeta &= m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad ; \\ Q_r &= \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) + \frac{\partial M_r}{\partial r}, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $w$  і  $u_0$  – нормальні та радіальні переміщення точок поверхні зведення, положення якої визначається відстанню  $\zeta_0$  відносно поверхні з’єднання шарів (рис. 1);  $q_r(r, t)$  і  $q_\zeta(r, t)$  – радіальна та нормальна складові зовнішнього механічного навантаження;  $R_0 = R_1 + \zeta_0$ ;  $m_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m$  – маса елемента, що віднесена до одиниці поверхні;  $\rho_j$  – густини матеріалів. Значення  $\zeta_0$  вибирається таким чином, щоб забезпечити найбільш простий зв’язок між зусиллями і моментами та компонентами деформації поверхні зведення [6]. В результаті будуть справедливі такі вирази

$$\begin{aligned} N_r &= D_N(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) + e_1 V, & M_r &= \bar{D}(\kappa_r + \bar{\nu}\kappa_\theta) + e_1 a_p V, \\ N_\theta &= D_N(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + e_1 V, & M_\theta &= \bar{D}(\bar{\nu}\kappa_r + \kappa_\theta) + e_1 a_p V. \end{aligned} \tag{2}$$

Розрахункові вирази для вхідних в (2) сталих коефіцієнтів збігаються з наведеними в [6], тому в даній роботі не наводяться.

З використанням геометричних співвідношень  $\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{R_0} w$ ;  $\varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r} + \frac{1}{R_0} w$ ;

$\kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_0}{\partial r}$  і  $\kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{R_0} \frac{u_0}{r}$  з системи (1) отримаємо систему диференціальних рівнянь руху у переміщеннях

$$\begin{aligned} \bar{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + m_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\bar{D}}{R_0} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^3} \right) &= \\ = q_\zeta - e_1 \left[ \frac{2}{R_0} V - a_p \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right], & \\ D_N \frac{1 + \nu}{R_0} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{D'_M}{R_0} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \left( D_N + \frac{\bar{D}}{R_0^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_0}{r^2} \right) - m_h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= \\ = -q_r - e_1 \left( 1 + \frac{a_p}{R_0} \right) \frac{\partial V}{\partial r}. & \end{aligned} \tag{3}$$

При цьому для зусиль та різниці потенціалів між розімкнутими електродами електропружного шару (див. [15]) будуть справедливі такі вирази:

$$M_r = -\bar{D} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v'}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{R_0} \frac{u_0}{r} \right) + e_1 a_p V, \quad N_r = D_N \left( \frac{1+v}{R_0} w + \frac{\partial u_0}{\partial r} + v \frac{u_0}{r} \right) + e_1 V, \quad (4)$$

$$V_0 = \frac{2e_1 h_p}{\varepsilon_3 l} \left[ \left( 1 + \frac{a_p}{R_0} \right) u_0 - a_p \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=l} + \frac{4e_1 h_p}{R_0 \varepsilon_3 l^2} \int_0^l w r dr.$$

Якщо тепер увести безрозмірні змінні за формулами

$$\tilde{w} = \frac{w}{l}, \quad \tilde{u}_0 = \frac{u_0}{l}, \quad \tilde{a}_p = \frac{a_p}{l}, \quad \tilde{R} = \frac{R_0}{l}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{l}, \quad \tilde{l} = 1,$$

$$\tilde{N}_r = \frac{N_r}{D_N}, \quad \tilde{q}_* = \frac{q_* l}{D_N (1 + \delta_5)}, \quad \tilde{M}_r = -\frac{l}{D} M_r, \quad \tilde{V} = -\frac{e_1 l^2}{D} V,$$

то вхідна система диференціальних рівнянь (3) з урахуванням сталості електростатичного потенціалу уздовж радіальної координати (струмопровідні покриття є суцільними) набуде вигляду

$$\beta_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^3} \right) = \beta_0^4 q_\zeta + \frac{2}{R} V, \quad (5)$$

$$-\delta_1 \frac{\partial w}{\partial r} + \delta_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^2} = q_r.$$

Слід зазначити, що знак над безрозмірними величинами тут і далі опущений. Граничні умови механічної групи у випадку шарнірного закріплення краю оболонки

$$w|_{r=l} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{R} \frac{u_0}{r} + a_p V \right) \Big|_{r=l} = 0, ; \quad (6)$$

$$\left( \frac{1+v}{R} w + \frac{\partial u_0}{\partial r} + v \frac{u_0}{r} - \delta_6 V \right) \Big|_{r=l} = 0.$$

Вхідні в (5) і (6) сталі коефіцієнти такі:

$$\delta_1 = \frac{1+v}{R(1+\delta_5)}, \quad \delta_2 = \frac{1}{R\beta_0^4}, \quad \beta_0^4 = \frac{1+\delta_5}{\delta_6}, \quad \delta_6 = \frac{\bar{D}}{l^2 D_N}, \quad \delta_5 = \frac{\delta_6}{R^2}.$$

Для замикання постановки розглянутої задачі рівняння (5) і (6) необхідно доповнити нульовими початковими умовами ( $w|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \partial w / \partial t|_{t=0} = \partial u_0 / \partial t|_{t=0} = 0$ ) і граничною умовою електричної групи. Так, при роботі електропружного шару в режимі зворотного п'єзоefекту функція  $V_0(t)$  вважається відомою, при закорочених електродах  $V_0 = 0$ , а при розімкнутих електродах, на підставі (4),  $V_0$  визначається виразом

$$V_0 = \gamma_1 \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{a_p}{R} \right) u_0 - a_p \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=l} + \frac{2}{R} \int_0^l w r dr \right\}, \quad (7)$$

яка відповідає рівності нулевій струму зсуву в електропружному шарі ( $\gamma_1 = \frac{2e_1^2 h_p l^2}{\varepsilon_3 D'_M}$ ).

Очевидно, що при жорсткому заземленні краю оболонки ( $w|_{r=l} = 0$ ;  $\partial w / \partial r|_{r=l} = 0$ ;  $u_0|_{r=l} = 0$ ) або дуже великих  $R$  рівність (7) дещо спрощується, а у випадку збігу цих факторів різниця потенціалів не збуджується ( $V_0 \equiv 0$ ).

**Метод розв'язання**

Для розв'язання задачі переміщення  $w$  і  $u_0$  шукаються у вигляді сум «квазістатичних» і «динамічних» складових [17], останні з яких записуються рядами за функціями Бесселя І-го роду

$$w(r, t) = a_0(t)(r^2 - l^2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) J_0(\lambda_k r),$$

$$u_0(r, t) = b_0(t)r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) J_1(\lambda_k r),$$
(8)

де  $\lambda_k$  – додатні корені рівняння  $J_0(\lambda_k l) = 0$ , які розташовані в порядку зростання;  $a_k, b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Функції електричної  $V(r, t) = V_0(t)$  (див. (5)) і механічної  $q_\zeta(r, t) = q_0(t)H(l_1 - r)$  ( $H$  – одинична функція Хевісайда) зовнішніх навантажень ( $q_r = 0$ ) зображуються рядами Фур'є-Бесселя

$$V(r, t) = V_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(3)} J_0(\lambda_k r), \quad q_\zeta(r, t) = q_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(0)} J_0(\lambda_k r),$$
(9)

у яких  $\chi_k^{(0)} = \frac{2l_1}{\lambda_k l^2} \frac{J_1(\lambda_k l_1)}{J_1^2(\lambda_k l)}$ ;  $\chi_k^{(3)} = \frac{2}{l \lambda_k J_1(\lambda_k l)}$ .

Після підстановки розв'язків (8) і (9) у рівняння (5) і застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом з урахуванням нульових початкових умов ( $s$  – комплексний параметр перетворення) для невідомих коефіцієнтів розвинень  $a_k$  і  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в області зображень нескладно отримати систему алгебраїчних рівнянь

$$a_k^L(s)(s^2 + \varphi_k^{(3)}) + b_k^L(s) \frac{\lambda_k^3}{R\beta_0^4} = q_0^L(s)\chi_k^{(0)} + V_0^L(s)\chi_k^{(4)} + a_0^L(s)s^2\chi_k^{(5)},$$

$$a_k^L(s)(\delta_1\lambda_k + \delta_2\lambda_k^3) + b_k^L(s)(s^2 + \varphi_k^{(2)}) = a_0^L(s)\chi_k^{(6)} + b_0^L(s)s^2\chi_k^{(7)},$$
(10)

у яких були введені такі позначення:

$$\chi_k^{(4)} = \frac{2\chi_k^{(3)}}{R\beta_0^4}, \quad \chi_k^{(5)} = \frac{J_1(\lambda_k l)(2 - l^2) + l^2 J_3(\lambda_k l)}{\lambda_k l J_1^2(\lambda_k l)}, \quad \chi_k^{(7)} = \frac{-2J_3(\lambda_k l)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k l)}, \quad \chi_k^{(6)} = -2\delta_1\chi_k^{(7)}.$$

Розв'язок системи (10), у якій верхнім індексом  $L$  позначені трансформовані за Лапласом функції, нескладно записати в зручному для наступної побудови оригіналів вигляді

$$a_k^L(s) = q_0^L(s)\chi_k^{(0)} I_k^{(2)L}(s) + V_0^L(s)\chi_k^{(4)} I_k^{(2)L}(s) + a_0^L(s)\chi_k^{(5)} [1 - \varphi_k^{(3)} I_k^{(5)L}(s)] - b_0^L(s)\chi_k^{(7)} \frac{\lambda_k^3}{R\beta_0^4} I_k^{(0)L}(s),$$
(11)

$$b_k^L(s) = -[q_0^L(s)\chi_k^{(0)} + V_0^L(s)\chi_k^{(4)}](\delta_1\lambda_k + \delta_2\lambda_k^3) I_k^{(1)L}(s) + a_0^L(s) \frac{\chi_k^{(6)}\varphi_k^{(3)}}{\varphi_k^{(4)}} I_k^{(4)L}(s) + b_0^L(s)\chi_k^{(7)} (1 - \varphi_k^{(2)} I_k^{(6)L}(s))$$

Тут  $I_k^{(1)L}(s) = \frac{1}{D_k(s)}$ ;  $I_k^{(\kappa)L}(s) = \frac{s^2 + \varphi_k^{(\kappa)}}{D_k(s)}$  ( $\kappa \neq 1$ );  $\varphi_k^{(0)} = 0$ ;  $\varphi_k^{(2)} = \lambda_k^2$ ;  $\varphi_k^{(3)} = \frac{\lambda_k^4}{\beta_0^4}$ ;

$$\varphi_k^{(4)} = \frac{\chi_k^{(6)}\varphi_k^{(3)}}{\chi_k^{(6)} - \chi_k^{(5)}(\delta_1\lambda_k + \delta_2\lambda_k^3)}; \quad \varphi_k^{(5)} = \left( \delta_k^{(8)} + \frac{\chi_k^{(6)}\lambda_k^3}{\chi_k^{(5)}R\beta_0^4} \right) / \varphi_k^{(3)}; \quad \varphi_k^{(6)} = \frac{\delta_k^{(8)}}{\varphi_k^{(2)}}; \quad D_k(s) = s^4 + s^2\delta_k^{(7)} + \delta_k^{(8)};$$

$$\delta_k^{(7)} = \varphi_k^{(2)} + \varphi_k^{(3)}; \quad \delta_k^{(8)} = \varphi_k^{(3)} \left( \varphi_k^{(2)} \left( 1 - \frac{\delta_2}{R} \right) - \frac{\delta_1}{R} \right).$$

Очевидно, що прийнятий вид розв'язку для функції  $w$  забезпечує виконання лише першої граничної умови (6) щодо рівності нулеві прогину на контурі оболонки. Для наближеного задоволення другого і третього граничних умов виступають функції  $a_0(t)$  і  $b_0(t)$ . Для їх обчислення розв'язки

(8) підставляються в трансформовані за Лапласом згадані умови, які з урахуванням залежностей між функціями Бесселя та їх похідними можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} a_0^L(s) + \frac{1-\bar{\nu}}{2l(1+\bar{\nu})} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \lambda_k J_1(\lambda_k l) + \frac{a_p - \delta_6/R}{2(1+\bar{\nu})} V_0^L(s) &= 0, \\ b_0^L(s) - \frac{1-\nu}{l(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) J_1(\lambda_k l) - \frac{\delta_6}{1+\nu} V_0^L(s) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

У випадку, коли функція  $V_0(t)$  є відомою, на підставі системи (12) з урахуванням зв'язків (11) між фігуруючими в (8) коефіцієнтами нескладно отримати алгебраїчні рівняння для функцій  $a_0(t)$  і  $b_0(t)$  в області зображень

$$a_0^L(s) K_{1i}^L(s) + b_0^L(s) K_{2i}^L(s) = q_0^L(s) K_{3i}^L(s) + V_0^L(s) K_{4i}^L(s) \quad (i=1,2). \quad (13)$$

При роботі електропружного шару в режимі «холостого ходу», тобто коли для функції  $V_0(t)$  справедлива рівність (7), трансформанта  $V_0^L(s)$  у системі (13) також є невідомою. Замикаюче рівняння виходить підстановкою розв'язків (8) у рівність (7) –

$$\left(1 + \frac{a_p}{R}\right) b_0^L(s) l + \left(1 + \frac{a_p}{R}\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) J_1(\lambda_k l) - a_0^L(s) \left(2a_p l + \frac{l^4}{2R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) J_1(\lambda_k l) \left[a_p \lambda_k + \frac{2l}{\lambda_k R}\right] - \frac{1}{\gamma_1} V_0^L(s) = 0$$

і переходу в область оригіналів. Отже, при заданому електричному навантаженні  $V_0(t)$  викладеним методом задача зводиться до системи двох алгебраїчних рівнянь у просторі зображень, а при невідомій – до системи трьох рівнянь, яка подібна (13).

Явний вигляд вхідних у систему (13) трансформант  $K_{ji}^L(s)$  ( $j=1, 2, 3, 4; i=1, 2$ ) не наводиться для скорочення викладу матеріалу. Для її розв'язання здійснюється безпосередній перехід у простір оригіналів. Внаслідок обернення система (13) переходить у систему інтегральних рівнянь Вольєрра II-го роду відносно функцій  $a_0(t)$  і  $b_0(t)$

$$a_0 * K_{1i} + b_0 * K_{2i} = q_0 * K_{3i} + V_0 * K_{4i} \quad (i=1,2). \quad (14)$$

Тут використовується позначення  $X * Y = H(t) \int_0^t X(\tau) Y(t-\tau) d\tau$ . Фігуруючі у ядрах  $K_{ji}(t)$  системи інтегральних рівнянь (14) функції  $I_k(t)$  (див. (11)) знайдені аналітично з використанням таблиць операційного числення

$$I_k^{(\kappa)}(t) = \sum_{j=1}^2 \beta_k^{(\kappa,j)} \frac{\sin(\alpha_k^{(j)} t)}{\alpha_k^{(j)}}, \quad \beta_k^{(1,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)2} - \alpha_k^{(j)2}}, \quad \beta_k^{(\kappa,j)} = \frac{\Phi_k^{(\kappa)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(i)2} - \alpha_k^{(j)2}},$$

де  $\kappa \neq 1$ ;  $i, j=1,2$ ;  $i \neq j$ ;  $\alpha_k^{(j)}$  – модулі уявних коренів бікватратного рівняння  $D_k(s) = 0$  ( $D_k(s) = (s^2 + \alpha_k^{(1)2})(s^2 + \alpha_k^{(2)2})$ ).

Система інтегральних рівнянь (13) розв'язувалася чисельно. Для цього із застосуванням квадратурних формул будувався її дискретний аналог у вигляді системи алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Отримана в результаті матриця системи має блокову структуру, причому кожний блок є нижньою трикутною матрицею. Шуканий вектор СЛАР складається з підвекторів, компоненти яких апроксимують відповідні функції відповідно до такого виразу:

$$L(t) = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \mathbf{L}_m [H(t-t_{m-1}) - H(t-t_m)],$$

де  $L = \{a_0, b_0\}$ ;  $\mathbf{L}_m$  – елементи векторів, які апроксимують шукані функції на  $m$ -му часовому інтервалі  $(t_{m-1}; t_m)$ ;  $t_m = m\Delta t$  – вузли розбивки часового інтервалу;  $\Delta t$  – «крок» за часом;  $m_{\max} = E(t_{\text{inv}}/\Delta t)$ ,  $E(x)$  – ціла частина дійсного аргументу  $x$ ;  $t_{\text{inv}}$  – час дослідження ( $t \in [0; t_{\text{inv}}]$ ).

Процедура розв'язання такої системи аналогічна описаній у монографії [18], при цьому для побудови стійких до обчислювальних похибок результатів використовувався регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Маючи у своєму розпорядженні повний набір значень  $L_m$ , за виразами (8) обчислюємо деформований стан оболонки в результаті заданого нестационарного електромеханічного навантаження. При цьому на підставі інверсії рівностей (11) будуть справедливими вирази

$$a_k = q_0 * \chi_k^{(1)} I_k^{(2)} + V_0 * \chi_k^{(4)} I_k^{(2)} + a_0 \chi_k^{(5)} - a_0 * \chi_k^{(5)} \varphi_k^{(3)} I_k^{(5)} - b_0 * \chi_k^{(7)} \frac{\lambda_k^3}{R\beta_0^4} I_k^{(0)},$$

$$b_k = -q_0 * \chi_k^{(1)} (\delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3) I_k^{(1)} - V_0 * \chi_k^{(4)} (\delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3) I_k^{(1)} + a_0 * \frac{\chi_k^{(6)} \varphi_k^{(3)}}{\varphi_k^{(4)}} I_k^{(4)} + b_0 \chi_k^{(7)} - b_0 * \chi_k^{(7)} \varphi_k^{(2)} I_k^{(6)}.$$

Очевидно, що при достатньо великих значеннях радіуса кривизни поверхні зведення  $R$  розглянута оболонка стає подібною до круглої пластини радіусом  $l$  (див. також [19]). Викладена вище методика розв'язання задачі про нестационарні коливання пологої сферичної оболонки застосовна і до розв'язання аналогічної задачі для круглої пластини. Відмінною рисою є той факт, що рівняння системи (5) стають незв'язаними, а тому розв'язок для вхідних в (8) зображень невідомих коефіцієнтів  $a_k(t)$  і  $b_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) доступний без проміжних математичних операцій

$$a_k^L(s) = q_0^L(s) \chi_k^{(0)} I_k^{(3)L}(s) + a_0^L(s) \chi_k^{(5)} [1 - \varphi_k^{(3)} I_k^{(3)L}(s)],$$

$$b_k^L(s) = b_0^L(s) \chi_k^{(7)} [1 - \varphi_k^{(2)} I_k^{(2)L}(s)],$$

де  $I_k^{(\kappa)L}(s) = 1/(s^2 + \varphi_k^{(\kappa)})$  ( $\kappa = 2, 3$ ).

Перехід в область оригіналів і в цьому випадку може бути здійснений аналітично. Результат обернення такий:

$$a_k = q_0 * \chi_k^{(0)} I_k^{(3)} + a_0 \chi_k^{(5)} - a_0 * \chi_k^{(5)} \varphi_k^{(3)} I_k^{(3)}, \quad b_k = b_0 \chi_k^{(7)} - b_0 * \chi_k^{(7)} \varphi_k^{(2)} I_k^{(2)}.$$

Тут  $I_k^{(\kappa)}(t) = (\varphi_k^{(\kappa)})^{-1/2} \sin(\sqrt{\varphi_k^{(\kappa)}} t)$ .

Маючи у своєму розпорядженні наведену вище методику нескладно побудувати розв'язок задачі у випадку жорсткого защемлення краю оболонки. При цьому граничні умови жорсткого защемлення

$$w|_{r=l} = 0, \quad \partial w / \partial r|_{r=l} = 0, \quad u_0|_{r=l} = 0,$$

після підстановки в них подань (8) запишуться в області зображень у вигляді такої системи рівнянь:

$$2la_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \lambda_k J_1(\lambda_k l) = 0, \quad b_0(t) l + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) J_1(\lambda_k l) = 0.$$

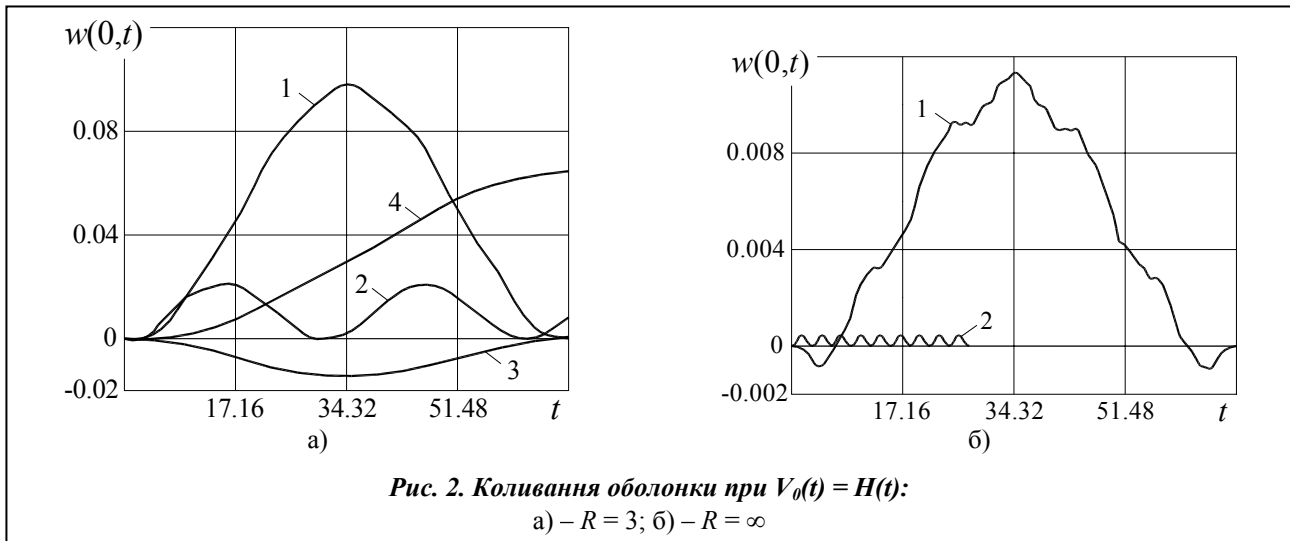
З урахуванням (15) або (16) ця система, аналогічно (14), є системою інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду відносно  $a_0(t)$  і  $b_0(t)$ . Процедура її розв'язання та відновлення деформованого стану оболонки аналогічні викладеними вище.

### Чисельні результати

Чисельні результати отримані для оболонки, шари якої виготовлені з п'єзокераміки марки PZT-5 безрозмірної товщини  $h_p = 0,04$  і титанового сплаву ВТ-6 ( $h_m = h_p/2$ ) з такими матеріальними характеристиками:  $\rho_p = 7600$  кг/м<sup>3</sup>;  $s_{11}^p = 15,4 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н;  $\nu = 0,331$ ;  $d_{13} = -178 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н;  $\varepsilon_{33}^T = 1750 \cdot \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\rho_m = 4450$  кг/м<sup>3</sup>;  $s_{11}^m = 8,85 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н (див. [6]).

При виконанні розрахунків у рядах (8) і (9) утримувалося 30 членів, що забезпечує наближення до суми ряду з похибкою не більше 2%. Точність розрахунків також контролювалася варіюванням кроку дискретизації часового інтервалу при чисельному розв'язанні системи інтегральних рівнянь (14). Параметр регуляризації в методі А. М. Тихонова обчислювався на підставі принципу нев'язки, при цьому відносний рівень нев'язки прийнятий рівним 0,05.

Як перший приклад розглянута поведінка оболонки радіусом  $R = 3$  (відношення висоти підйому оболонки до радіуса опорного кола становить 0,172), до електродів якої раптово прикладається різниця потенціалів сталого одиничного значення  $-V_0(t) = H(t)$ . При цьому припускалося, що механічне навантаження відсутнє ( $q_0 = 0$ ). Обчислені за виразами (15), (14) і (8) (випадок шарнірного обпи-



рання краю) або за виразами (17), (16) і (8) (випадок жорсткого защемлення краю) нормальні переміщення в центрі оболонки ( $r = 0$ ) ілюструють криві 1 і 2 на рис. 2, а відповідно. Розв'язок даної задачі в статичній постановці (коли в розрахунковій системі рівнянь (5) знехтувані інерційні складові –  $\partial^2(\cdot)/\partial t^2 = 0$ ) значення переміщення  $w = w_{st}$  у точці  $r = 0$  шарнірно закріпленої уздовж краю електрично навантаженої оболонки при  $V_0 = 1$  становить 0,047.

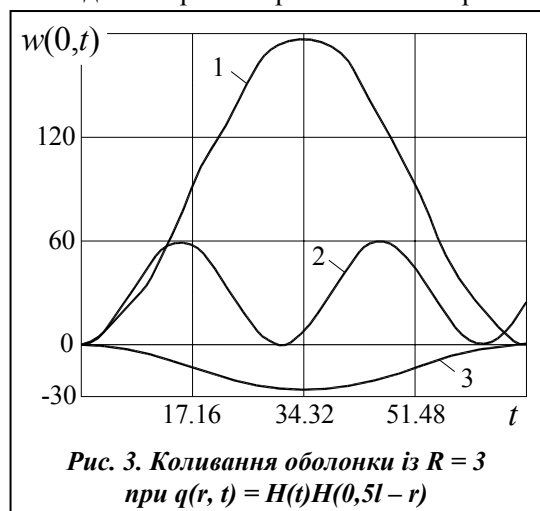
Зі зменшенням кривизни розглянутого перетворювача максимальні значення переміщення в точці  $r = 0$  для прийнятого раніше електричного навантаження ( $V_0(t) = H(t)$ ) зменшуються. Зокрема, при радіусі  $R \rightarrow \infty$  амплітуда  $w(0, t)$  зменшилася в приблизно 9 разів –  $w_{st} = 0,005$  (крива 1, рис. 2, б). Радіальне переміщення  $u_r$  на краю такої пластини ( $r = l$ ) на відміну від оболонки з  $R = 3$  (крива 3, рис. 2, а) не має чітко вираженої низькочастотної складової (крива 2, рис. 2, б). При жорсткому защемленні краю згинні коливання, які обумовлені електричним сигналом, не збуджуються.

Слід також зазначити, що й за відсутності пружного, п'єзоелектрично пасивного шару ( $h_m = 0$ ) прогини оболонки із шарнірно закріпленим краєм зменшуються, незважаючи на зниження згинної жорсткості такої оболонки (крива 4, рис. 2, а). Цей ефект обумовлений відсутністю електричної складової у виразі для згинних моментів  $M_r$  і  $M_\theta$  у випадку збігу поверхні зведення з серединною поверхнею електропружного шару ( $a_p = 0$ ).

Як другий приклад розглянута поведінка оболонки, на яку діє рівномірно розподілений тиск східчастого профілю –  $q_0(t) = H(t)$ . При цьому вважалось, що оболонка електрично не навантажена ( $V_0 = 0$ ), а область прикладання механічного навантаження визначається радіусом  $l_1 = 0,5l$ . Результати обчислень прогинів у центрі ( $r = 0$ ) оболонки радіусом  $R = 3$  наведені на рис. 3 кривими 1 і 2: крива 1 відповідає випадку шарнірного закріплення краю, крива 2 – жорсткого защемлення. Крива 3 на цьому рисунку ілюструє зміну в часі радіальних переміщень  $u_r$  на краю оболонки ( $r = l$ ).

Очевидно, що, як і у випадку електричного збудження (рис. 2), коливання механічно навантаженої оболонки з  $q_0(t) = H(t)$  відбуваються відносно статичного деформованого стану з частотою, яка близька до нижчої частоти власних згинних коливань оболонки ( $\min(\alpha)$ ). При жорсткому защемленні краю максимальні прогини зменшуються приблизно в 3 рази, а період коливань – в 2 (крива 2, рис. 3).

Режим розімкнутих електродів (4) слабо відображається на деформаціях оболонки у порівнянні з режимом короткозамкнених електродів ( $V_0 = 0$ ) – криві  $w(0, t)$  практично збігаються. Виконані розрахунки при



цьому показали сильно виражений взаємозв'язок між різницею потенціалів  $V_0$  на розімкнутих електродах електропружного шару і прогином у центрі оболонки  $w(0, t)$ , який для прийнятих геометричних і фізичних характеристик може бути приблизно описаний виразом  $V_0(t) \approx -0,0585 \cdot w(0, t)$ . У зв'язку з цим графіки функції  $V_0$  в даній роботі не наводяться.

У цілому викладений метод розв'язання задачі дозволяє оцінити вплив геометричних параметрів на характеристики зв'язаних електропружних процесів у розглянутій біморфній оболонці та досліджувати її коливання при довільному законі зміни в часі зовнішнього електромеханічного навантаження. До переваг викладеного методу слід віднести простоту чисельної реалізації та можливість контролю точності результатів.

### Висновки

У даній роботі викладено чисельно-аналітичний метод розв'язання задачі про нестационарні вісесиметричні коливання конструктивного елемента у вигляді пологої сферичної оболонки, яка складена з тонких пружного і електропружного шарів. Рівняння коливань та граничні умови записані в рамках теорії тонких електропружних оболонок, що ґрунтується на узагальнених гіпотезах Кірхгофа-Лява. Розробленим підходом задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду, при чисельному розв'язанні якої застосовні класичні обчислювальні процедури.

Викладений підхід може бути узагальнений на випадок секціонованого струмопровідного покриття електропружного шару. До переваг викладеного методу слід віднести простоту чисельної реалізації та можливість контролю точності результатів. Певний інтерес для практичних застосувань становлять задачі керування коливаннями оболонок розглянутого конструктивного виконання, при розв'язанні яких також можуть бути використані наведені в даній роботі результати.

### Література

1. Qiu, J. The application of piezoelectric materials in smart structures / J. Qiu, H. Ji // Int. J. of Aeronautical & Space Sc. – 2010. – Vol. 11, № 4. – P. 266–284.
2. Гузь, А. Н. Динамика систем оболочек, взаимодействующих с жидкостью / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, А. Э. Бабаев // Успехи механики: В 6-ти томах / Под ред. А. Н. Гузя. Т. 3. – К.: «А.С.К.», 2007. – С. 185–245.
3. Карлаш В. Л. Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических оболочек вращения (обзор) / В. Л. Карлаш // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 3–34.
4. Киричок, І. Ф. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів / І. Ф. Киричок, Т. В. Карнаухова // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 150–153.
5. Yang, J. S. Piezoelectric transformer structural modeling – A review / J. S. Yang // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. – 2007. – Vol. 54, № 6. – P. 1154–1170.
6. Кубенко, В. Д. Колебания незамкнутой двухслойной (металл-пъезокерамика) сферической оболочки при импульсном электромеханическом нагружении / В. Д. Кубенко, И. В. Янчевский // Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 60–73.
7. Янчевский, И. В. Нестационарные деформации электроупругой незамкнутой цилиндрической оболочки при силовом и электрическом нагружениях / И. В. Янчевский // Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 4. – С. 115–122.
8. Sheng, G. G. Active control of functionally graded laminated cylindrical shells / G. G. Sheng, X. Wang // Composite Structures – 2009. – Vol. 90, № 4. – P. 448–457.
9. Wang, H. M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems / H. M. Wang, H. J. Ding, Y. M. Chen // Int. J. Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42, № 1. – P. 85–102.
10. Ghaedi, S. K. Active control of shallow spherical shells using piezoceramic sheets / S. K. Ghaedi, A. K. Misra // SPIE Conference on Smart Structures and Integrated Systems, Newport Beach, California. – 1999. – Vol. 3668. – P. 890–912.
11. Real-time feed-forward control of low-frequency interior noise using shallow spherical shell piezoceramic actuators / V. Jayachandran, P. King, N. E. Meyer [et al.] // Smart Materials and Structures. – 1999. – Vol. 8. – P. 579–584.
12. Sabu, N. Vibrations of thin piezoelectric shallow shells: Two-dimensional approximation / N. Sabu // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 2003. – Vol. 113, № 3. – P. 333–352.
13. Tzou, H. S. Micro-sensor electromechanics and distributed signal analysis of piezo(electric)-elastic spherical shells / H. S. Tzou, P. Smithmaitrie, J. H. Ding // Mech. Systems and Signal Proc. – 2002. – Vol. 16, № 2–3. – P. 185–199.



14. Zhou, Y.-H. Active control of nonlinear piezoelectric circular shallow spherical shells / Y.-H. Zhou, H. S. Tzou // Int. J. of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37, № 12. – P. 1663–1677.
15. Механика связанных полей в элементах конструкций: [в 5 т.] / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
16. Бабаев, А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей / А. Э. Бабаев. – К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
17. Янчевский, И. В. Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Пробл. обчислювальної механіки і міцності конструкцій : Зб. наук. пр. – 2011. – Вип. 16. – С. 303–313.
18. Янютин, Е. Г. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский. – Харьков: Изд-во Харьков. автотор. ин-та, 2001. – 184 с.
19. Янчевский, И. В. Нестационарные колебания асимметричного дискового биморфа в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта / И. В. Янчевский // Пробл. машиностроения. – 2010. – Т. 13, № 6. – С. 42–47.

Надійшла до редакції 04.12.14

**Н. Г. Гармаш,**  
канд техн. наук  
Институт проблем  
машинобудування  
ім. А. М. Підгорного  
НАН України  
м. Харків,  
e-mail: garm\_n@mail.ru

УДК 539.3; 539.4

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ВАЛОПРОВОДУ ТУРБОАГРЕГАТА Т-250/300-240 ПРИ ПРОСАДЦІ ОПОР ТА МИТТЄВОМУ РОЗБАЛАНСУВАННІ

*Описується чисельне моделювання коливань валопроводу турбоагрегата Т-250/300-240 з початковими та набутими при експлуатації дефектами. Використовується методичне та програмне забезпечення, яке дозволяє визначити вібраційні характеристики дефектів із використанням стрижневих розрахункових моделей. Одержані віброознаки експлуатаційних дефектів можуть бути використані для оцінки їх наявності і розвитку на працюючому турбоагрегаті.*

**Ключові слова:** ротор, валопровід, турбоагрегат, дефект, вібраційні характеристики.

### Вступ

Енергетичне обладнання багатьох електростанцій України на цей час знаходиться на межі вичерпання ресурсу. Потужні теплофікаційні турбіни, які складають основу теплоенергетики, часто використовуються у режимах компенсації пікових навантажень, що супроводжуються підвищеним спрацюванням ресурсу. Умови експлуатації цих енергоагрегатів можуть стати причиною розвитку початкових та появи нових дефектів, що може викликати підвищення їх вібрації і призвести до руйнування. Проблема продовження надійної і безпечної експлуатації теплофікаційних турбін набуває особливого значення. Визначальним фактором при її вирішенні є достовірність даних про вібраційний стан, який є інформативним чинником появи дефектів та зміни тепломеханічних режимів роботи.

### Актуальність роботи

Для багатьох дефектів валопроводів вібраційні характеристики недостатньо визначені і потребують уточнення. Тому виявлення дефектів роторів парових турбін при експлуатації є актуальною науково-технічною проблемою, розв'язання якої пов'язано з застосуванням як теоретичних, так і експериментальних методів діагностування вібраційної навантаженості і створення систем контролю та запобігання нештатним ситуаціям [1, 2].

Аналіз динаміки роторних систем потребує проведення великої кількості розрахунків. Для валопроводів потужних турбоагрегатів, які включають у себе кілька роторів, визначення особливостей коливальних процесів, викликаних дією вимушених сил, є трудомістким. Тому необхідна побудова простих розрахункових моделей, що дозволяють відображати конструктивні особливості та реальні умови роботи турбоагрегатів.

© Н. Г. Гармаш, 2015