

<sup>1</sup> А. Я. Бомба, д-р. техн. наук<sup>2</sup> А. П. Сафоник, канд. техн. наук<sup>1</sup> Рівненський державний  
гуманітарний університет  
e-mail: abomba@ukr.net<sup>2</sup> Національний університетводного господарства та  
природокористування  
м. Рівне, e-mail: safonik@ukr.net**Ключові слова:** модель освітлення води, за-  
дача з запізненням, просторова модель, асим-  
птотичний розв'язок, конвекція-дифузія-  
масообмін, збурення

УДК 519.63:532.5

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ  
ОЧИЩЕННЯ ВОДИ ФІЛЬТРОМ-  
ОСВІТЛЮВАЧЕМ ІЗ ШАРОМ  
ЗАВИСЛОГО ОСАДУ***Сформовано та проаналізовано математичну модель очи-  
щення води у фільтрі-освітлювачі з урахуванням впливу дози  
реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок.  
Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення  
розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової  
задачі для системи диференціальних рівнянь типу «конвекція-  
дифузія-масообмін». На цій основі проведено комп'ютерний  
експеримент.***Вступ**

При підготовці питної води з природних джерел централізованого водопостачання використо-  
вується система, що складається з освітлювачів і фільтруючих пристроїв. Ці пристрої компактно  
об'єднані в установці з плаваючим фільтруючим завантаженням, яка показала позитивні результати.  
Максимальний ступінь очищення природної води залежить, як відомо, від дози реагенту.

В роботі [1] для установки, що поєднує процеси освітлення води і фільтрування, виконаної за  
патентом [2], отримані моделі очищення природної води як в освітлювачі, так і в фільтрі. Для фільтра  
враховано вплив дози реагенту, а для освітлювача такого обліку немає. У [2] відсутній кількісний  
аналіз впливу дози реагенту (коагулянту) на роботу освітлювача. Автор вважає, що отриманий критерій  
сепарації справедливий «при нормальних умовах роботи освітлювача: при правильному безпере-  
бійному дозуванні коагулянту, при відсутності розбивання пластівців коагульованої суспензії і час-  
тих, різких коливань продуктивності освітлювача і температури води».

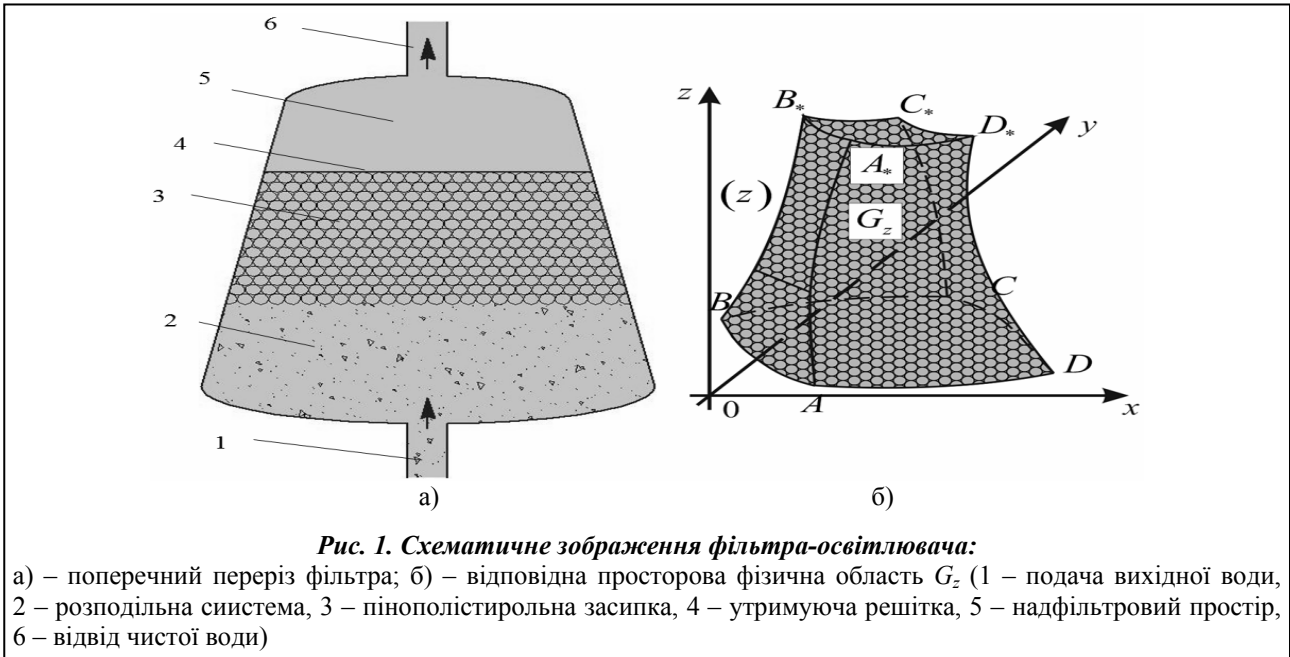
При очищенні води колоїдно-дисперсною системою процес розділення рідкої і твердої фаз ін-  
тенсифікується за рахунок укрупнення домішкових частинок у агрегати за допомогою реагентних і  
безреагентних методів. До перших належать методи введення у воду, що очищується, флокулянтів,  
окислювачів, регуляторів рН, мінеральних замутнювачів. До других – перемішування води, обробле-  
ної коагулянтами; різноманітні способи введення коагулянтів у воду; суміщення коагуляції коагулян-  
тами, що гідролізуються, з фізичними методами коагуляції – обробки води у магнітному і електрич-  
ному полях, іонізуючим опромінюванням, ультразвуком тощо. Накопичено колосальний експеримен-  
тальний матеріал з цих питань. Проте його достовірність часто викликає сумніви. На необхідність  
дуже обережного підходу до експериментального фонду звертав увагу, зокрема, Е. Д. Бабенков:  
«Притягуючи у вибіркового порядку експериментальний матеріал, що стосується окремих питань  
коагуляції можна обґрунтувати чи спростувати фактично будь-що, навіть теоретичні уявлення, які  
суперечать одне одному», [3, с. 112.] Вищесказане свідчить про необхідність розвитку теорії процесів  
очищення води з єдиних позицій на більш високому математичному рівні, ніж це прийнято в колоїд-  
ній хімії, оскільки, очевидно, в загальному випадку складні процеси не можуть бути достатньо адек-  
ватно описані елементарними методами [4–10].

Виходячи з вищесказаного метою даної роботи є формування та аналіз математичної моделі  
очищення природної води в фільтрі-освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної  
коагуляції домішкових частинок.

**Математична модель**

Розглянемо криволінійний шестигранний фільтр  $G_z = ABCDA^*B^*C^*D^*$  (рис. 1), обмежений глад-  
кими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями  $ABCD =$   
 $= \{(x, y, z) : f_1(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : z = f_1^*(x, y)\}$ ,  $A^*B^*C^*D^* = \{(x, y, z) : f_2(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : z =$   
 $= f_2^*(x, y)\}$  (де  $f_1(x, y, f_1^*(x, y)) = 0$ ,  $f_2(x, y, f_2^*(x, y)) = 0$ ) та поверхнями течії  $ADD^*A^* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$ ,

© А. Я. Бомба, А. П. Сафоник 2014



**Рис. 1. Схематичне зображення фільтра-освітлювача:**

а) – поперечний переріз фільтра; б) – відповідна просторова фізична область  $G_z$  (1 – подача вихідної води, 2 – розподільна система, 3 – пінополістирольна засипка, 4 – утримуюча решітка, 5 – надфільтровий простір, 6 – відвід чистої води)

$BCC^*B^* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABB^*A^* = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD^*C^* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ , (рис. 1, б), як геометричну інтерпретацію фільтра-освітлювача із шаром завислого осаду (рис. 1, а) [7].

Припускаємо [4, 5], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на характеристики відповідного середовища. Відповідний процес фільтрування, як узагальнення [6], опишемо такою модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial((1-\varepsilon(P+\bar{a}C))C)}{\partial t} = -\gamma P(M, t-\tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C + D_C \Delta C, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha U(M, t-\tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} P - g\rho(1-\varepsilon(P+\bar{a}C))(z - f_1^*(x, y)), \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\beta P(M, t-\tau) - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} U + D_U \Delta U, \end{cases} \quad (x, y, z) \in G = G_z \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$C|_{ABCD} = C_*(M, t), \quad P|_{ABCD} = P_*(M, t), \quad U|_{ABCD} = U_*(M, t),$$

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD^*C^*} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD^*A^* \cup BCC^*B^* \cup ABB^*A^* \cup CDC^*D^*} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD^*C^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD^*A^* \cup BCC^*B^* \cup ABB^*A^* \cup CDC^*D^*} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD^*C^*} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD^*A^* \cup BCC^*B^* \cup ABB^*A^* \cup CDC^*D^*} = 0,$$

$$C(x, y, z, \tilde{t}) = C_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad P(x, y, z, \tilde{t}) = P_0^0(x, y, z, \tilde{t}),$$

$$U(x, y, z, \tilde{t}) = U_0^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0; \quad (2)$$

$$\bar{v} = \kappa(P)\nabla\varphi, \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi|_{ABCD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{A^*B^*C^*D^*} = \varphi^*, \quad (4)$$

де  $C(M, t)$ ,  $P(M, t)$ ,  $U(M, t)$  – відповідно концентрації домішок, пластівців та речовин для створення пластівців у фільтраційній течії [7] у внутрішній точці  $(x, y, z)$  області завантаження в момент часу  $t$ ;

$\vec{\nabla}$  – оператор Гамільтона;  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  – оператор Лапласа;  $\gamma$  – коефіцієнт, що характеризує захоплення забруднених частинок пластівцями;  $\alpha, \beta$  – відповідно коефіцієнти, що характеризують кількість реагенту для утворення пластівців та пластівців утворених реагентом за одиницю часу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\rho$  – густина;  $\bar{a}$  – коефіцієнт трансформації (забруднень у пластівці);  $D_C, D_U$  – коефіцієнти дифузії, де  $D_C = b_C \varepsilon, D_U = b_U \varepsilon, 0 < b_C \leq 1, 0 < b_U \leq 1$ ;  $\varepsilon$  – малі параметри;  $\tau > 0$  – запізнення. Відмітимо, що функції  $C_*(M, t), P_*(M, t), U_*(M, t), C_0^0(M, t), P_0^0(M, t), U_0^0(M, t)$  є достатньо гладкими і узгодженими в кутових точках області їх задання. Крім цього вважаємо, що функції  $C_0^0(M, t), P_0^0(M, t), U_0^0(M, t)$  при  $t = -\tau$  та  $t = 0$  задовольняють умови, які забезпечують необхідну для проведення подальших викладок гладкість розв’язку  $C = C(M, t), P = P(M, t), U = U(M, t), U = U(M, t)$  цієї задачі при  $t = \tau n (n = 1, 2, \dots)$ ;  $M$  – біжуча точка відповідної поверхні;  $\varphi$  – фільтраційний потенціал ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ );  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – вектор швидкості фільтрації ( $|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$ );  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Прийmemo, що задача (3), (4) на просторове конформне відображення  $G_w \mapsto G_z$  ( $G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$  — відповідна  $G_z$  область комплексного потенціалу) при деякому усередненому значенні  $k \in$  розв’язана, зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості  $\vec{v}$ , обчислено фільтраційну витрату  $Q = Q_* Q^*$  [4, 5]. Тоді, здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta), y = y(\varphi, \psi, \eta), z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області  $G_w \times (0, \infty)$  (див., наприклад, [5])

$$\begin{cases} \frac{\partial((1-\varepsilon(p+\bar{a}c))c)}{\partial t} = -\gamma p c - v^2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \varepsilon d_c \left( v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \alpha u - v^2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} - g p (1 - \varepsilon(p + \bar{a}c)) (\varphi - \varphi_*), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\beta p - v^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \varepsilon d_u \left( v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \end{cases} \quad (5)$$

$$c(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \quad c_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = c_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = c_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$p(\varphi_*, \psi, \eta, t) = p_*(\psi, \eta, t), \quad p_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$p_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = p_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = p_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = p_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$u(\varphi_*, \psi, \eta, t) = u_*(\psi, \eta, t), \quad u_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$u_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = u_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = u_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = u_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad u(\varphi, \psi, \eta, 0) = u_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (6)$$

де  $c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ ,

$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ ,

$u = u(\varphi, \psi, \eta, t) = U(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ .

### Асимптотика розв’язку

Задачу (5)–(6) (із запізненням  $\tau$ ) зведемо до послідовності задач без запізнення (на часових проміжках  $[(n-1)\tau, n\tau], n = 1, 2, \dots$ ) [5]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left( (1 - \varepsilon(p^{[n]} + \bar{a}c^{[n]}))c^{[n]} \right)}{\partial t} = -\gamma p_{\pi} c_{\pi} - v^2 \frac{\partial c^{[n]}}{\partial \varphi} + \\
 & + \varepsilon d_c \left( v^2 \frac{\partial^2 c^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c^{[n]}}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c^{[n]}}{\partial \eta} \right), \\
 & \frac{\partial p^{[n]}}{\partial t} = \alpha u_{\pi} - v^2 \frac{\partial p^{[n]}}{\partial \varphi} - \text{gp} \left( 1 - \varepsilon(p^{[n]} + \bar{a}c^{[n]}) \right) (\varphi - \varphi_*), \\
 & \frac{\partial u^{[n]}}{\partial t} = -\beta p_{\pi} - v^2 \frac{\partial u^{[n]}}{\partial \varphi} + \varepsilon d_u \left( v^2 \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u^{[n]}}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u^{[n]}}{\partial \eta} \right), \\
 & c^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = c_*(\psi, \eta, t), \\
 & c_{\pi}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = c^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \\
 & c^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0), \\
 & p^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = p_*(\psi, \eta, t), \\
 & p_{\pi}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = p^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = p^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \\
 & p^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = p_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0), \\
 & u^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = u_*(\psi, \eta, t), \\
 & u_{\pi}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = u^{[n]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau) = u^{[n-1]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t - \tau), \\
 & u^{[0]}(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0) = u_0^0(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, 0),
 \end{aligned} \tag{7}$$

Розв'язок задачі (7) з точністю  $O(\varepsilon^n)$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [4, 5]

$$\begin{aligned}
 c^{[n]} &= c_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]} + \\
 & + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{\Pi}_j^{[n]} + R_c^{[n]}, \\
 p^{[n]} &= p_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j p_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j^{[n]} + \\
 & + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{P}_j^{[n]} + R_p^{[n]}, \\
 u^{[n]} &= u_0^{[n]} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j u_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{U}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{U}}_j^{[n]} + \\
 & + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_j^{[n]} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \hat{U}_j^{[n]} + R_u^{[n]},
 \end{aligned} \tag{8}$$

де  $R_c^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $R_p^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $R_u^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$  – залишкові члени;  $c_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $p_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $u_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t)$  – члени регулярної частини асимптотики ( $j = 0, 1, \dots, n$ );  $\Pi_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\bar{P}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\bar{U}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$  – функції типу примежового шару в околі на часових проміжках  $\varphi = \varphi^*$  (поправки на виході з фільтра) ( $j = 0, 1, 2$ );  $\tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{U}}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$  – в околі  $\varphi = \varphi_*$  (поправки на

вході у фільтр) ( $j = 0, 1, 2$ ), а функції  $\tilde{I}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{I}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\Psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{I}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{I}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\Psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{U}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\Psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) – в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q^*$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = Q^*$  (поправки на бічних стінках фільтра), відповідно;  $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\xi} = (\varphi - \varphi^*)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\psi} = (Q^* - \psi)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\Psi} = \psi/\varepsilon$ ,  $\tilde{\eta} = (Q^* - \eta)/\varepsilon$ ,  $\tilde{\eta} = \eta/\varepsilon$ .

Аналогічно [5], в результаті підстановки (8) в (7), застосування стандартної «процедури прирівнювання», та розв'язання відповідних проміжних задач маємо

$$c_0^{[n]} = \begin{cases} c_*(\psi, \eta, t - f) \exp\left[-\gamma \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{p_{n\tau} c_{n\tau} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}\right], & t \geq f, \\ c_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[-\gamma p_{n\tau} c_{n\tau} t], & t < f, \end{cases}$$

$$c_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_{c1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{C}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_{c2}(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_{c1}} \int_{(n-1)\tau}^t \frac{\bar{C}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_{c2}(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$p_0^{[n]} = \begin{cases} p_*(\psi, \eta, t - f) \exp\left[\alpha \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{u_{n\tau} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}\right], & t \geq f, \\ p_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[au_{n\tau} t], & t < f, \end{cases}$$

$$p_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_{p1}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{P}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_{p2}(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_{p1}} \int_{(n-1)\tau}^t \frac{\bar{P}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_{p2}(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$u_0^{[n]} = \begin{cases} u_*(\psi, \eta, t - f) \exp\left[-\beta \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{p_{n\tau} d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}\right], & t \geq f, \\ u_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp[-\beta p_{n\tau} t], & t < f, \end{cases}$$

$$u_j^{[n]} = \begin{cases} e^{-\lambda_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\bar{U}_j^{[n]}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -e^{-\lambda_1} \int_{(n-1)\tau}^t \frac{\bar{U}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

де  $\bar{c}_j^{[n]} = \left(\frac{\partial p_{j-1}^{[n]}}{\partial t} + \bar{a} \frac{\partial c_{j-1}^{[n]}}{\partial t}\right) \frac{\partial c_{j-1}^{[n]}}{\partial t}$ , ( $j = 2, 3, \dots, n$ ),

$$\bar{C}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{ci} \left( v^2 \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{c1} \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{c2} \frac{\partial^2 c_j^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{c1} \frac{\partial c_j^{[n]}}{\partial \psi} + d_{c2} \frac{\partial c_j^{[n]}}{\partial \eta} \right) - \gamma p_{j-1}^{[n]} c_{j-1}^{[n]},$$

$$\lambda_{c1}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\gamma \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{c2}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\gamma \int_{(n-1)\tau}^t \frac{p_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\bar{c}_j^{[n]}(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$\bar{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha u_{j-1}^{[n]} - \text{gr}(p_{j-1}^{[n]} + \bar{a} c_{j-1}^{[n]}) c_{j-1}^{[n]}(\varphi - \varphi_*),$$

$$\lambda_{p1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{u_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{p2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \alpha \int_{(n-1)\tau}^t u_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) d\tilde{s},$$

$$\bar{C}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{ui} \left( v^2 \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \varphi^2} + b_{u1} \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \psi^2} + b_{u2} \frac{\partial^2 u_j^{[n]}}{\partial \eta^2} + d_{u1} \frac{\partial u_j^{[n]}}{\partial \psi} + d_{u2} \frac{\partial u_j^{[n]}}{\partial \eta} \right) - \beta p_{j-1}^{[n]},$$

$$\lambda_{u1}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p_{j-1}^{[n]}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_{u2}(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta \int_{(n-1)\tau}^t p_{j-1}^{[n]}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) d\tilde{s},$$

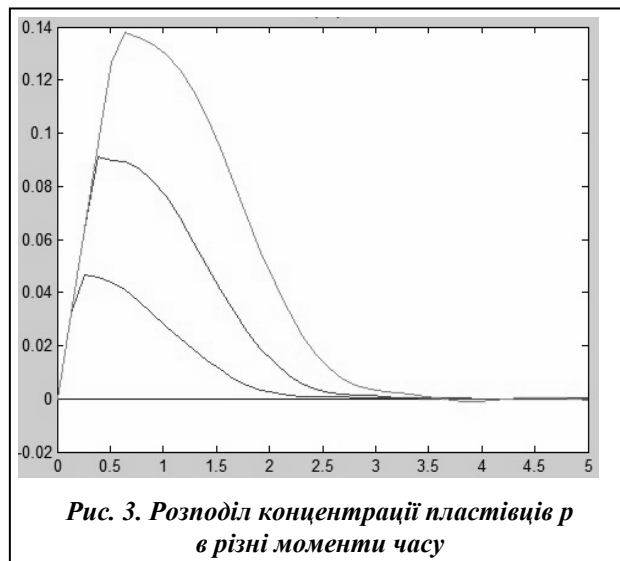
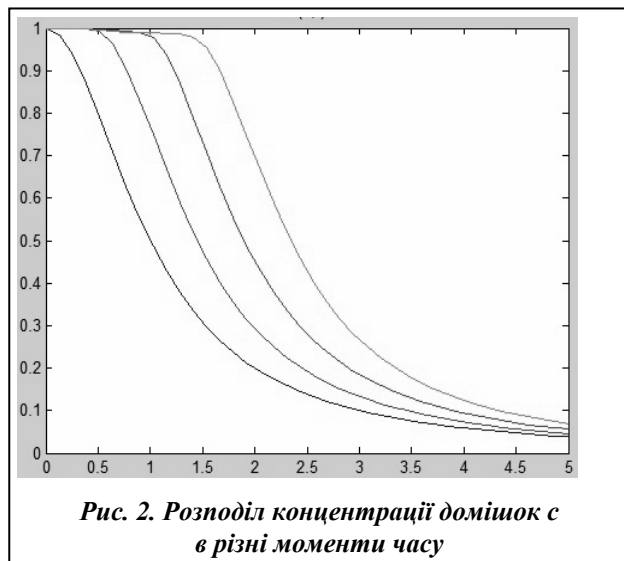
$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})}$  – час проходження відповідною частинкою шляху від точки

$(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$  до точки  $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$  уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь  $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$ ,  $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$ ,  $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$ ,  $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$ );  $f^{-1}$  – функція, обернена до  $f$  відносно змінної  $\varphi$  (відзначимо, що така функція існує, оскільки  $v^2(\varphi, \psi, \eta)$  – неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції  $\Pi_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\bar{P}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\bar{U}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{U}_j^{[n]}(\xi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\Pi}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{\Pi}}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{U}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{U}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_j^{[n]}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  знаходяться аналогічно [5]. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [5].

### Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту при  $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 100 \exp(-\varphi^2)$  мг/л,  $c_*(\psi, \eta, t) = 100$  мг/л,  $p_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$  мг/л,  $p_*(\psi, \eta, t) = 0$  мг/л,  $u_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 100$  мг/л,  $u_*(\psi, \eta, t) = 0$  мг/л,  $\gamma = 1/10$ ,  $\alpha = 1/4$ ,  $\varepsilon = 0,01$ . Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми «підказує» практика) та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі [5] побудовано розрахункову динамічну сітку в  $G_z$ :  $\varphi(x, y, z) = \varphi_i \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_* + [(\varphi^* - \varphi_*)i]/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j \stackrel{\text{df}}{=} (Q_*j)/m$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,  $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k \stackrel{\text{df}}{=} (Q^*k)/l$ ,  $k = 0, 1, \dots, l$  для  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 6000$ ,  $\kappa = 1$ ,  $n = 30$ ,  $m = 16$ ,  $l = 16$  (параметри  $n$ ,  $m$  і  $l$  вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну ви-



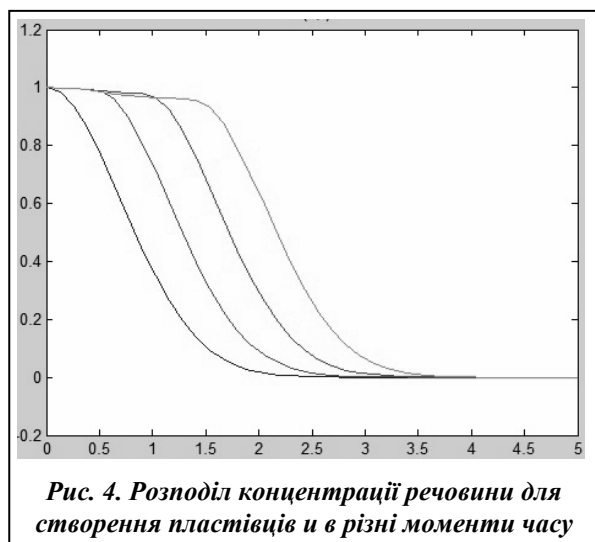
трату  $Q = 0,341$ , обчислено величини швидкості фільтрації  $|v|$  та функцій  $d_{i0}(\varphi, \psi, \eta)$  ( $i = 1, 2$ ). При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують  $0,001$  [5].

На рис. 2–4 зображено розподіли  $c$ ,  $p$  і  $u$  при  $t_0 = 0,1$ ,  $t_0 = 0,3$ ,  $t_0 = 0,5$ ,  $t_0 = 0,7$  год.

Як бачимо, концентрація домішок та коагулянтів вздовж фільтра-освітлювача з часом спадає, що підтверджує загальновідомий факт. Розподіл же концентрації пластифікаторів (див. рис. 3) на початку фільтра стрімко зростає, до досягнення деякого стану «насичення», після чого починає спадати. Це пояснюється тим, що саме в перших шарах фільтра під дією коагулянтів, відбувається реакція створення пластифікаторів.

### Висновки

Сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води в освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної малонелінійної просторової задачі для системи диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін». Отримано розрахункові залежності концентрацій домішок, пластифікаторів та речовин для створення пластифікаторів у фільтраційній течії з метою інженерного прогнозування залежності між затратами на виробництво фільтра-освітлювача та ступенем ефективності його роботи. В перспективі передбачається узагальнення побудованої моделі з метою оптимізації основних її параметрів.



### Література

1. Филипчук, В. Л. Рационализация технологических схем очистки металлосодержащих многокомпонентных сточных вод промышленных предприятий / В. Л. Филипчук // Химия и технология воды. – 2002. – Т. 24, № 6. – С. 567–577.
2. Долина, Л. Ф. Современная техника и технологии для очистки сточных вод от солей тяжелых металлов / Л. Ф. Долина. – Днепропетровск: Континент, 2008. – 254 с.
3. Бабенков, Е. Д. Очистка воды коагулянтами / Е. Д. Бабенков. – М.: Наука, 1977. – 355 с.
4. Бомба, А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу «конвекція–дифузія» / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, 2008. – 252 с.
5. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / А. Я. Бомба,

- В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне: Нац. ун-т. водн. госп-ва та природокористування, 2011. – 276 с.
6. Бомба, А. Я. Комп'ютерне моделювання процесу освітлення води на прояснювачах із шаром завислого осаду / А.Я. Бомба, В.М. Сівак, А.П. Сафоник // Вісник НУВГП: Зб. наук. пр. – Вип. 4 (40). Ч. 2. – Рівне: НУВГП. – 2007. – С. 365–372.
  7. Запольський, А. К. Водопостачання, водовідведення та якість води / А. К. Запольський. – К.: Вища шк., 2005. – 671 с.
  8. Cussler, E. L. Diffusion mass transfer in fluid systems / E. L. Cussler. – Cambridge University Press, 2009. – 631 p.
  9. Numerical identification of parameters for a strongly degenerate convection-diffusion problem modelling centrifugation of flocculated suspensions / S. Berres, R. Burger, A. Coronel, M. Sep'ulveda // Appl. Numer. Math. – 2005. – № 52. – P. 311–337.
  10. Berres, S. Modeling and simulations of polydisperse suspensions / S. Berres // Doctoral Thesis, University of Stuttgart, 2006.

Поступила в редакцію 21.06.14

**А. В. Горошко**,  
канд. техн. наук  
**В. П. Ройзман**,  
д-р. техн. наук  
Хмельницький  
національний  
університет,  
м. Хмельницький,  
e-mail:  
iftomm@ukr.net

УДК 681.5.015.63

## ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ДОПУСКІВ ЯК МНОЖИННА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

*Розглянутий сучасний стан проблеми параметричного синтезу допусків. Запропоновані формалізація і розв'язання задачі параметричного синтезу допусків як оберненої задачі забезпечення працездатності складних технічних систем з використанням сучасних підходів до розв'язку обернених задач загалом і параметричного синтезу зокрема. Для побудови області працездатності технічної системи запропоновано розв'язувати задачу обґрунтованого вписування поля допусків у вигляді гіперпаралелепіеда в область працездатності за допомогою критерію вартості. Показано, що для уточнення апроксимації області працездатності полем допусків ефективним є використання нерегулярних сіток та методу параметричного синтезу за критерієм запасу працездатності.*

**Ключові слова:** допуски, параметричний синтез, працездатність, обернена задача

### 1. Вступ

Будь-яку складну технічну систему можна подати як систему з  $n$  вхідними параметрами  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  і  $m$  вихідними параметрами  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тоді система характеризується вектором вхідних  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  і вектором вихідних  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^T$  параметрів.

Створення будь-якої нової машини, механізму, технологічної, медично-біологічної та інших систем і процесів починається із задання технічних умов на вихідні параметри, які називають умовами працездатності. Ці умови виражаються у вигляді номінальних значень вихідних параметрів  $\mathbf{Y}_0 = (Y_{01}, Y_{02}, \dots, Y_{0m})^T$  і допусків на їх значення як

$$Y_{0i} - \delta_i \leq Y_i \leq Y_{0i} + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

або лише як нерівності типу

$$[y_i] \leq Y_i \leq [Y_i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Умови працездатності утворюють область допустимих значень  $D_y$ , геометричним відображенням якої у прямокутній декартовій системі координат простору вихідних параметрів  $\mathbf{R}^m$  є ортогональний паралелепіед допусків  $D_y = \{y \in \mathbf{R}^m \mid [y_i] \leq Y_i \leq [Y_i], i = 1, 2, \dots, m\}$ .

Часто обмеження встановлюються і на вхідні параметри системи, наприклад, типу

$$[x_i] \leq X_i \leq [X_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$