

7. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. Каландия, А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
9. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
10. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев. Наук. думка, 1976. – 443 с.

Поступила в редакцию 12.08.14

М. А. Чугай,
канд. техн. наук

Институт проблем
машиностроения
им. А. Н. Подгорного
НАН Украины, Харьков
e-mail:
chugay@ipmach.kharkov.ua

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА ТУРБОМАШИН

Досліджується вібраційний стан лопаткового апарата турбомашин з пошкодженнями. Моделювання об'єктів проводилося на підставі тривимірного підходу методу скінченних елементів з використанням спеціальних сингулярних скінченних елементів, що відображають особливості напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини. Використання тривимірних скінченноелементних моделей забезпечило можливість детального аналізу вібраційної міцності елементів лопаткового апарата з пошкодженнями.

Ключові слова: робочі лопатки, пошкодження, спеціальні скінченні елементи, вібраційні характеристики, локалізація напружень, метод скінченних елементів.

Введение

На вибрационную прочность лопаточного аппарата современных турбомашин наибольшее влияние оказывает локализация напряжений в ограниченных зонах лопаток. Эта локализация предопределена конструкционными, технологическими и эксплуатационными факторами. Сложная конструктивная форма и особенности технологической обработки лопаток являются причиной возникновения зон повышенных напряжений при их колебаниях. В процессе эксплуатации могут возникать повреждения, что также приводят к локализации вибрационных напряжений и, возможно, к разрушению элементов лопаточного аппарата турбомашин. Причинами повреждений могут быть дефекты лопаток при изготовлении, усталостные трещины, эрозия, коррозия и воздействие посторонних предметов [1–3].

1. Постановка задачи

Существует в основном два подхода для построения конечноэлементных (КЭ) моделей конструкций с повреждением. Первый использует разбиение всей исследуемой области обычными конечными элементами с существенным сгущением сетки элементов по мере приближения к вершине повреждения. Второй заключается в применении специальных элементов, окружающих вершину повреждения, что позволяет учитывать особенности распределения напряжений вблизи повреждения [4–6]. Специальными эти элементы называются потому, что при вычислении матрицы жесткости в них задаются отличные от обычных функции перемещений, которые содержат член, пропорциональный \sqrt{r} . Они отличаются от обычных КЭ тем, что их промежуточные узлы сдвинуты на четверть длины стороны в направлении вершины трещины. Такие элементы могут иметь особенности вида $O(r^{-1/2})$ для напряжений, достаточно хорошо описывают изменение напряжений и перемещений в вершине трещины, полностью совместные с обычными квадратичными элементами и отражают смещение тела как целого, и для них остаются справедливыми теоремы о сходимости решения к точному для обычных элементов.

Целью работы является проведение моделирования возникающих в лопаточном аппарате турбомашин повреждений с использованием сингулярных конечных элементов. Повреждения представляются в виде выреза, имеющего границы (берега), которые не контактируют при любых деформациях конструкции. Особое внимание уделено областям, где вследствие конструктивных особенностей возникают максимальные напряжения и возрастает вероятность возникновения повреждений.

2. Особенности математического и компьютерного моделирования напряжений в окрестности вершины трещины

На основе современных представлений о НДС при наличии трещин, напряжения и деформации в малой окрестности вершины подчиняются таким общим соотношениям [7]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} q_{ij}(\theta),$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; K – КИН, который может определяться как K_I , K_{II} , K_{III} , для моделей разрушения I, II, III соответственно; r , θ – полярные координаты с началом в вершине трещины, расположенной вдоль отрицательной части оси x ; $f_{ij}(\theta)$, $q_{ij}(\theta)$ – универсальные нормализованные функции.

Перемещения должны соответственно иметь вид

$$u_i = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} F_i(\theta),$$

где G – модуль сдвига; $F_i(\theta)$ – универсальная нормализованная функция.

Геометрическая форма элемента, при использовании изопараметрической концепции метода конечных элементов (МКЭ), описывается с помощью заданных узловых точек

$$x = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, \quad y = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, \tag{1}$$

$$z = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i, \tag{2}$$

где x_i , y_i , z_i – координаты узловых точек в глобальной системе координат; N_i – функции формы, выраженные через локальные координаты элемента $\xi\eta\zeta$.

Для изопараметрических элементов искомая функция представляется теми же функциями формы, что и геометрическая форма элемента. Таким образом, функции формы должны отражать особенности типа $O(r^{1/2})$ для перемещений и $O(r^{-1/2})$ для напряжений.

Для построения конечноэлементных моделей в работе использовался изопараметрический 20-узловой квадратичный КЭ, который может вырождаться в 15-узловой КЭ путем совмещения трех узлов одной стороны (рис. 1).

Для обеспечения особенностей распределения перемещений типа $O(r^{1/2})$ необходимо сдвинуть промежуточные узлы изопараметрического 15-узлового элемента на четверть длины стороны по на-

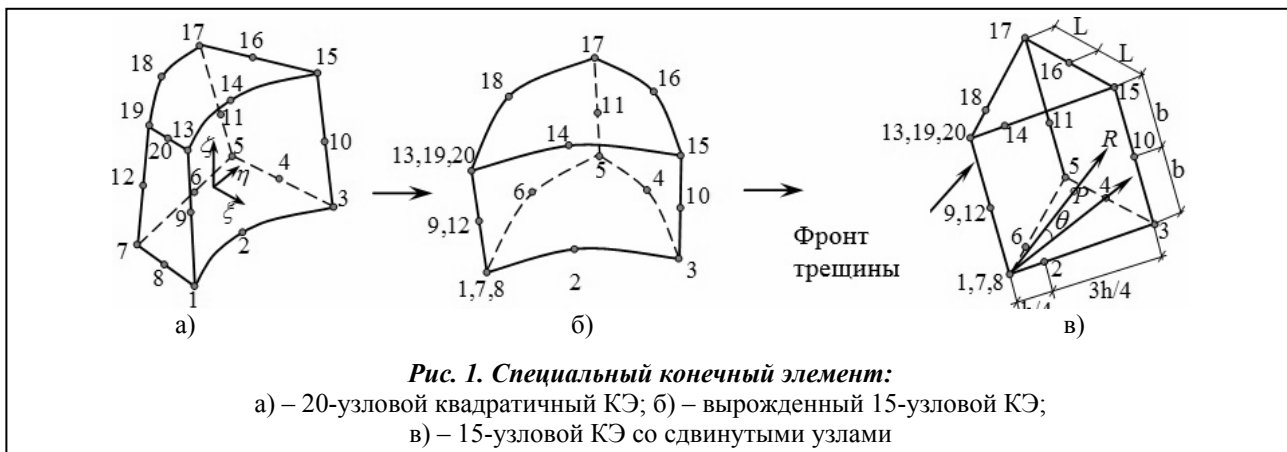


Рис. 1. Специальный конечный элемент:
 а) – 20-узловой квадратичный КЭ; б) – вырожденный 15-узловой КЭ;
 в) – 15-узловой КЭ со сдвинутыми узлами

правлению к вершине трещины (рис. 1, в). Полученные таким образом элементы могут обладать особенностью вида $O(r^{-1/2})$ для напряжений σ_{ij} , они достаточно хорошо описывают изменения напряжений и перемещений в вершине трещины, полностью совместимы с обычными квадратичными элементами и отображают деформацию тела как целого [3–5].

Подставив координаты узловых точек в (1)–(2) и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$x = \frac{h}{4}(1 + \xi)^2, \quad y = \frac{L}{4}\eta(1 + \xi)^2, \quad z = b(1 + \zeta). \quad (3)$$

Расстояние r от вершины трещины до любой точки P равняется $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Подставляя значения для x и y из (3) в выражение для r , получим

$$r = \frac{L}{4}(1 + \xi)^2 \sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + \eta^2},$$

откуда

$$(1 + \xi) = \frac{r^{1/2}}{\left[\frac{L}{4}\left(\left(\frac{h}{L}\right)^2 + \eta^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}}. \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что функции формы в этом случае обеспечивают особенности вида $O(r^{1/2})$ для перемещений и $O(r^{-1/2})$ для напряжений и деформаций.

Перемещения внутри элемента интерполируются функциями форм $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ для узловых перемещений u_i, v_i, w_i

$$u = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta)u_i, \quad v = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta)v_i, \quad w = \sum_i N_i(\xi, \eta, \zeta)w_i.$$

Потенциальная энергия при колебаниях лопатки имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV,$$

где $dV = \det|J|d\xi d\eta d\zeta = \frac{hLb}{8}(1 + \xi)^3 d\xi d\eta d\zeta$.

Потенциальная энергия отображает необходимые особенности для напряжений в вершине повреждения, но остается ограниченной для всех значений r .

Построенные таким образом сингулярные элементы имеют такие важные свойства: они обеспечивают особенности типа $O(r^{-1/2})$ для напряжений, полностью совместимы с обычными квадратичными элементами, отображают деформацию тела как целого, для них остаются справедливыми теоремы о сходимости решения к точному для обычных элементов. Из этих элементов можно построить розетку элементов вокруг вершины повреждения, которая совместима с общей сеткой конечных элементов.

3. Общее описание методики построения сетки сингулярных элементов вокруг трещины

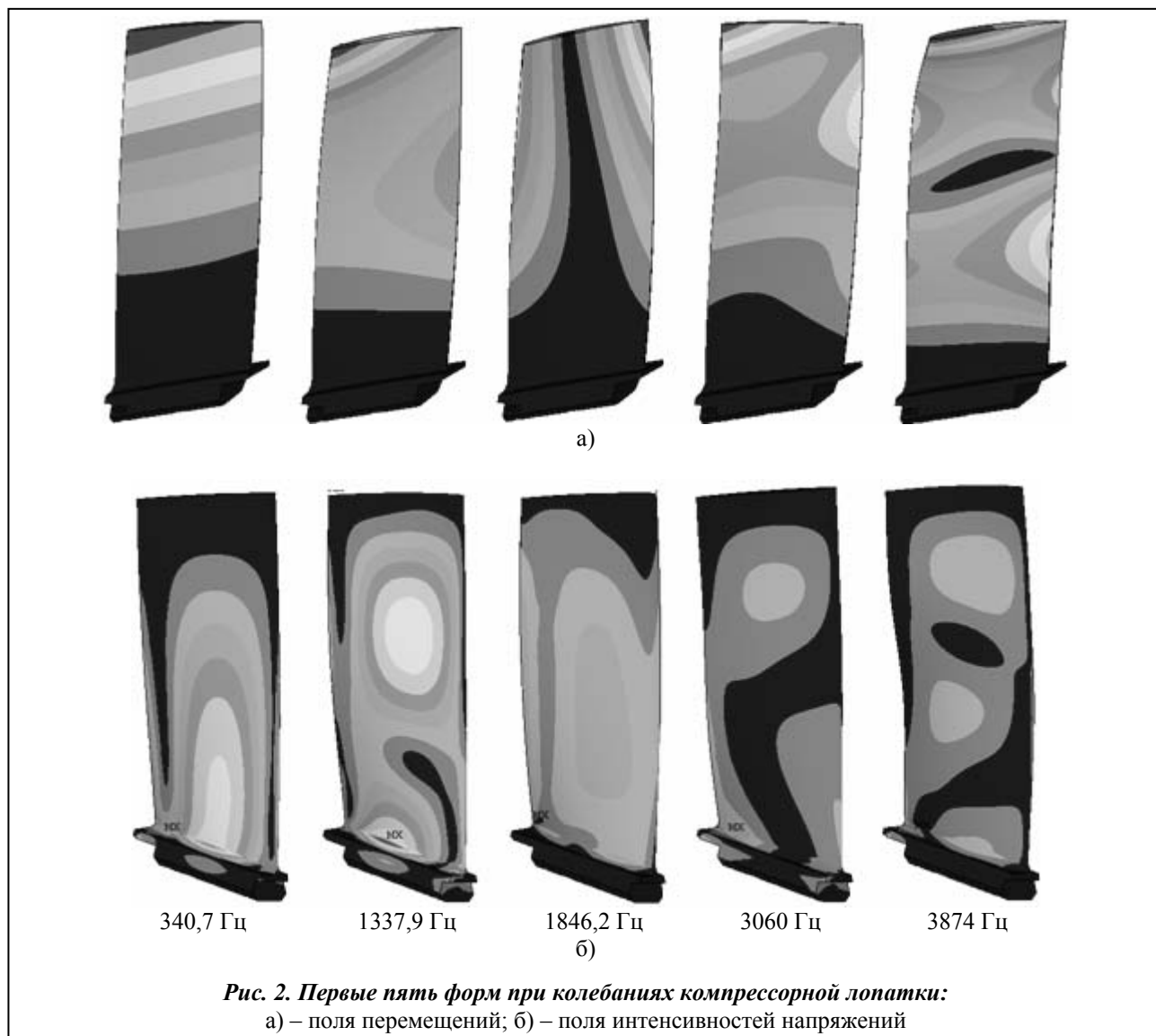
На основе перечисленных особенностей в работе для проведения компьютерного моделирования возникающих в вершине напряжений предлагается подход к построению сетки вокруг трещины, в соответствии с которым вначале вокруг зоны с трещиной создается двухмерная модель вспомогательной (окаймляющей) подобласти правильной геометрической формы (например, в виде квадрата). Далее на нее наносится двухмерная КЭ сетка, которая должна интегрироваться с общей сеткой рассматриваемой модели. При этом для построения двухмерной сетки используются квадратичные элементы со срединными узлами. Вокруг вершины трещины создается слой вырожденных сингулярных конечных элементов с узлами, сдвинутыми на $1/4$ в сторону вершины.

Для создания регулярной сетки (т. е. сетки с явно выраженными рядами элементов) необходимо, чтобы на противоположных сторонах окаймляющей подобласти было одинаковое количество разбиений. При этом количество элементов необходимо рассчитывать таким образом, чтобы можно было выполнить интеграцию построенной регулярной сетки вокруг трещины с общей сеткой модели. Важно также, чтобы КЭ сетка имела сгущение в направлении вершины трещины.

Вокруг вершины трещины создаётся вспомогательная окружность, в которую будут вписаны сингулярные конечные элементы с узлами, сдвинутыми на $1/4$ в сторону вершины. Радиус вспомогательной окружности (длина сингулярных элементов) принимается равным $1/8$ длины трещины. При достаточно подробной сетке радиус сингулярных элементов оказывает не слишком сильное влияние на результаты расчета.

При создании конечных элементов в окружном направлении в вершине трещины необходимо, чтобы угол сингулярных элементов в вершине трещины составлял $30-40^\circ$ [5].

Для завершения создания двумерной модели вокруг созданного слоя с сингулярными элементами в окружном направлении строятся очередные слои КЭ без сдвига серединных узлов до соединения с границами окаймляющей подобласти. Созданная двумерная КЭ сетка может быть преобразована в трехмерную методом выдавливания двумерных элементов. Для выдавливания элементов указывается вектор, задающий направление выдавливания двумерной сетки, и количество элементов, которые необходимо сгенерировать в направлении заданного вектора. В результате вокруг фрон-



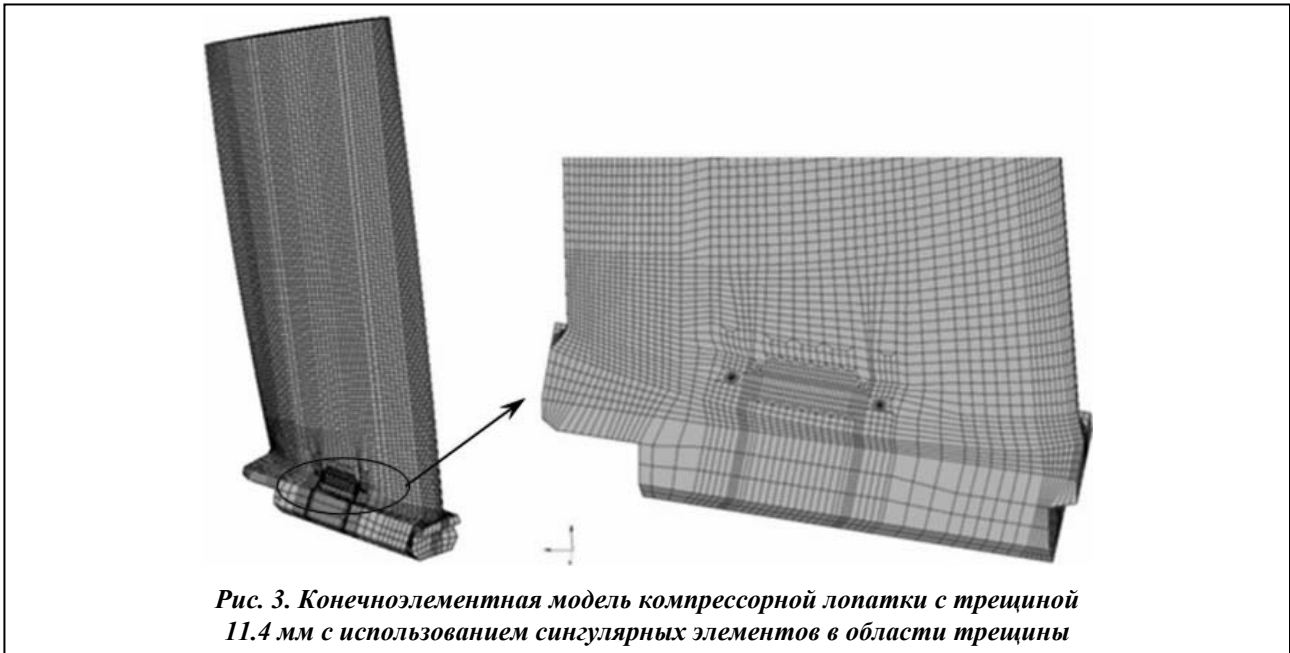


Рис. 3. Конечноэлементная модель компрессорной лопатки с трещиной 11,4 мм с использованием сингулярных элементов в области трещины

та трещины будет создан слой призматических сингулярных элементов.

4. Численный анализ колебаний лопаток с трещинами произвольной формы

Проведен численный анализ влияния повреждений на особенности напряженно-деформированного состояния компрессорной лопатки при колебаниях.

На рис. 2 приведены первые пять форм перемещений и интенсивности напряжений при колебаниях лопатки без трещины. Видна локализация в зоне, где впоследствии образовалась трещина.

Таким образом, анализируя распределение напряжений и их локализацию, можно предвидеть зоны образования трещин и с помощью малых конструктивных изменений (галтельные переходы, перераспределение толщин и т.д.) снизить опасность их возникновения.

Большой интерес представляют трещины, фронт которых является криволинейным. На компрессорной лопатке возникла небольшая трещина на спинке вблизи корневого сечения, которая развивалась от длины 1,9 до 21,9 мм [8, 9] (рис. 3).

Были проведены исследования влияния трещины на собственные частоты, формы перемещений и распределение относительных напряжений при использовании обычных конечных 20-узловых элементов со сгущением сетки и при использовании сингулярных элементов в области трещины. Разбиение КЭ сетки в области трещины представлено на рис. 4.

Разбиение конечноэлементной сетки в области трещины представлено на рис. 5, где используются следующие обозначения: область на рис. 5, а, г содержит обычные 20-узловые КЭ, область на рис. 5, в – переход от 20-узловых КЭ к сингулярным элементам, область на рис. 5, б – сингулярные КЭ вокруг фронта трещины.

Видно, что использование трехмерных сингулярных элементов в криволинейной системе координат позволяет адекватно моделировать напряженно-деформируемое состояние трещины с произ-

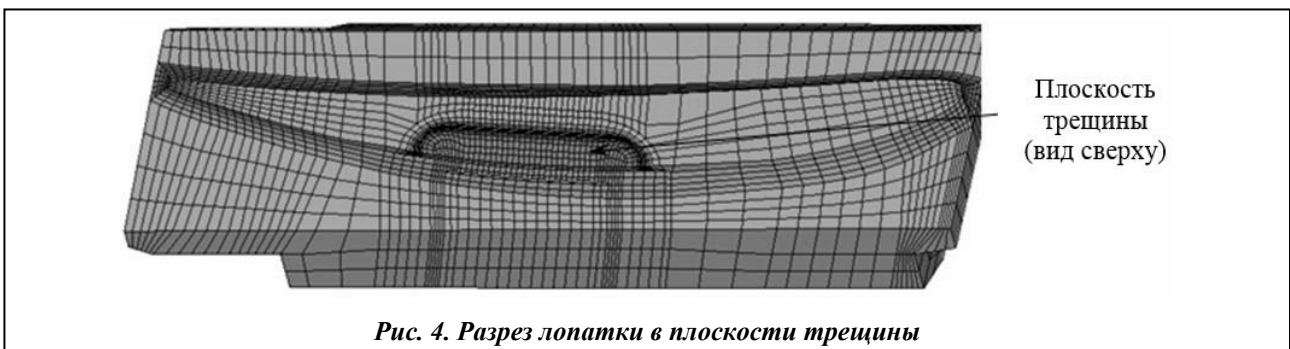


Рис. 4. Разрез лопатки в плоскости трещины

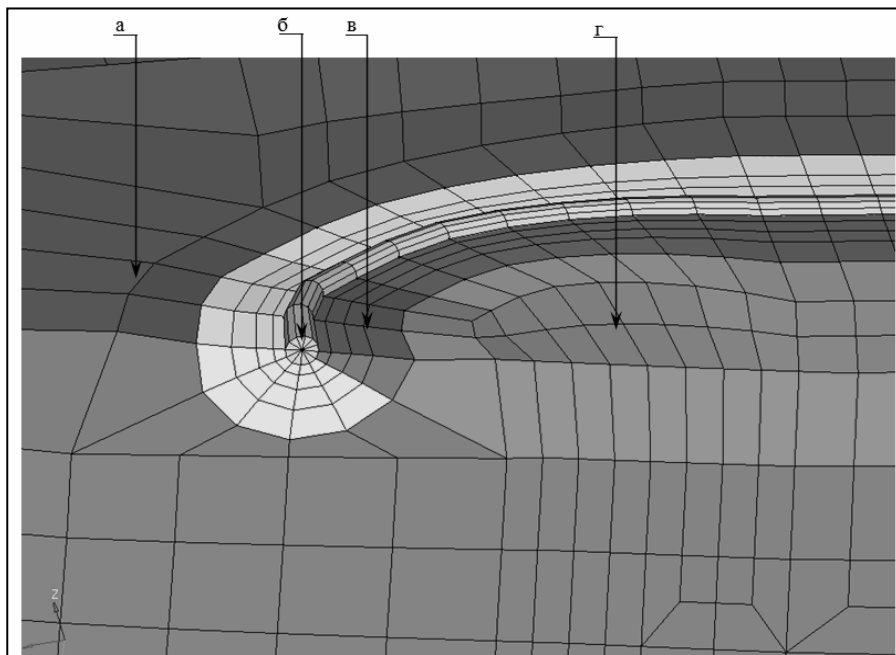


Рис. 5. Конечноэлементная модель в плоскости трещины:

а) – плоскость разреза лопатки; б) – сингулярные элементы (фронт трещины, окруженный сингулярными элементами); в) – плоскость трещины (переход к сингулярным элементам); г) – плоскость трещины (обычные 20-узловые элементы)

вольным криволинейным фронтом и изменение напряжений по фронту трещины.

При расчете данной лопатки с трещиной собственные частоты, полученные с использованием сингулярных элементов, оказались несколько ниже, чем частоты, полученные с использованием обычных 20-узловых элементов (таблица). Но наибольшие различия видны при анализе относительных интенсивностей напряжений вблизи фронта трещины.

На рис. 6 приведены поля интенсивностей напряжений первых трех форм колебаний лопаток с трещиной глубиной 11,4 мм при использовании обычных 20-узловых элементов и сингулярных конечных элементов

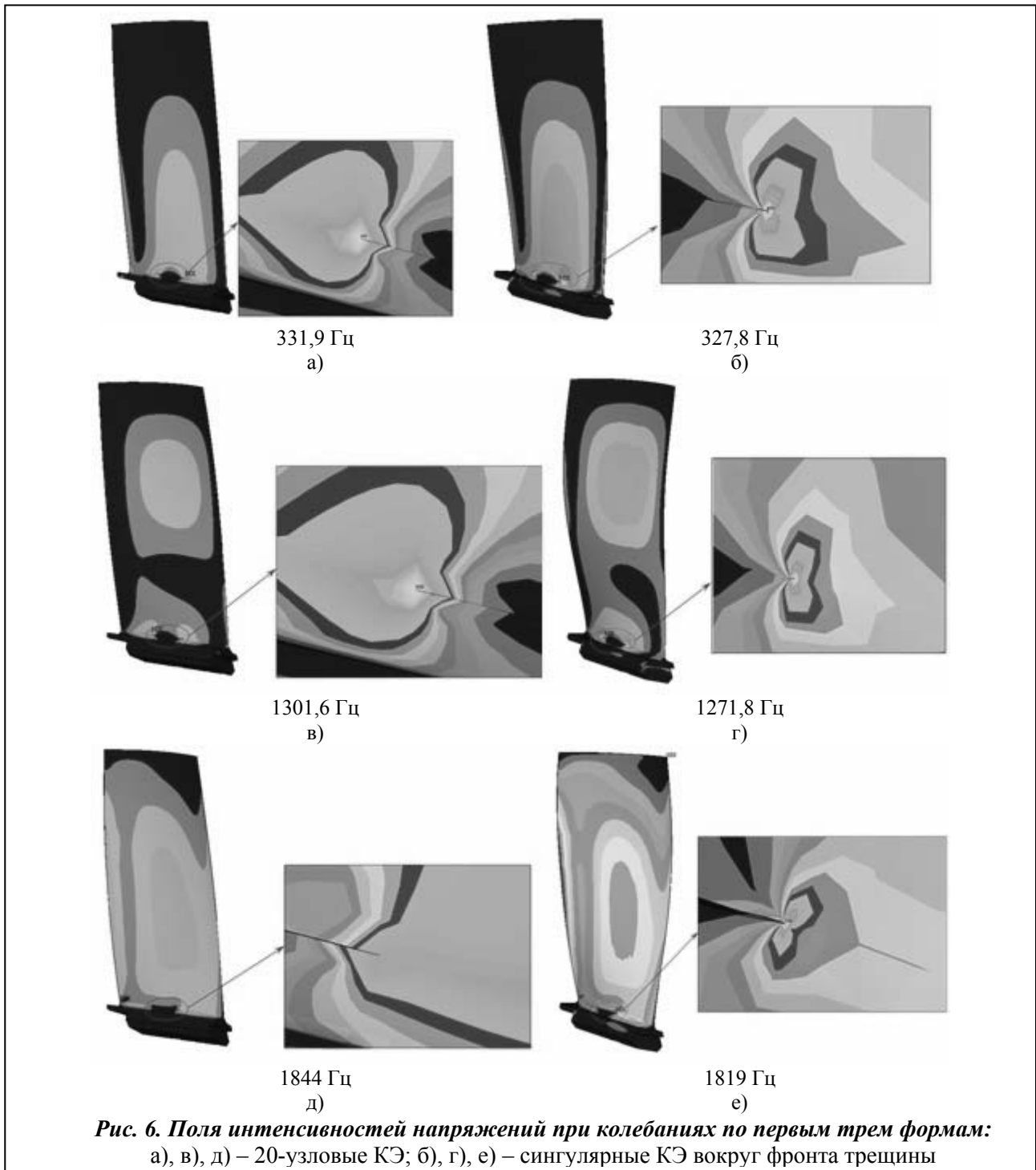
вокруг фронта трещины (без учета центробежных сил).

На рис. 7 предствалены поля интенсивностей напряжений первых четырех форм колебаний лопаток с трещиной глубиной 18,4 мм при использовании сингулярных конечных элементов вокруг фронта трещины (без учета центробежных сил).

Видно, что при использовании сингулярных элементов вблизи фронта трещины наблюдаются более высокие градиенты напряжений. На поверхности лопатки максимальные напряжения наблюдаются у начала и конца трещины, что способствует ее росту. При использовании сингулярных элементов сетка вдали от трещины может быть менее густой. Формы перемещений практически одинаковы при использовании различных моделей.

**Изменение собственных частот компрессорной лопатки
(сингулярные конечные элементы вокруг вершины трещины)**

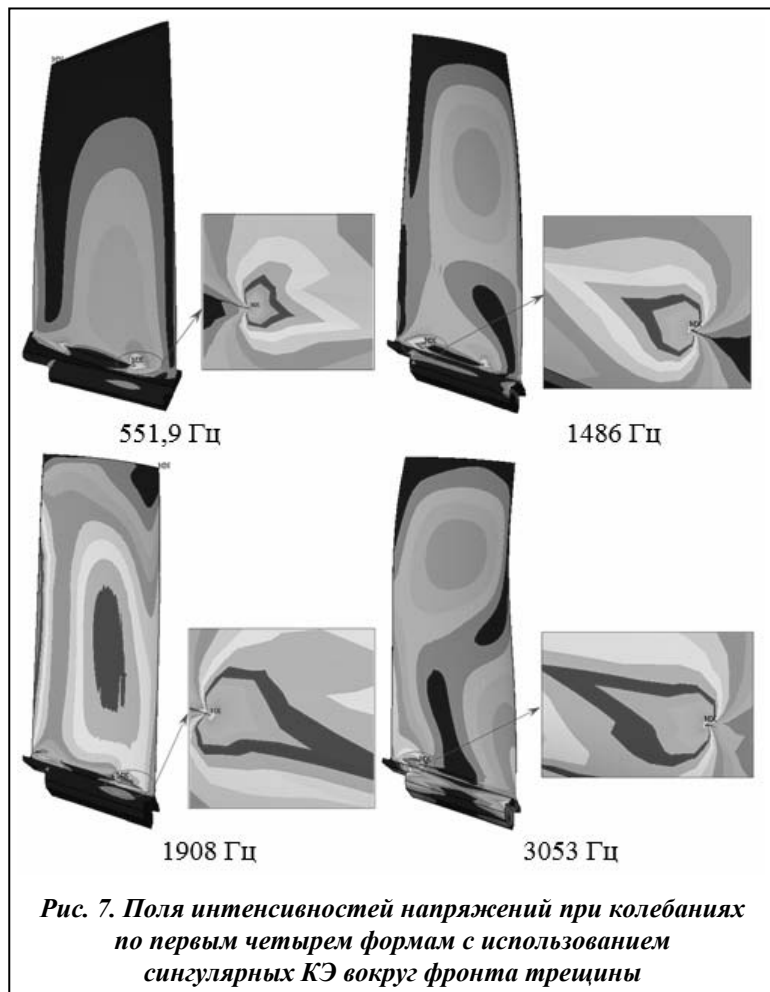
Тон колебаний	Частоты лопатки, Гц (без учета центробежных сил)			Частоты лопатки, Гц (15600 об/мин)		
	Без трещины	Трещина глубиной 11,4 мм	Трещина глубиной 18,4 мм	Без трещины	Трещина глубиной 11,4 мм	Трещина глубиной 18,4 мм
f1	340,7	327,8	318,54	571,87	561,13	551,9
f2	1337,9	1271,8	1250,2	1564,6	1506,6	1485,9
f3	1846,2	1819	1839,1	1917,8	1890,2	1908,2
f4	3060	2974,9	2941,4	3165,9	3083,9	3052,8
f5	3874	3699,4	3693,2	4115,6	3943,7	3938,5
f6	4616,7	4534,3	4580,9	4722,4	4642,8	4686
f7	6844	6584,7	6601,9	7112,7	6862,2	6884,9
f8	7478	7349,7	7415,1	7652	7523,1	7580,7



Выводы

Создана математическая модель повреждений с использованием КЭ, учитывающих сингулярный характер напряжений в устье трещины. Обоснована правомерность использования трехмерных сингулярных элементов в криволинейной системе координат. Показано, что трехмерные сингулярные элементы в криволинейной системе координат способны адекватно моделировать НДС в трещине с произвольным криволинейным фронтом и изменение напряжений по фронту трещины. Как правило, наибольшие напряжения возникают у начала и конца трещины, что способствует ее развитию.

Проанализированы закономерности изменения спектров частот, форм колебаний и распределения напряжений в лопатках при их повреждениях. Частоты как интегральные характеристики при



появлении трещин изменяются слабо. Возникновение трещины следует ожидать в зонах локализации напряжений в лопатке, что позволяет предвидеть появление трещин и предотвратить его за счет малых изменений конструкции.

Результаты данной работы могут использоваться для диагностики. Например, сравнивая формы колебаний эталонной лопатки без повреждений и экспериментальной, можно судить о наличии или отсутствии дефектов в ней [10]. Анализ локализации напряжений с учетом повреждений и без них позволяет выработать рекомендации по снижению уровня вибрационных напряжений в местах, представляющих опасность в случае возможных повреждений за счет перераспределения интенсивностей напряжений. Знание картины распределения вибрационных напряжений и их локализации может оказаться полезным при выборе вариантов как отдельных лопаток, так и их систем.

Литература

1. Воробьев, Ю. С. Влияние повреждений на колебания элементов лопаточного аппарата турбомашин / Ю. С. Воробьев, М. А. Чугай, Р. Жондковски // Компрессор. и энерг. машиностроение. – 2009. – № 2 (16). – С. 52–56.
2. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
3. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Ч. 1: Справ. пособие / Под ред. В. Т. Трощенко. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
4. Морозов, Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. – М.: Наука, 1980. – 354 с.
5. Морозов, Е. М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Е. М. Морозов, А. Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. – М.: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
6. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения: Пер. с японского / М. Сиратори, Т. Миесси, Х. Мацусита; пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
7. Barsom, R. S. Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements // Int. J. Num Meth Eng. – 1977. – Vol. 11, № 1. – P. 85–98.
8. Rzadkowski, R. Dynamics of Steam Turbine Rotor Blading. Part.2. Bladed Discs / R. Rzadkowski. – Wroclaw: Wydawnictwo PAN, 1998. – 221 p.
9. Szczepanik, R. Crack Initiation of Rotor Blades in the First Stage of SO-3 Compressor / R. Szczepanik, R. Rzadkowski, L. Kwapisz // Advances Vibration Eng. – 2010. – Vol. 9 (4). – P. 357–362.
10. Вернигор, В. Н. Модальный анализ механических колебаний упругих систем / В. Н. Вернигор, А. Л. Михайлов. – Рыбинск, 2001. – 288 с.

Поступила в редакцию 15.07.14