

УДК.523.165

Б. А. Шахов, Ю. Л. КолесникГлавная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
03680 Киев ГСП, ул. Академика Заболотного 27**Распространение галактических космических лучей
в гелиосфере в зависимости от рассеивательных свойств
турбулентного межпланетного магнитного поля**

Рассматривается деформация солнечным ветром спектра космических лучей, ускоренных в Галактике. Предполагается степенная зависимость от расстояния до Солнца коэффициента диффузии космических лучей в межпланетном турбулентном магнитном поле, а также его независимость от энергии частиц. Спектр на границе гелиосферы задается в виде степенной функции от полной энергии частиц.

ПОШИРЕННЯ ГАЛАКТИЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ У ГЕЛІОСФЕРІ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД РОЗСІЮВАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО МІЖПЛАНЕТНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ, Шахов Б. О., Колесник Ю. Л. — Розглядається деформація сонячним ветром спектру космічних променів, прискорених у Галактиці. Приймається степенева залежність від відстані до Сонця коефіцієнта дифузії космічних променів у міжпланетному турбулентному магнітному полі, а також його незалежність від енергії часток. Спектр на межі геліосфери задається у вигляді степеневої функції від повної енергії часток.

**GALACTIC COSMIC RAY PROPAGATION IN HELIOSPHERE DEPEND-
ING ON THE SCATTERING PROPERTIES OF TURBULENT INTER-
PLANETARY MAGNETIC FIELD, by Shakhov B. A., Kolesnyk Yu. L.** — We consider the deformation of a spectrum of cosmic rays accelerated in the Galaxy which is caused by the solar wind. We make the assumption on power dependence of cosmic ray diffusion coefficient on the distance to the Sun in the turbulent interplanetary magnetic field and also no dependence on particle energy. The boundary spectrum is specified as a power function of the full particle energy.

Цель нашей работы состоит в изучении деформации спектра галактических космических лучей (КЛ) магнитогидродинамической (МГД) турбулентностью солнечного ветра. Рассеивательные свойства межпланетного магнитного поля (ММП) будем описывать коэффициентом диффузии КЛ k , который

в общем случае может зависеть от пространственных координат и от энергии частиц. Спектр КЛ в Галактике выберем в виде степенной функции $N(E) \sim E^{-\gamma}$. Здесь E — полная энергия частицы, связанная с ее импульсом p известным релятивистским соотношением

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

где m_0 — масса покоя частицы, соответствующая энергии покоя $E_0 = m_0 c^2$, c — скорость света в вакууме. Для того чтобы определить плотность n_0 частиц со всеми энергиями, спектр необходимо выбрать в виде

$$N(E) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{E_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\gamma}. \quad (1)$$

Интегрируя этот спектр по всем E от E_0 до ∞ , получим n_0 . Плотность энергии при этом получается интегрированием спектра с весом E и равняется

$$W = \frac{n_0 E_0 (\gamma - 1)}{(\gamma - 2)},$$

причем для сходимости этих интегралов необходимо, чтобы выполнялось условие $\gamma > 2$. Современные экспериментальные данные [4] дают значение для $\gamma \geq 2.5$. В нашей работе мы будем использовать значение $\gamma = 2.5$. Более простые уравнения возникают, если вместо полной энергии в качестве переменной использовать модуль импульса частицы p . Тогда спектр (1) нужно задавать в виде, который следует из соотношений между фазовыми плотностями, заданными в различных энергетических переменных [9]:

$$N(p) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^2 \right]^{-(\gamma+1)/2}. \quad (2)$$

Условие сходимости интеграла плотности энергии примет вид

$$\int_0^{\infty} p^2 E N(p) dp < \infty. \quad (3)$$

Если пользоваться безразмерным импульсом $\eta = p / (m_0 c)$, то выражение (2) примет вид

$$N(\eta) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \eta^{-1} [1 + \eta^2]^{-(\gamma+1)/2}. \quad (4)$$

При этом

$$\int_0^{\infty} N(\eta) \eta^2 d\eta = n_0.$$

Уравнение, описывающее распространение галактических космических лучей (ГКЛ) в МГД-турбулентном солнечном ветре в стационарном сферически-симметричном случае выберем в виде [6, 12]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \kappa(r, p) \frac{\partial N}{\partial r} - u \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{2u}{3r} p \frac{\partial N}{\partial p} = 0. \quad (5)$$

Здесь $N(r, p)$ — фазовая плотность ГКЛ, u — скорость солнечного ветра, $\kappa(r, p)$ — коэффициент диффузии ГКЛ в солнечном ветре, r — расстояние от Солнца до точки наблюдения.

В работах [10, 15] уравнение (5) записано в канонической форме уравнения непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(-\kappa(r, p) \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{up}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \right) + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(\frac{up}{3} \frac{\partial N}{\partial r} \right) = 0,$$

при этом поток частиц имеет вид [8]

$$j = -\kappa(r, p) \frac{\partial N}{\partial r} - \frac{up}{3} \frac{\partial N}{\partial p}, \quad (6)$$

а поток в пространстве импульсов равен

$$J_p = \frac{up}{3} \frac{\partial N}{\partial r}. \quad (7)$$

В стационарном случае процес распространения состоит в выносе космических лучей солнечным ветром, причем частицы разного диапазона энергий выносятся с разным темпом $(- (up/3)(\partial N/\partial p))$, а также происходит диффузионное проникновение частиц в область солнечного ветра $(\kappa(r, p)(\partial N/\partial r))$. При этом происходит изменение энергии частиц, которое определяется балансом встречных и догоняющих столкновений частиц с движущимися неоднородностями ММП $((up/3)(\partial N/\partial r))$.

Точные аналитические решения соответствующих краевых задач могут быть получены для коэффициента диффузии, заданного в виде степенной функции от расстояния r и не зависящей от модуля импульса частиц:

$$\kappa(r, p) = kr^\sigma.$$

Перейдем к новым переменным: безразмерному импульсу η , определенному выше, и безразмерной переменной

$$x = \frac{u}{k} \frac{r^{-\sigma+1}}{(-\sigma+1)},$$

которая на границе солнечного ветра равна

$$x_0 = \frac{u}{k} \frac{r_0^{-\sigma+1}}{(-\sigma+1)}.$$

Уравнение (5) в этих переменных примет вид

$$x \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \left(\frac{2}{-\sigma+1} - x \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{2}{3(-\sigma+1)} \eta \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0. \quad (8)$$

Присоединив к нему граничное условие (3) при $x = x_0$, условие ограниченности величины $N(x, \eta)$ при $x = 0$, а также условие сходимости интеграла энергии, получим краевую задачу

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \left(\frac{2}{-\sigma+1} - x \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{2}{3(-\sigma+1)} \eta \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0, \\ N(x_0, \eta) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0 c)^3} \eta^{-1} (1 + \eta^2)^{-(\gamma+1)/2}, \\ N(0, \eta) < \infty, \\ N(x, \eta \rightarrow 0) \sim \eta^{-3+\alpha}; N(x, \eta \rightarrow \infty) \sim \eta^{-4-\beta}; \alpha, \beta > 0. \end{cases} \quad (9)$$

СЛУЧАЙ $\kappa = \text{const}$

В случае $\kappa = \text{const}$ имеем $\sigma = 0$, $x = ur/k$, $x_0 = ur_0/k$, и краевая задача (9) принимает вид

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (2-x) \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0, \\ N(x_0, \eta) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0 c)^3} \eta^{-1} (1+\eta^2)^{-(\gamma+1)/2}, \\ N(0, \eta) < \infty, \\ N(x, \eta \rightarrow 0) \sim \eta^{-3+\alpha}; N(x, \eta \rightarrow \infty) \sim \eta^{-4-\beta}; \alpha, \beta > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Задача (10) может быть решена методом разделения переменных с последующим разложением в ряд по вырожденным гипергеометрическим функциям, собственным функциям данной задачи [10]. При этом необходимо уметь суммировать эти ряды [15]. В качестве альтернативы применим к задаче (8) преобразование Меллина по переменной η [7].

Будем рассматривать образ Меллина фазовой плотности ГКЛ

$$\widehat{N}(x, s) = \int_0^\infty \eta^{s-1} N(x, \eta) d\eta. \quad (11)$$

Тогда краевая задача для уравнения в частных производных (10) переходит для образа Меллина в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (10):

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 \widehat{N}}{\partial x^2} + (2-x) \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x} - \frac{2}{3} s \widehat{N} = 0, \\ \widehat{N}(x_0, s) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0 c)^3} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}, \\ \widehat{N}(0, s) < \infty, \end{cases} \quad (12)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция [1, 2].

Решение задачи (12) имеет вид

$$\widehat{N}(x_0, s) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0 c)^3} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x_0\right)}. \quad (13)$$

Здесь $F(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [1, 2].

Далее используем обратное преобразование Меллина [7]:

$$N(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^{-s} \widehat{N}(x, s) ds. \quad (14)$$

Условие сходимости интеграла для плотности энергии накладывает на параметр s следующие ограничения: $\text{Re}(s) < 3$ для $\eta < 1$ и $\text{Re}(s) > 4$ для $\eta > 1$.

Имеем далее

$$N(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^{-s} n_0(\gamma-1) \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x_0\right)} ds. \quad (15)$$

Введем новую переменную интегрирования $s^* = s/2$, подынтегральная функция комплексного переменного s^* имеет бесконечный набор полюсов первого порядка, порожденных гамма-функцией и вырожденной гипергеометрической функцией, которые все находятся на действительной оси.

Для $\Gamma\left(\frac{\gamma-2s^*}{2}+1\right)$ имеем

$$\frac{\gamma}{2} - s^* + 1 = -n; \quad s^* = \frac{\gamma+2}{2} + n, \quad \text{Res}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} - s^* + 1\right) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Для $\Gamma\left(s^* - \frac{1}{2}\right)$ имеем

$$s^* - \frac{1}{2} = -m; \quad s^* = -m + \frac{1}{2}, \quad \text{Res}\Gamma\left(s^* - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Для $\frac{1}{F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right)}$ имеем

$$F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right) = 0 \text{ при } s^* = -\frac{3\alpha_n}{4},$$

где $\alpha_n > 0$ — корни уравнения $F(-\alpha_n, 2; x_0) = 0$, откуда

$$\text{Res} \frac{1}{F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right)} = \frac{1}{F'_a(-\alpha_n, 2; x_0)}.$$

Здесь $F'_a(a, b; x)$ — производная вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b; x)$ по первому аргументу.

В случае $\eta > 1$ выберем контур, замыкая прямую полуокружностью справа. Тогда в него попадают полюса в точках $s^* = (\gamma+2)/2 + n$. Для ближайшего левого полюса ($n=0$) условие $\text{Re}(s) > 4$ выполняется, тем более оно выполняется для остальных полюсов (см. рис. 1).

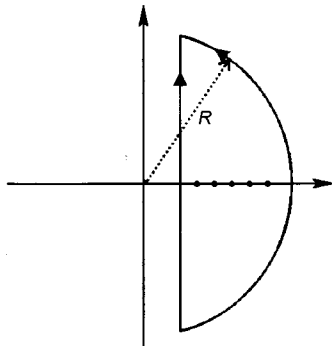


Рис. 1. Контур для вычисления высокоэнергичного компонента спектра

В силу того, что количество полюсов бесконечно, нужно выбрать последовательность полуокружностей, например с радиусом $R = (\gamma + 3)/2 + n$, тогда при $n \rightarrow \infty$ ни один полюс не попадет на контур. Интеграл по полуокружности при неограниченном увеличении радиуса будет стремиться к нулю в силу того, что на этом участке контура $ds^* = Ric^{iv}d\varphi$, а подынтегральное выражение будет стремиться к выражению

$$\begin{aligned}
 & \eta^{-2s^*} \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0c)^3} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} - s^* + 1\right) \Gamma\left(s^* - \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right)} \rightarrow \\
 & \rightarrow n_0(\gamma - 1) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} e^{-\ln\eta \cdot R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \times \\
 & \times \frac{\Gamma(2) e^{x/2} x^{-1/2} [1 - (2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1/2}}{\Gamma(2) e^{x_0/2} x_0^{-1/2} [1 - (2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1/2}} \times \\
 & \times \frac{J_1\{2\sqrt{x} [1 - (2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{1/2}\}}{J_1\{2\sqrt{x_0} [1 - (2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{1/2}\}} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{2\pi} e^{-R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2} [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2]^{R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - 1}}{\sqrt{2\pi} e^{-R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2} [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2]^{R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - (\gamma + 1)/2}} \times \\
 & \times \frac{\pi}{\sin\pi [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - \gamma/2]} \rightarrow \\
 & \rightarrow n_0(\gamma - 1) \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} e^{-\ln\eta \cdot R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \frac{[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2]^{\gamma - 1/2}}{\sin\pi [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - \gamma/2]} \times \\
 & \times \frac{e^{(x-x_0)/2} x^{-1/2} I_1\{2\sqrt{x} [(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}\}}{x_0^{-1/2} I_1\{2\sqrt{x_0} [(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}\}} \rightarrow \\
 & \rightarrow \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0c)^3} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} e^{-\ln\eta \cdot R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{(x-x_0)/2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1/2} \times \\
 & \times \frac{e^{2\sqrt{x}[(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}} \sqrt{2\pi} 2\sqrt{x_0} [(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}}{e^{2\sqrt{x_0}[(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}} \sqrt{2\pi} 2\sqrt{x} [(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}} \times \\
 & \times \frac{[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2]^{\gamma - 1/2} \pi}{\sin\pi [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - \gamma/2]} \rightarrow \\
 & \rightarrow \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0c)^3} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-3/4} e^{(x-x_0)/2} \times \\
 & \times \frac{e^{-\ln\eta \cdot R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 2(\sqrt{x_0} - \sqrt{x})[(2/3)R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 1]^{1/2}} [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2]^{\gamma - 1/2} \pi}{\sin\pi [R(\cos\varphi + i\sin\varphi)/2 - \gamma/2]} .
 \end{aligned}$$

(16)

Поскольку модуль от интеграла меньше интеграла от модуля, и в силу того, что $\ln \eta > 0$ для $\eta > 1$, а также $\cos \varphi > 0$ для замыкаемой справа полуокружности, легко убедиться в том, что интеграл от модуля экспоненциально стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, при этом степенные функции от R с положительными показателями не могут изменить характер сходимости. В выражении (16) использовались асимптотические выражения для Γ -функции [1, 2], вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b; z)$ при больших положительных значениях параметра a [1, 2], для модифицированных функций Бесселя при большом значении аргумента [1, 3]. Использована также формула $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/(\sin \pi z)$ и формула $J_1(iz) = iI_1(z)$, где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, а I_1 — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка. Тогда по теореме Коши [11] интеграл по замкнутому контуру (вертикальная прямая плюс полуокружность) будет равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов от полюсов, которые попадают в данный контур. В предельном случае $R \rightarrow \infty$ получится ряд

$$\begin{aligned}
 N(x, \eta > 1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \eta^{-s} \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)F\left(\frac{2}{3}s, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)F\left(\frac{2}{3}s, 2; x_0\right)} ds = \\
 &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3 2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \eta^{-2s^*} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s^*}{2}+1\right)\Gamma\left(s^*-\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right)} ds^* = \\
 &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3 \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right) F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2+2n), 2; x\right)}{n! F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2+2n), 2; x_0\right)} \eta^{-(\gamma+2+2n)}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

В случае очень больших энергий $\eta \gg 1$ достаточно ограничиться членом ряда с нулевым номером:

$$N(x, \eta \gg 1) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \frac{F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2), 2; x\right)}{F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2), 2; x_0\right)} \eta^{-(\gamma+2)}. \tag{18}$$

Это хорошо известное решение А. З. Долгинова и И. Н. Топтыгина [8].

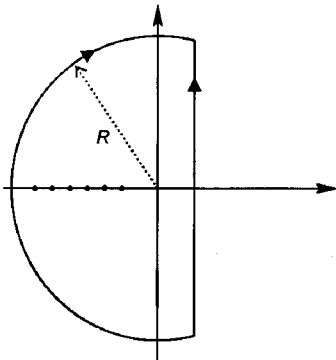


Рис. 2. Контур для вычисления низкоэнергичной компоненты спектра для задачи с независимым от расстояния коэффициентом диффузии

В случае $\eta < 1$ контур замыкаем полуокружностью слева (рис. 2), при этом $\text{Im} \eta < 0$, $\cos \varphi < 0$. Дальнейшие выкладки аналогичны вышеизложенным, с той лишь разницей, что используется асимптотическое значение вырожденной гипергеометрической функции при больших отрицательных значениях параметра a [1, 2].

$$\begin{aligned}
 N(x, \eta < 1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^{-s} \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) F\left(\frac{2}{3}s, 2; x_0\right)} ds = \\
 &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \eta^{-2s^*} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-s^*+1\right) \Gamma\left(s^*-\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) F\left(\frac{4}{3}s^*, 2; x_0\right)} ds^* = \\
 &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3 \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+m\right) F\left(\frac{2}{3}(-2m+1), 2; x\right)}{m! F\left(\frac{2}{3}(-2m+1), 2; x_0\right)} \eta^{-(2m-1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}+\frac{3\alpha_l}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{3\alpha_l}{4}-\frac{1}{2}\right) F(-\alpha_l, 2; x)}{F'(-\alpha_l, 2; x_0)} \eta^{3\alpha_l/2} \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

В случае очень малых энергий $\eta \ll 1$ основной вклад даст член ряда с нулевым номером от первой суммы, всеми остальными можно пренебречь:

$$N(x, \eta \ll 1) = \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \frac{F\left(\frac{2}{3}, 2; x\right)}{F\left(\frac{2}{3}, 2; x_0\right)} \eta^{-1}. \quad (20)$$

В другом, более сложном и громоздком виде, решение задачи (8) получено в работах [10, 15] методом разделения переменной. Там же с помощью суммирования рядов для вырожденных гипергеометрических функций получены и выражения (18), (20).

Решение краевой задачи (7) может быть получено аналогично:

$$\begin{aligned}
 N(x, \eta > 1) &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3 \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right) F\left(\frac{2}{3(-\sigma+1)}(\gamma+2+2n), \frac{2}{-\sigma+1}; x\right)}{n! F\left(\frac{2}{3(-\sigma+1)}(\gamma+2+2n), \frac{2}{-\sigma+1}; x_0\right)} \eta^{-(\gamma+2+2n)}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(x, \eta < 1) = & \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3 \Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2} + m\right) F\left(\frac{2}{3(-\sigma + 1)}(-2m + 1), \frac{2}{-\sigma + 1}; x\right)}{m! F\left(\frac{2}{3(-\sigma + 1)}(-2m + 1), \frac{2}{-\sigma + 1}; x_0\right)} \eta^{-(2m-1)} + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma + 2}{2} + \frac{3\alpha_l(-\sigma + 1)}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{3\alpha_l(-\sigma + 1)}{4} - \frac{1}{2}\right) F\left(-\alpha_l, \frac{2}{-\sigma + 1}; x\right)}{F'\left(-\alpha_l, \frac{2}{-\sigma + 1}; x_0\right)} \eta^{3\alpha_l/2} \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $\kappa = kr$

Введем переменную $x = r/r_0$ и обозначим $\mu = u/k$. Тогда краевая задача для распространения ГКЛ при граничном условии (3) будет иметь вид

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (3 - \mu)x \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial N}{\partial \eta} = 0, \\ N(1, \eta) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \eta^{-1} (1 + \eta^2)^{-(\gamma+1)/2}, \\ N(0, \eta) < \infty. \end{cases} \quad (23)$$

Применяя к ней преобразование Меллина, получим

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 \hat{N}}{\partial x^2} + (3 - \mu)x \frac{\partial \hat{N}}{\partial x} - \frac{2}{3} s \hat{N} = 0, \\ \hat{N}(x_0, s) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma - s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{s - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)}, \\ \hat{N}(0, s) < \infty. \end{cases}$$

Образ решения имеет следующий вид:

$$N(x, s) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma - s}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{s - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)} x^{-1 + \frac{\mu}{2} + \sqrt{(-1 + \mu/2)^2 + (2/3)\mu s}}.$$

Обратное преобразование Меллина для случая высоких энергий $\eta > 1$ проводится аналогично случаю $\kappa = \text{const}$. Все особенности принадлежат Γ -функции и лежат в правой полуплоскости. Контур выбираем как на рис. 1. Можно убедиться, что при неограниченном увеличении радиуса полуокружности интеграл по ней стремится к нулю, и будем иметь

$$N(x, \eta > 1) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-(\gamma+2+2n)} x^{-1 + \frac{\mu}{2} + \sqrt{(-1 + \mu/2)^2 + (2/3)\mu(\gamma+2+2n)}}. \quad (24)$$

В случае малых энергий в левой полуплоскости возникает особая точка, в которой выражение $\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu s}$ обращается в ноль (точка ветвления). Для взятия интеграла понадобится делать разрез вдоль отрицательной полуоси, и все особые точки от отрицательных значений гамма-функции попадут на этот разрез. Эту трудность мы обойдем, рассмотрев решение вспомогательной специальной задачи:

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (3-\mu)x \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2}{3}\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \\ N(1, \eta) = \frac{\delta(\eta-\eta_0)}{\eta_0^2}, \\ N(0, \eta) < \infty. \end{cases} \quad (25)$$

Образ Меллина задачи (25) имеет вид

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + (3-\mu)x \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{2}{3}s\tilde{F} = 0, \\ N(1, \eta) = \eta_0^{s-3}, \end{cases}$$

а ее решение —

$$\tilde{F}(x, s, \eta_0) = \eta_0^{s-3} x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu s}}.$$

Получим решение специальной краевой задачи, применяя обратное преобразование Меллина:

$$\begin{aligned} F(x, \eta, \eta_0) &= \frac{x^{-1+\mu/2}}{\eta_0^3} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu s}} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{-s} ds = \\ &= \frac{3}{2\mu} \frac{x^{-1+\mu/2}}{\eta_0^3} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{3}{2\mu}\left(-1+\frac{\mu}{2}\right)^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\ln x^{-1}\sqrt{\bar{s}+3/(2\mu)\ln(\eta_0/\eta)\bar{s}}} d\bar{s}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\bar{s} = \left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu s,$$

$$s = \frac{\bar{s} - \left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2}{(2/3)\mu},$$

$$ds = \frac{3}{2\mu} d\bar{s},$$

Рассмотрим контур для переменной \bar{s} . Пусть $\eta > \eta_0$, тогда для взятия интеграла (26) контур замыкаем справа полуокружностью C_R , как на рис. 1, с тем отличием, что внутри контура особенностей нет, а на самом контуре интеграл по нему равен нулю при $R \rightarrow \infty$ из-за положительного знака косинуса величины $\text{Re}^{i\varphi}$ и отрицательного знака величины $\ln(\eta_0/\eta)$. При этом получаем $F(x, \eta, \eta_0) = 0$.

Пусть $\eta < \eta_0$, тогда в точке $\bar{s} = 0$ подынтегральная функция становится многозначной. В этом случае по отрицательной полуоси проводим разрез и обходим точку ветвления по малой окружности c_ρ . Кроме того, контур включает две четверть-окружности C_R (рис. 3). Интегралы по четверть-ок-

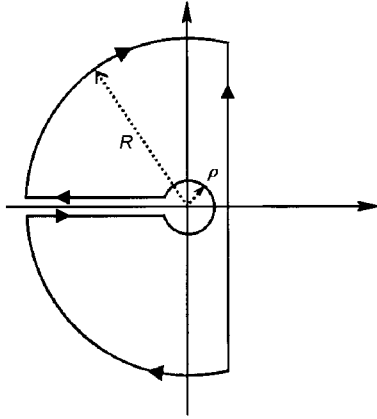


Рис. 3. Контур для вспомогательной задачи

ружностям C_R при $R \rightarrow \infty$ равны нулю, так как косинус величины $Re^{i\varphi}$ отрицателен, и $\ln \eta_0/\eta > 0$. Интеграл по малой окружности c_ρ пропорционален ρ , поэтому при $\rho \rightarrow 0$ он равен нулю. Значит, следует учесть вклад интегралов по берегам разреза:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\ln(1/x)\sqrt{s}+3/(2\mu)\ln(\eta_0/\eta)\bar{s}} d\bar{s} = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\ln x^{-1}i\sqrt{x}+3/(2\mu)\ln(\eta_0/\eta)\bar{x}} d\bar{x} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{\ln x^{-1}i\sqrt{x}-3/(2\mu)\ln(\eta_0/\eta)\bar{x}} d\bar{x} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-3/(2\mu)\ln(\eta_0/\eta)\bar{x}} \sin \ln(1/x)\sqrt{x} d\bar{x} = \\ & = \sqrt{\frac{\mu}{6\pi \ln(\eta_0/\eta)}} \cdot \frac{\ln(1/x)}{\ln(\eta_0/\eta)} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{3}{2\mu}(-1+\frac{\mu}{2})^2} \exp\left[-\frac{\mu \ln^2 x}{6 \ln(\eta_0/\eta)}\right]. \end{aligned}$$

Здесь интеграл взят с помощью дифференцирования по параметру интеграла из таблиц [5]. Окончательно решение специальной краевой задачи приобретает вид

$$F(x, \eta, \eta_0) = 0$$

для $\eta > 1$ и

$$F(x, \eta, \eta_0) = \frac{x^{-1+\mu/2}}{\eta_0^3} \sqrt{\frac{\mu}{6\pi \ln(\eta_0/\eta)}} \cdot \frac{\ln(1/x)}{\ln(\eta_0/\eta)} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{3}{2\mu}(-1+\frac{\mu}{2})^2} \exp\left[-\frac{\mu \ln^2 x}{6 \ln(\eta_0/\eta)}\right] \quad (27)$$

для $\eta < 1$.

Представим граничный спектр в виде

$$\begin{aligned} N(\eta) &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \eta^{-1}(1+\eta^2)^{-(\gamma+1)/2} = \\ &= \frac{n_0(\gamma-1)}{(m_0c)^3} \int_0^\infty \frac{\delta(\eta-\eta_0)}{\eta_0^2} \eta^{-1}(1+\eta^2)^{-(\gamma+1)/2} \eta_0^2 d\eta_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Такое представление возможно для линейных краевых задач. Тогда решение краевой задачи (20) примет вид

$$N(x, \eta) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \int_0^\infty F(x, \eta, \eta_0) \eta^{-1} (1 + \eta^2)^{-(\gamma+1)/2} \eta_0^2 d\eta_0. \quad (29)$$

При этом функция $F(x, \eta, \eta_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению краевой задачи (23) и граничному условию (4):

$$N(1, \eta) = \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \eta^{-1} (1 + \eta^2)^{-(\gamma+1)/2}.$$

Подставив теперь конкретную величину (27) в выражение (29), получим

$$\begin{aligned} N(x, \eta) &= \\ &= \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \int_0^\infty \frac{1}{\eta_0^3} \sqrt{\frac{\mu}{6\pi \ln(\eta_0/\eta)}} \cdot \frac{\ln(1/x)}{\ln(\eta_0/\eta)} x^{-1+\mu/2} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{3}{2\mu}(-1+\frac{\mu}{2})^2} \times \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\mu \ln^2 x}{6 \ln(\eta_0/\eta)}\right] \eta^{-1} (1 + \eta^2)^{-(\gamma+1)/2} \eta_0^2 d\eta_0 = \\ &= \frac{n_0(\gamma - 1)}{(m_0 c)^3} \int_0^\infty \eta^{-1} e^{-\xi} (1 + \eta^2 e^{2\xi})^{-(\gamma+1)/2} \sqrt{\frac{\mu}{6\pi\xi}} \times \\ &\quad \times \frac{\ln(1/x)}{\xi} x^{-1+\mu/2} e^{-3\xi/(2\mu)(-1+\mu/2)^2 - \mu \ln^2 x / (6\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (30)$$

В интеграле произведена замена переменной $\xi = \ln(\eta_0/\eta)$, $d\xi = d\eta_0/\eta_0$, $\eta_0 = \eta e^\xi$. Видно, что $\xi > 0$ в силу равенства (27).

Интеграл будем брать отдельно для значений величины безразмерного импульса $\eta > 1$ (высокие энергии) и $\eta < 1$ (низкие энергии).

Имеем для $\eta > 1$

$$\eta^{-1} e^{-\xi} (1 + \eta^2 e^{2\xi})^{-(\gamma+1)/2} = \eta^{-(\gamma+2)} e^{-(\gamma+2)\xi} \sum_{n=0}^\infty C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-2n} e^{-2n\xi}. \quad (31)$$

Для $\eta < 1$ следует учесть тот факт, что $\eta e^\xi < 1$ при $0 < \xi < \ln(1/\eta)$, и что $\eta e^\xi > 1$ при $\ln(1/\eta) < \xi < \infty$:

$$\begin{aligned} &\eta^{-1} e^{-\xi} (1 + \eta^2 e^{2\xi})^{-(\gamma+1)/2} = \\ &= \begin{cases} \eta^{-1} e^{-\xi} \sum_{n=0}^\infty C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{2n} e^{2n\xi} & \text{для } 0 < \xi < \ln(1/\eta), \\ \eta^{-(\gamma+2)} e^{-(\gamma+2)\xi} \sum_{n=0}^\infty C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-2n} e^{-2n\xi} & \text{для } \ln(1/\eta) < \xi < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя разложения (31), (32) в интеграл и используя табличные формулы [12]:

$$\begin{aligned} &\int_0^x e^{-a\xi - \beta/\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi/a} [e^{-2\sqrt{a\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{ax} - \sqrt{\beta/x}) + \\ &\quad + e^{2\sqrt{a\beta}} \operatorname{erf}(\sqrt{ax} + \sqrt{\beta/x}) + e^{-2\sqrt{a\beta}} - e^{2\sqrt{a\beta}}], \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\xi - \beta/\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}},$$

получим выражение для случая $\eta > 1$

$$N(x, \eta > 1) = n_0(\gamma - 1) \sum_{n=0}^{\infty} C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-(\gamma+2+2n)} x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2+2n)}},$$

которое полностью совпадает с выражением (24), полученным преобразованием образа Меллина решения задачи (23) для больших импульсов, и выражение для случая $\eta < 1$:

$$\begin{aligned} N(x, \eta < 1) = & \\ = & \frac{n_0(\gamma - 1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-1+2n} \left[x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+(\mu/2))^2+(2/3)\mu(1-2n)}} \times \right. \\ & \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3\ln(1/\eta)}{2\mu}} \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu(1-2n)} - \sqrt{\frac{\mu}{6\ln(1/\eta)}} \ln \frac{1}{x} \right) - \\ & \left. - x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(1-2n)}} \times \right. \\ & \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3\ln(1/\eta)}{2\mu}} \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu(1-2n)} + \sqrt{\frac{\mu}{6\ln(1/\eta)}} \ln \frac{1}{x} \right) + \\ & \left. + x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(1-2n)}} + x^{-1+\mu/2-\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(1-2n)}} \right] + \\ & + \frac{n_0(\gamma - 1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{-(\gamma+1)/2}^n \eta^{-(\gamma+2+2m)} \left[x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2+2m)}} \times \right. \\ & \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3\ln(1/\eta)}{2\mu}} \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu(\gamma+2+2m)} - \sqrt{\frac{\mu}{6\ln(1/\eta)}} \ln \frac{1}{x} \right) + \\ & \left. + x^{-1+\mu/2-\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2+2m)}} \times \right. \\ & \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3\ln(1/\eta)}{2\mu}} \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu(\gamma+2+2m)} + \sqrt{\frac{\mu}{6\ln(1/\eta)}} \ln \frac{1}{x} \right) + \\ & \left. + x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2+2m)}} + x^{-1+\mu/2-\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2+2m)}} \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Предельные значения плотности ГКЛ в случае больших и малых энергий даются нулевым членом ряда (24) и нулевым членом ряда (33) от первой суммы выражения для плотности:

$$N(x, \eta \gg 1) = n_0(\gamma - 1) \eta^{-(\gamma+2)} x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2)}}, \quad (34)$$

$$N(x, \eta \ll 1) = n_0(\gamma - 1) \eta^{-1} x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu}}. \quad (35)$$

Следует отметить, что непосредственное применение преобразования образа Меллина решения задачи (23) потребовало бы нетривиального и кропотливого подхода для получения решения (33). С другой стороны,

применение метода разделения переменных в случае коэффициента диффузии, пропорционального расстоянию от Солнца, невозможно из-за отсутствия собственных функций краевой задачи (23).

Соответствующие плотностям (34), (35) потоки имеют вид

$$j(x, \eta \gg 1) = n_0(\gamma - 1)\eta^{-(\gamma+2)}x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu(\gamma+2)}} \times \left(1 - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu(\gamma+2)} + \frac{\mu(\gamma+2)}{3}\right), \quad (36)$$

$$j(x, \eta \ll 1) = n_0(\gamma - 1)\eta^{-1}x^{-1+\mu/2+\sqrt{(-1+\mu/2)^2+(2/3)\mu}} \times \left(1 - \frac{\mu}{6} - \sqrt{\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\mu}\right). \quad (37)$$

Видно, что в предельном случае высоких энергий поток частиц направлен от Солнца, а малых — к Солнцу. Аналогичный результат в случае не зависящего от расстояния коэффициента диффузии был получен в работе [15] на основе свойств вырожденных гипергеометрических функций. Поскольку градиент плотности частиц положителен на всем диапазоне импульсов, то частицы приобретают энергию в солнечном ветре, а стационарное распределение устанавливается таким образом, что частицы малой энергии «втягиваются» в гелиосферу, а большой — «выталкиваются» из нее. При этом повышения плотности частиц высокой энергии не наблюдается.

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

Данная постановка задачи не позволяет получить такое решение, которое бы учитывало наличие частиц высокой энергии, которую они приобрели в гелиосфере.

Для наиболее простой функциональной зависимости коэффициента диффузии от расстояния до Солнца и независимости его от энергии частиц полученные точные аналитические решения являются довольно сложными по форме. В то же время они дают возможность рассчитать все необходимые величины: концентрации частиц, потоки частиц, степень их анизотропии, эффективный показатель спектра интенсивности КЛ в любой точке гелиосферы.

Желательно иметь более простые, но достаточно точные приближения для концентрации галактических космических лучей. Эти приближения можно получить итерационным методом, разработанным в работе [14]. При этом сравнение точных и приближенных решений позволило бы оценить эффективность метода.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.—830 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973.—294 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.—295 с.
4. *Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л. и др.* Астрофизика космических лучей / Под ред. В. Л. Гинзбурга. — М.: Наука, 1984.—357 с.
5. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.—1108 с.
6. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики. — М.: Мир, 1970.—Вып. 2.—352 с.
7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.—542 с.

8. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. Теория движения космических частиц в межпланетных магнитных полях // Труды пятой Всесоюзной школы по космофизике. — Апатиты: Изд-во Кольского филиала АН СССР, 1968.—С. 167—182.
9. Дорман Л. И., Кац М. Е., Шахов Б. А. О связи между различными формами уравнения диффузии космических лучей // Геомагнетизм и аэрономия.—1976.—16, № 5.—С. 919—920.
10. Дорман Л. И., Кац М. Е., Федоров Ю. И., Шахов Б. А. О балансе энергии космических лучей в случайном магнитном поле // Космические исслед. на Украине.—1979.—№ 13.—С. 58—69.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.—736 с.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.—797 с.
13. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.
14. Шахов Б. А., Колесник Ю. Л. Итерационный метод решения краевых задач теории распространения космических лучей // Кинематика и физика небес. тел.—2006.—22, № 2.—С. 101—108.
15. Dorman L. I., Katz M. E., Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Variations of cosmic ray energy in interplanetary space // Astrophys. and Space Sci.—1983.—94.—P. 43—95.

Поступила в редакцию 26.02.08