

УДК 523.24:521.182

А. В. Иванцов

Научно-исследовательский институт «Николаевская астрономическая обсерватория»
Министерства образования и науки Украины
54030 Николаев, ул. Обсерваторная, 1

Динамическая модель движения астероидов на основе теории DE405

Разработана модель движения астероидов на основе использования теории DE405. Погрешность вычисляемых положений астероида главного пояса составляет 0.03" на 50-летнем интервале интегрирования. Для вычислительной стабильности модели необходимо выбирать локальную погрешность интегрирования 10^{-14} и использовать двойную точность стандарта двоичной арифметики с плавающей запятой IEEE 754-1985.

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ РУХУ АСТЕРОЇДІВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ DE405, Иванцов А. В. — Розроблено модель руху астероїдів на основі використання теорії DE405. Похибка обчислених положень астероїда головного поясу складає 0.03" на 50-річному інтервалі інтегрування. Для обчислювальної стабільності моделі необхідно вибирати локальну похибку інтегрування 10^{-14} і використовувати подвійну точність стандарту двійкової арифметики із плаваючою комою IEEE 754-1985.

DYNAMICAL MODEL OF MOTION FOR ASTEROIDS WITH THE USE OF THE DE405 THEORY, by Ivantsov A. V. — A numerical model of motion for asteroids is developed on the basis of the DE405 theory. The error in position of an asteroid of the main belt is 0.03" for 50-year period of integration. For the computational stability, it is necessary to choose a local truncation error of integration of 10^{-14} and to use the double precision of the Standard for Binary Floating-Point Arithmetic IEEE 754-1985.

ВВЕДЕНИЕ

В динамической модели движения обычно выделяют три составные части, отражающие этапы ее построения: составление уравнений движения; выбор метода интегрирования уравнений движения; набор начальных условий и динамических постоянных (например масс), влияющих на движение. По мнению М. Стэндиша точность третьей составляющей, т. е. начальных условий и динамических постоянных, определяет точность современных эфемерид, поскольку считается, что другие два компонента являются

достаточно полными и точными. Значения начальных условий и динамических постоянных подбирают методом наименьших квадратов по наблюдениям. Точность их подбора, а следовательно эфемерид, зависит в основном от количества наблюдений. Верно также и обратное утверждение о том, что достаточно хорошая динамическая модель позволяет обнаруживать, а затем исключать систематические ошибки из наблюдений.

Эфемериды (численные теории) серии DE (Development Ephemeris, JPL) широко использовались с 1984 г. в подготовке американского издания *Astronomical Almanac*, а с 1986 по 2005 гг. и российского *Астрономического ежегодника*. Численная теория DE405 рекомендована Генеральной ассамблеей МАС для использования в астрономических ежегодниках с 2000 г. и стала своеобразным стандартом для изучения движения тел Солнечной системы [6]. С ней сравнивают варианты аналитических теорий VSOP (*Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides*) и численных эфемерид EPM (Институт прикладной астрономии РАН) [1]. В известной системе HORIZONS для вычисления динамических характеристик малых тел Солнечной системы также используется теория DE405 [4].

Цель работы состоит в описании вычислительных характеристик динамической модели движения астероидов, построенной на основе заимствованных координат и скоростей Солнца и больших планет из теории DE405, что обеспечивает согласованность получаемых результатов с принятым в настоящее время приближением уравнений движения для тел Солнечной системы, а также со значениями используемых в ней постоянных. Созданное в Николаевской обсерватории программное обеспечение позволяет исследовать чувствительность решения к вариациям различных параметров (динамических постоянных, начальных условий), что не было реализовано в системе HORIZONS, а также исследовать погрешности позиционных наблюдений астероидов.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Первый этап исследования сводился к выбору подходящих уравнений движения астероидов для численного их интегрирования совместно с координатами и скоростями Солнца и планет, заимствованными из теории DE405. Мы использовали уравнения движения из DE102, за исключением члена уравнения с возмущениями от астероидов [5]. В цитируемой работе взаимодействия точечных масс для Солнца и планет относительно барицентра Солнечной системы описывалось релятивистским уравнением движения в изотропной, параметризованной пост-ньютоновской метрике N тел. Приводим принятое нами выражение для ускорения i -го астероида:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j \right\} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \{ [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j] \cdot [(2 + 2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_i - (1 + 2\gamma)\dot{\mathbf{r}}_j] (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \}, \end{aligned}$$

где \mathbf{r}_i , $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ — барицентрические векторы положения, скорости и ускорения тела i , $\mu_j = Gm_j$, G — гравитационная постоянная, m_j — масса тела j , $r_{ij} =$

$= |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$, β — параметр, характеризующий нелинейность в суперпозиции гравитации, γ — параметр, характеризующий искривление пространства, которое производит покоящаяся единичная масса (в этом интегрировании, как и в общей теории относительности $\beta = \gamma = 1$), $v_i = |\mathbf{r}_i|$, c — скорость света. Величина $\ddot{\mathbf{r}}_j$ в двух слагаемых правой части обозначает барицентрическое ускорение каждого тела j в ньютоновском приближении того же ансамбля.

Вклад в инерциальное ускорение протяженного тела вследствие взаимодействия его фигуры с внешней точечной массой выражают в системе координат $\xi\eta\zeta$, где ось ξ направлена от протяженного тела к точечной массе, плоскость $\xi\zeta$ содержит ось вращения протяженного тела, а ось η дополняет систему до правой системы координат [5]. В этой системе

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = & -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=2}^{n_1} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1)P_n(\sin\varphi) \\ 0 \\ -\cos\varphi P_n'(\sin\varphi) \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=2}^{n_2} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1)P_n^m(\sin\varphi) [C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \\ m \sec\varphi P_n^m(\sin\varphi) [-C_{nm}\sin m\lambda + S_{nm}\cos m\lambda] \\ \cos\varphi P_n^m(\sin\varphi) [C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где μ — произведение гравитационной постоянной G на массу точечного тела, r — расстояние между центрами масс двух тел, n_1 и n_2 — максимальные степени зонального и тессерального разложений соответственно, $P_n(\sin\varphi)$ — полином Лежандра степени n , $P_n^m(\sin\varphi)$ — присоединенная функция Лежандра степени n и порядка m , J_n — зональная гармоника для протяженного тела, C_{nm} , S_{nm} — тессеральные гармоники для протяженного тела, φ — широта точечной массы относительно системы координат, зафиксированной в протяженном теле, λ — восточная долгота точечной массы в той же зафиксированной в теле системе координат. Штрих обозначает дифференцирование по аргументу $\sin\varphi$.

Взаимодействие между фигурой протяженного тела и точечной массой также вызывает инерциальное ускорение точечной массы. Если \mathbf{r}_{fig} обозначает ускорение, вычисленное из (2), тогда соответствующее ускорение точечной массы

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pm} = -\frac{m_{fig}}{m_{pm}} \ddot{\mathbf{r}}_{fig}, \quad (3)$$

где m_{fig} и m_{pm} — масса протяженного тела и точечная масса соответственно.

Принимая во внимание, что в DE405 координаты и скорости тел уже включают все упомянутые выше поправки, нам предстояло в уравнение движения астероидов (1) добавить лишь явно выраженную часть (3). Из учтенных в DE405 взаимодействий некоторое влияние на движение астероидов при интегрировании для длительных промежутков времени будет оказывать лишь зональная гармоника J_2 Солнца (фигурой Земли и Луны можно пренебречь). Выполнив необходимые подстановки и переход из зафиксированной в протяженном теле системы координат $\xi\eta\zeta$ в барицентр Солнечной системы, мы получаем явное выражение для $\ddot{\mathbf{r}}_{pm}$, которое и было включено в уравнение (1) нашей модели:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pm} = 3J_2 \mu_S \frac{R^2}{r_{Si}^4} \left\{ \left[\frac{5}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S}{r_{Si}} \cdot \mathbf{p} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S}{r_{Si}} - \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S}{r_{Si}} \cdot \mathbf{p} \right) \mathbf{p} \right\}, \quad (4)$$

где индекс S обозначает Солнце, R — радиус Солнца, \mathbf{p} — единичный вектор в направлении северного полюса Солнца.

Все динамические величины выражены по отношению к центру масс в метрике n тел, определение которого отличается от обычной ньютоновской формулировки [5]. Баричесентр Солнечной системы дается выражением

$$\sum_i \mu_i^* \mathbf{r}_i = 0,$$

где

$$\mu_i^* = \mu_i \left(1 + \frac{1}{2c^2} v_i^2 - \frac{1}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}} \right). \quad (5)$$

Здесь сохранены те же обозначения, что и в уравнении (1). Эти релятивистские величины вычисляются в нашей модели перед каждым шагом для всех тел: Солнца, планет и астероидов.

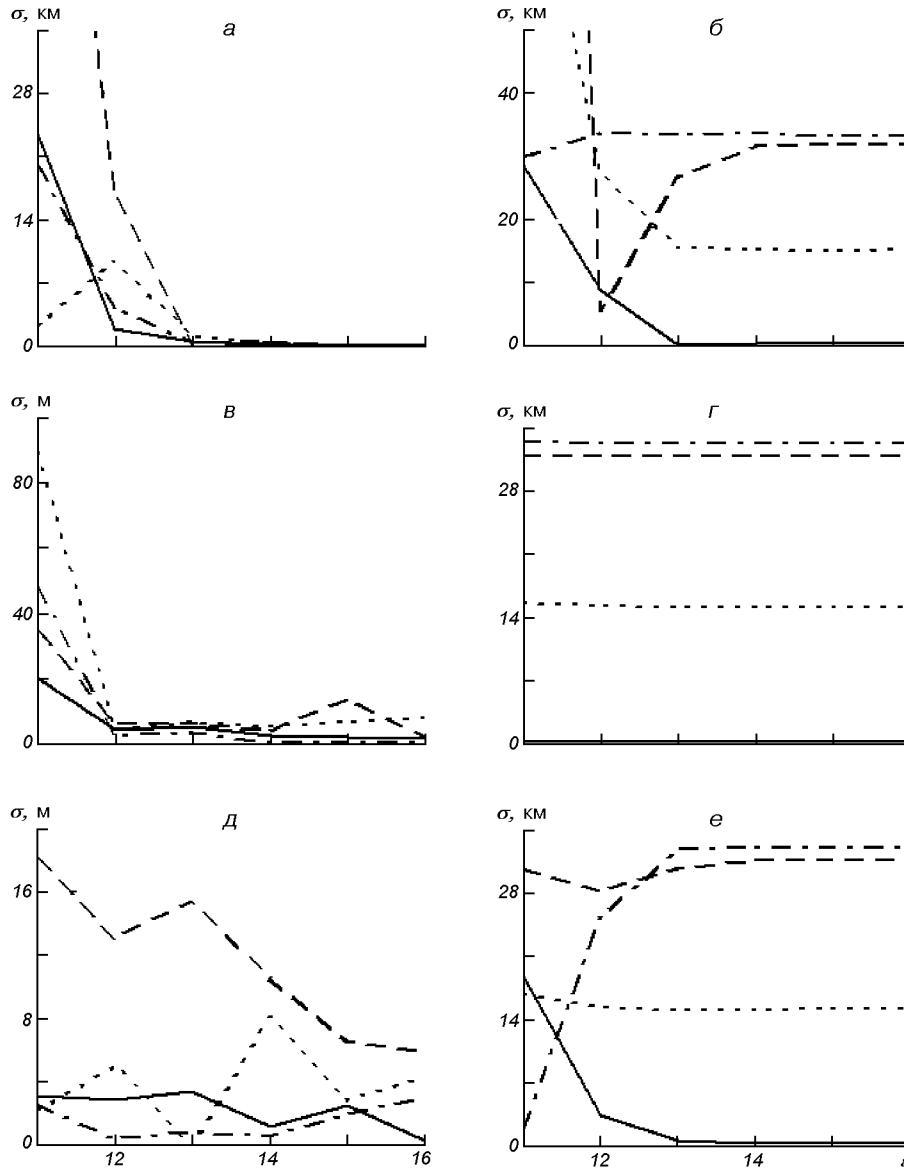
Учитывая, что значительная масса пояса астероидов сосредоточена в Церере, Палладе и Весте, было решено включить пока только эти астероиды в качестве возмущающих. Это и составляет основное отличие настоящей модели от теории DE405, где в математической модели учитывается вклад от 300 астероидов.

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ

Численное интегрирование полученных уравнений движения сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и может выполняться любым известным методом. Основной проблемой численного решения в нашем случае является накапливающаяся погрешность округления. Ее значение определяется числом арифметических операций, необходимых для достижения результата, т.е. порядком численного метода решения и числом шагов интегрирования. Мы выбрали численный метод интегрирования Адамса-Мультона переменного порядка (максимальный порядок 12) с переменным шагом [2].

Для тестирования построенной нами модели движения использовались координаты и скорости четырех астероидов: (1) Цереры, (2) Паллады, (4) Весты и (1082) Пиролы. Начальные условия в виде барицентрических прямоугольных координат и скоростей астероидов, отнесенные к среднему экватору Земли и равноденствию эпохи J2000.0, были заимствованы из системы HORIZONS, в которой для вычислений динамических характеристик малых тел Солнечной системы используется теория DE405, а также собственные элементы орбит, которые регулярно уточняются. Массы Солнца и больших планет заимствованы из теории DE405; массы Цереры, Паллады и Весты — из системы HORIZONS (их точные значения 63.2, 14.3, 17.8 км³/с² [7]). Отметим, что приведенные выше массы несколько отличаются от принятых в теории DE405 (округленные автором значения 62.4, 13.3, 17.2 км³/с² [6]). Поскольку результаты интегрирования при упомянутых выше условиях должны быть весьма близки к результатам, получаемым с помощью HORIZONS, можно принять длину вектора разности «наша модель — HORIZONS» в положениях астероидов за меру внешней погрешности интегрирования. Внутренней погрешностью выполненного нами интегрирования будем считать длину вектора разности между принятыми начальными положениями астероидов и их оценками, полученными при прямом и обратном на момент начальных условий интегрировании.

На рисунке представлены зависимости внутренних и внешних погрешностей интегрирования, которые накапливаются на 50-летнем интервале.



Погрешности интегрирования внутренние (а, в, д) и внешние (б, г, е), накопленные за 50 лет, в зависимости от выбранной погрешности вычисления $10^{-\epsilon}$: штрих-пунктир — астероид Церера, штрихи — Паллада, пунктир — Веста, сплошная линия — Пирола

Если принять в нашем интеграторе погрешность интегрирования на одном шаге равной $10^{-\epsilon}$, то графики а и б можно рассматривать как характеристики внутренних и внешних погрешностей соответственно. На обоих графиках наблюдается стабилизация значений погрешностей при $\epsilon = 13...14$. Внутренняя погрешность указывает на достижимую точность интегрирования, обусловленную исключительно численным методом и погрешностью округления. Любую внешнюю погрешность, превышающую эту внутреннюю погрешность, следует считать проявлением особенностей модели. Сравнивая оба рисунка при $\epsilon \geq 14$, можно с уверенностью утверждать, что между нашей моделью и HORIZONS имеется различие (математическое описание

модели HORIZONS вообще не документировано). Внешние погрешности для трех крупных астероидов (до 35 км) кажутся большими. Однако если сравнить их с разностью DE403 – DE200 гелиоцентрических расстояний для Юпитера (около 20 км [1]), приведенной нами на конец 50-летнего интервала, то окажется, что они весьма близки. Вычисления с последовательным исключением членов из уравнения движения (1) совместно с (4) и (5) показали, что основной вклад в результат вносит первое слагаемое уравнения (1), меньшее влияние на результат оказывает добавление большего числа возмущающих астероидов ненулевой массы, (на 3-4 порядка), и совсем малое изменение результатов эффект происходит от включения всех оставшихся членов уравнения. Для позиционных наблюдений астероидов главного пояса с большой полуосью около 2.5 а. е. исключение малых членов приведет в худшем случае к позиционной погрешности около 0.03" на 50-летнем интервале, что пока меньше погрешности самых лучших наземных астрометрических наблюдений [3, 7].

Для исследования причин большой внешней погрешности нами использованы приближенные оценки положения и скорости больших планет и Солнца на каждом шаге, которые заимствовались из теории DE405, что соответствует округлению значений начальных условий или введению ошибки примерно в 10^{-8} . Результаты вычислений приведены на рисунках *в* и *г*. При $\varepsilon < 12$ наблюдается вычислительная нестабильность интегрирования, а при $\varepsilon \geq 12$ решение стабилизируется. Внешняя погрешность в этом случае остается практически постоянной и не зависит от задаваемой точности интегрирования. Заметим, что внешняя точность стабилизировалась на том же уровне, что и на предыдущих графиках. Характерной особенностью такого вычислительного эксперимента было ощутимое увеличение количества шагов интегрирования для удержания одной и той же локальной погрешности интегрирования 10^{-16} . В этом случае видна стабильная работа нашего интегратора, который просто измельчает шаг для удержания необходимой точности.

На рисунках *д* и *е* представлены графики внутренней и внешней погрешностей в зависимости от количества ε значащих цифр в начальных условиях астероидов. Количество цифр изменялось округлением значений исходных данных при постоянной локальной погрешности интегрирования 10^{-16} . Внутренняя погрешность для Паллады уменьшается, для других астероидов наблюдается «шум» относительно некоторых стабильных величин. Поскольку Солнце и планеты являются главным источником возмущений для астероидов, то нецелесообразно искать меньшего уровня внутренней погрешности, чем можно достигнуть с нашей точностью интегрирования для планет. Для внешних погрешностей достигается уровень стабильности при $\varepsilon = 13$, как и на предыдущих графиках. График внешней погрешности для Цереры выглядит, на первый взгляд, необычно. Он свидетельствует о том, что начальные условия для Цереры можно подобрать таким образом, что внешняя погрешность уменьшится примерно в 10 раз! Для Пиролы уточнение начальных условий ведет к уменьшению погрешности, что должно было наблюдаться для всех астероидов. Другие астероиды также могут являться источниками возмущений. (В нашей модели воздействие оставшихся 297 астероидов считалось пренебрежимым). Кроме того, легко заметить, что на всех графиках Пиролы, астероид «нулевой» массы, показал не согласующиеся с большой тройкой астероидов результаты. Одно из предположений может быть таким. Этот астероид не возмущался существенно тремя большими астероидами, поэтому отклонения в движении этих астероидов для него не заметны. Более вероятной причиной остается, некоторое различие нашей модели и HORIZONS.

ВЫВОДЫ

1. Построенная в Николаевской обсерватории модель движения астероидов на основе DE405 позволяет вычислять координаты и скорости астероидов главного пояса с погрешностью $0.03''$ на 50-летнем интервале, что удовлетворяет требованиям современных самых точных позиционных наблюдений. Программное обеспечение может использоваться как для исследования чувствительности решения к вариации различных параметров, так и для исследования точности наземных позиционных наблюдений астероидов.

2. Для интегрирования уравнений движения тел Солнечной системы, результаты которого не будут зависеть от точности представления чисел, для достижения современной точности эфемерид, следует выбирать погрешность интегрирования 10^{-14} и использовать «двойную точность» распространенного на современных компьютерах стандарта двоичной арифметики с плавающей запятой IEEE 754-1985.

1. *Путьева Е. В.* Современные численные теории движения Солнца, Луны и больших планет // Тр. Ин-та прикладной астрономии РАН «Эфемеридная астрономия».—2004.— Вып. 10.—С. 112—134.
2. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений* / Под ред. Дж. Холл, Дж. Ватт. — М.: Мир, 1979.—312 с.
3. *Fienga A., Arlot J. E., Pascu D.* Impact of HIPPARCOS data on astrometric reduction of solar system bodies // Proc. of the ESA Symp. "Hipparcos-Venice 97", 13—16 May, Venice, Italy, ESA SP-402 / Ed. B. Battick. — Noordwijk, The Netherlands: ESA Publ. Division, 1997.—P. 157—160.
4. *Giorgini J. D., Yeomans D. K., Chamberlin A. B., et al.* JPL's on-line solar system data service // Bull. Amer. Astron. Soc.—1996.—28, N 3.—P. 1158.
5. *Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G.* DE 102 — A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries // Astron. and Astrophys.—1983.—125, N 1.—P. 150—167.
6. *Standish E. M.* JPL Planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405 // JPL IOM 312.F-98-048.—1998.—P. 1—18.
7. *Stone R. C.* Accurate FASTT positions and magnitudes of asteroids: 1997—1999 observations // Astron. J.—2000.—120, N 5.—P. 2708—2720.

Поступила в редакцию 04.09.06