УДК 517.925

О.С. БИЧКОВ, М.Г. МЕРКУР'ЄВ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ІМПУЛЬСНИХ ГІБРИДНИХ СИСТЕМ

Abstract: *Stability of the stationary state of impulsive hybrid automata is researched. Research is conducted by the method of Lyapunov functions. The sufficient conditions of stability and instability are received. These conditions are easily calculated and have the constructive nature.*
Key words: *hybrid automata, second Lyapunov method, stability of stationary condition.*

Анотація: *В роботі досліджується стійкість стаціонарного стану імпульсної гібридної системи. Дослідження проводиться за допомогою методу функцій Ляпунова. Побудовано достатні умови стійкості та нестійкості. Умови легко обчислюються і носять конструктивний характер.*
Ключові слова: *гібридний автомат, другий метод Ляпунова, стійкість стаціонарного стану.*

Аннотация: *В работе исследуется устойчивость стационарного состояния импульсной гибридной системы. Исследование проводится с помощью метода функций Ляпунова. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости. Условия легко вычисляются и носят конструктивный характер.*
Ключевые слова: *гибридный автомат, второй метод Ляпунова, устойчивость стационарного состояния.*

1. Вступ

В останні роки почалося дослідження гібридних (неперервно-дискретних) систем. Неперервно-дискретні системи є розвитком диференціальних рівнянь з розривною правою частиною, що моделюють системи, які можуть бути в кількох принципово різних станах. Наприклад, поведінку автомобільного колеса можна розділити на три стани: кочення (є контакт та зчеплення з поверхнею), ковзання (є контакт з поверхнею, але немає зчеплення; колесо буксує або заблоковане) і політ (немає контакту з поверхнею). При заданих умовах система переходить з одного стану в інший (наприклад, при наїзді на горб колесо переходить в стан польоту). Подібні задачі також виникають в задачах автоматичного керування, коли керуючий вплив є дискретним (наприклад, двигун ввімкнено – двигун вимкнено).

Дослідженням гібридних систем займалися багато авторів. Слід відмітити роботи Н.П. Бусленка, В.М. Глушкова, С.В. Ємельянова та інш. [1–5, 7, 8]. Для математичного опису таких систем можна використовувати гібридні системи, введені у 80-ті роки А. Пнуелі.

Гібридні системи є математичним формалізмом, що узагальнює такі моделі, як диференціальні рівняння із розривною правою частиною, імпульсні диференціальні рівняння, системи переходів А. Пнуелі, логіко-динамічні системи В. Глушкова та інші.

В роботах, що присвячені дослідженню стійкості розв'язків гібридних систем [9, 10], застосовують підхід, який запропонував Р. Де Карло в [11]. Цей підхід, крім обчислення похідної, вимагає обчислення послідовності значень функцій Ляпунова $V_i(x)$ на траєкторіях гібридної системи в точках переключень та перевірки умови

$$V_i(x(t_{i,k})) \le V_i(x(t_{i,k-1})),$$

де $t_{i,k}$ – означає k-й момент часу переходу у векторне поле f_i, $V_i(.)$ – функція Ляпунова для i-го локального стану. Тобто умова стійкості залежить від розв'язків гібридної системи. Якщо виконується ця умова, то система стійка за Ляпуновим. Але не завжди це зручно робити.

В [2] пропонується використовувати схожий підхід. Цей підхід дозволяє досліджувати стійкість гібридних систем, розв'язуючи лише алгебраїчні рівняння, в які входять s-функції.

Дана стаття є розвитком [2]. Пропонується використовувати введені в [2] s- та u-функції для аналізу стійкості і нестійкості імпульсних гібридних систем.

2. Достатні умови стійкості нульового стаціонарного стану гібридного автомату

Нехай динаміка процесу описується різними математичними моделями в N різних станах. Занумеруємо ці стани від 1 до N і позначимо множину станів як $Q=\{1,...,N\}$. Неперервні змінні позначимо через $X=\{x_1,...,x_n\}$, $n>0$, $x_i \in R$.

Вважаємо, що в кожному з локальних станів математична модель являє собою стаціонарне диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt}=f_i(x)$. Множину функцій f_i позначимо через F: $F=\{f_i : Q\times R^n \to R^n, i=\overline{1,N}\}$. Вважаємо, що кожна з f_i задовольняє умову Ліпшица.

Нехай система перебуває в i-му стані. Переключення з i-го стану в інший не відбувається, поки виконується умова $(i,x)\in Inv$, $Inv \subseteq Q\times R^n$.

Для переключення із стану в стан треба задати, при яких умовах відбувається переключення та в який стан і в яку точку фазового простору перейде система після переключення. Для цього призначена множиннозначна функція $Jump : Q\times R^n \to \beta(Q\times R^n)$, де через $\beta(\cdot)$ позначено множину усіх підмножин. Якщо $Jump(i,x)\neq\varnothing$, то, опинившись у стані (i,x), система недетермінованим чином переходить в один із станів з множини $Jump(i,x)$.

Нарешті, множина $Init \subseteq Q\times R^n$ задає усі можливі початкові умови. Якщо $(i,x)\in Init$, це значить, що еволюція гібридної системи може починатися з точки x локального стану i.

Вважатимемо, що $Jump(i,x)=\varnothing \vee \{(i \bmod N)+1, q_i(x)\}$, тобто переключення циклічне $(1\to 2\to ...\to N\to 1)$ і детерміноване. Значення $q_i(x)-x$ назвемо перехідним імпульсом.

Означення 1. [3]. Гібридною системою назвемо кортеж $H=(Q, X, F, Init, Inv, Jump, \tau)$, де τ – гібридний час.

У звичайних динамічних системах роль часу виконувала незалежна змінна $t\in[t_0;\infty)$. Теорія гібридних систем розглядає розв'язки рівнянь на послідовно розташованих відрізках часу $[t_0^*,t_1^*]$, $[t_1^*,t_2^*]$,… Ця послідовність може бути як скінченною, так і нескінченною. Цілком можливо, що $\lim\limits_{i\to\infty} t_i^* < \infty$.

Визначимо гібридний час τ:

– або як скінченну послідовність $\tau_H=\{\tau_i\}_1^N$, де $\tau_i=(Pre\_jump_i,\ [t_{i-1}^*,\ t_i^*],$ $Post\_jump_i),\ i=1..N;\ t_0=0,\ \ [t_{i-1}^*,t_i^*]$ – замкнуті інтервали і тільки останній інтервал $\tau_N=[t_N,\infty)$ – напіввідкритий;

– або як послідовність $\tau_H=\{\tau_i\}_1^\infty$, що включає тільки замкнуті кінцеві інтервали $[t_{i-1}^*,t_i^*]$.

Елементи гібридного часу Pre_jump_i, $Post\_jump_i$ назвемо часовими щілинами чергового такту $\tau_i = (Pre\_jump_i,\ [t_{i-1}^*, t_i^*],\ Post\_jump_i)$ гібридного часу $\tau = \{\tau_1, \tau_2, ...\}$.

На відрізках часу $[t_{i-1}^*, t_i^*]$ гібридна система поводиться як звичайна динамічна система. В точці t_i^* стає істинним предикат, що визначає зміну поведінки. Точка t_i^* є одночасно кінцем поточного інтервалу і початком нового.

Позначимо через T множину усіх можливих τ.

Означення 2. Фазовою орбітою гібридної системи H назвемо множину $\chi = \{(\tau, i, x)\}$, де $\tau \in T$, i – номер локального стану і $x\ :\ \tau \to R^n$ таке, що

1) $\left(i\left(\tau_0\right), x\left(\tau_0\right)\right) \in Init;$

2) для всіх *i* таких, що $\tau_i < \tau_i^{'}$ пара $(i(t),\ x(t)) \in Inv$ визначає неперервну динаміку в i-му локальному стані; пара $(i(\tau_{i+1}),\ x(\tau_{i+1})) \in Jump(i(\tau_i^{'}),\ x(\tau_i^{'}))$ визначає дискретну динаміку.

Таким чином, поведінка гібридної системи є послідовністю «склеєних» між собою розв'язків диференціального рівняння на окремих проміжках.

Припустимо, що орбіта гібридної системи починається з першого стану. Нехай позначення $x^{i-} \to x^{i+}\big|_{i \to i+1}$ означає, що гібридна система переходить із стану i в стан $i+1$ і значення x^{i-} береться на множині, що задає умову переходу, а x^{i+} – значення фазової координати після стрибка, тобто $x^{i+} = q(x^{i-})$.

Означення 3. Неперервний стан $x = 0$ назвемо тривіальним стаціонарним станом гібридної системи H, якщо існує непорожня множина $\overline{Q} \subset Q$ така, що для всіх $i \in \overline{Q}$ виконується:

1) з $(i^{'},\ z^{'}) \in Jump(i,\ 0)$ випливає, що $z^{'} = 0$ та $i^{'} \in \overline{Q}$;

2) $f(i,\ 0) = 0$ для всіх $i \in Q.$

Означення 4. Тривіальний стаціонарний стан $x = 0$ гібридної системи H називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\chi = (\tau, i,\ x)$, що задовольняють умову $\left|x_0\right| < \delta$, виконується $\left|x(t)\right| < \varepsilon$ для всіх $t \in \tau$.

Через $|\cdot|$ позначено евклідову норму.

Побудуємо таку послідовність $\{c^i\}$, $i = \overline{0,\ N}$:

$$c^0 \in (0, C),\quad c^1 = \sup_{\substack{x^{1-} \to x^{1+}\big|_{1\to 2} \\ V^1(x^{1-}) \le c_0}} V^2(x^{1+}),\quad c^2 = \sup_{\substack{x^{2-} \to x^{2+}\big|_{2\to 3} \\ V^2(x^{2-}) \le c_1}} V^3(x^{2+}), \ldots,$$

$$c^N = \sup_{\substack{x^{N-} \to x^{N+}\big|_{N\to 1} \\ V^N(x^{N-}) \le c_{N-1}}} V^1(x^{N+}). \tag{1}$$

Аналогічну послідовність можна побудувати, починаючи з другого стану, з третього, і т.д.

Позначимо через Ω_i множину, що описує i-й локальний стан. Нехай існують функції Ляпунова $V^i(x)$, що задані на множинах Ω_i.

Означення 5. Назвемо $V(i,\, x) = \{V^i(x)\},\ i = \overline{1,\, N}$ гібридною s-функцією, якщо $V^i(x)$ додатно визначені та для будь-якої послідовності $\{c^i\},\ i = \overline{0,\, N}$, визначеної в (1), що починається з будь-якого стану, виконується $c^N \le c^0$.

Будемо використовувати гібридну s-функцію для дослідження стійкості тривіального стаціонарного стану гібридної системи.

Означення 6. Похідною гібридної s-функції $V(i, x)$ в силу гібридної системи назвемо вираз

$$\dot{V}(i,x) = \left\{ \frac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)),\ i = \overline{1,\, N} \right\}.$$

В роботі розглядаються імпульсні гібридні системи, тобто початкове значення фазової змінної $x(t)$ в i-му локальному стані обчислюється за правилом

$$x(t_i^+) = q(x(t_i^-)).$$

Введемо такі позначення: $B_r = \{x \in R^n\ :\ |x| \le r\}$, $S_r = \{x \in R^n\ :\ |x| = r\}$.

Теорема 1. Нехай гібридна система H має тривіальну фазову орбіту $x = 0$ і для нього $|Q| < \infty$, $Jump(i,\, x) = \{(i+1,\, q_i(x))\}$, для $i = \overline{1, N-1}$, $Jump(N, x) = (1, q_N(x))$. Також нехай задано окіл початку координат $D \subset X$. Якщо для H існує додатно визначена гібридна s-функція $V(i,\, x):\ Q \times D \to R$ така, що $\dfrac{dV^i(x)}{dx} f_i(x(t)) \le 0$ для всіх $x \in D \cap \Omega_i$ та $i = \overline{1,\, N}$, існує неперервна монотонно зростаюча функція $\psi(\cdot) : R^+ \to R^+$ така, що

$$\psi(0) = 0 \text{ та } \|q_i(z)\| < \psi(\|z\|)\ \ \forall i \in Q, \tag{2}$$

тоді $x = 0$ – стійка тривіальна фазова орбіта гібридної системи H.

Доведення. Припустимо, що $Q = \{1, 2\}$. Позначимо $\Omega_r(i) = \{x \in R^n\ :\ V^i(x) \le r\}$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Покажемо, що можна, в умовах теореми, знайти $\delta > 0$ таке, що всі орбіти (τ, i, x), для яких виконується $x(\tau_0) \in B_\delta$, задовольняють умову $x(t) \in B_\varepsilon$ для всіх $t \in \tau$.

Виберемо $r_2 \in (0, \varepsilon)$ таке, що $B_{r_2} \subseteq D$. Покладемо $a_2(i) = \min\limits_{x \in S_{r_2}} V^i(x)$ та $b_2(i) \in (0, a_2(i))$. Тоді $\Omega_{b_2(i)}(i) \subseteq B_{r_2}$. Далі, нехай $p_2(i) > 0$ таке, що $B_{p_2(i)} \subseteq \Omega_{b_2(i)}(i)$. Покладемо $s_2 = \min\limits_{i \in Q} p_2(i)$, та $r_1 = \min\{s_2, \psi^{-1}(s_2)\}$.

Аналогічно будуємо $a_1(i) = \min\limits_{x \in S_{r_1}} V^i(x)$, $b_1(i) \in (0, a_1(i))$. Тоді $\Omega_{b_1(i)}(i) \subseteq B_r$. Беремо

$p_1(i) > 0$ таке, що $B_{p_1(i)} \subseteq \Omega_{b_1(i)}(i)$. Покладемо $\delta = s_1 = \min\limits_{i \in Q} p_1(i)$.

Нехай для визначеності орбіта починається у стані 1. Якщо орбіта не переходить із стану 1 у стан 2, теорема вироджується у теорему Ляпунова. Нехай вона переходить із стану 1 в стан 2 у момент $\tau_0' = \tau_1$.

Для всіх $t \in [\tau_0, \tau_0']$ виконується $V^1(x(t)) < a_1(1)$, тому $\left| x(\tau_0' - 0) \right| < r_1$. Після переключення справджується нерівність $\left| x(\tau_1 + 0) \right| < s_2$. Якщо траєкторія не переходить із стану 2 в стан 1, теорему доведено. Якщо ж є стрибок у точці $\tau_1' = \tau_2$, то для всіх $t \in [\tau_1, \tau_1']$ виконується $V^2(x(t)) < a_2(2)$, тому $\left| x(\tau_1' - 0) \right| < r_2$.

За умовою теореми, для гібридної системи існує додатно визначена гібридна s-функція. Взявши в означенні s-функції $c^0 = V^1(x(\tau_0))$, маємо, що $V^1(x(\tau_2 + 0)) \le c^2 \le c^0 = V^1(x(\tau_0)) < a_1(1)$, тобто $\left| V^1(x(\tau_2 + 0)) \right| < a_1(1)$. Повторюючи ці ж викладки за індукцією, отримуємо, що для будь-якого $t \ge \tau_0$ в першому стані виконується $\left| V^1(x(t)) \right| < a_1(1)$, в другому – $\left| V^1(x(t)) \right| < a_2(2)$. В обох випадках $\left| x(t) \right| < r_2 < \varepsilon$. Теорему доведено.

Відмітимо про необхідність перевірки умови $c^N \le c^0$ при перевірці умов теореми.

Означення 7. Умову (2) назвемо умовою стійкості перехідних імпульсів.

Тепер розглянемо питання нестійкості тривіальних фазових орбіт. Будемо вважати локальний стан нестійким, якщо не виконується означення стійкості. По аналогії з дослідженням стійкості введемо деякі означення.

Побудуємо послідовність $\{c^i\}$, $i = \overline{0, N}$ таку, що:

$$c^0 \in (0, C), \quad c^1 = \inf_{\substack{x^{1-} \to x^{1+}|_{1\to 2} \\ V^1(x^{1-}) \ge c^0}} V^2(x^{1+}), \quad c^2 = \inf_{\substack{x^{2-} \to x^{2+}|_{2\to 3} \\ V^2(x^{2-}) \ge c^1}} V^3(x^{2+}), \ldots,$$

$$c^N = \inf_{\substack{x^{N-} \to x^{N+}|_{N\to 1} \\ V^N(x^{N-}) \ge c^{N-1}}} V^1(x^{N+}). \tag{3}$$

Аналогічну послідовність можна ввести, починаючи з другого стану, з третього, і т. д.

Означення 8. Назвемо $V(i, x) = \{V^i(x)\}, i = \overline{1, N}$ гібридною u-функцією, якщо $V^i(x)$ додатно визначені й для будь-якої послідовності $\{c^i\}$, $i = \overline{0, N}$, визначеної в (3), що починається з будь-якого стану, виконується $c^N \ge c^0$.

Означення 9. Фазова орбіта зветься зенонівською, якщо в неї за скінченний час відбувається нескінченне число переключень.

Теорема 2. Нехай гібридна система H має тривіальну фазову орбіту $x = 0$, не має зенонівських орбіт, і виконується $\left| Q \right| < \infty,\ Jump(i, x) = \{(i+1, q_i(x))\}$, для $i = \overline{1, N-1}$;

$Jump(N,x)=(1,q_N(x))$. Нехай задано окіл початку координат $D\subset X$. Якщо для H існує гібридна u-функція $V(i,\ x):\ Q\times D\to R$ така, що $\frac{dV^i(x)}{dx}f_i(x(t))>0$ для всіх $x\in D\cap\Omega_i$ та $i=\overline{1,N}$, тоді тривіальна фазова орбіта нестійка за Ляпуновим.

Доведення. Під час функціонування системи можливі два випадки:

1. Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $x_0\in B_\varepsilon$ таке, що орбіта, яка починається в точці x_0, зробить скінченне число переключень.

2. Існує деяке $\varepsilon>0$ таке, що всі орбіти, які починаються в B_ε, роблять нескінченне число переключень.

У першому випадку теорема зводиться до теореми Четаєва про нестійкість.

Припустимо, що виконується другий випадок. Для простоти будемо вважати, що $Q=\{1,2\}$ і орбіта починається з першого стану. Припустимо супротивне: система не є нестійкою, тобто для будь-якого скільки завгодно малого $\delta>0$ орбіти, що починається в B_δ, не залишають кулі B_ε. Тоді існує деяке $C>0$, для якого $V^i(x(t))<C$, $i\in Q$.

З додатної означеності і неперервності виразу $\dot V(i,x)=\frac{dV^i(x)}{dx}f_i(\,x(t))$ випливає, що існує деяке $v>0$ таке, що $\dot V(i,x(t))>v$ для $i\in Q$. Оцінимо різницю $V^1(x(t))-V^1(x(t_0))$ (вважаємо, що орбіта в момент часу t зробила M переключень і повернулась у стан 1; M – парне число):

$$V^1(x(t))-V^1(x(t_0))=\sum_{i=2,4,\ldots,M}\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\dot V^1(s)ds+\left[V^1(x(\tau_{i+1}+0))-V^1(x(\tau_i-0))\right]\right)+\int_{\tau_{M+1}}^{t}\dot V^1(s)ds\geq$$

$$\geq\sum_{i=2,4,\ldots,M}\left[V^1(x(\tau_{i+1}+0))-V^1(x(\tau_i-0))\right]+v\left[\sum_{i=2,4,\ldots,M}(\tau_i-\tau_{i-1})+(t-\tau_{M+1})\right].$$

Вважатимемо, що ряд $\sum_{i=2,4,\ldots,M}(\tau_i-\tau_{i-1})$ розбіжний. Тоді вираз $v\left[\sum_{i=2,4,\ldots,M}(\tau_i-\tau_{i-1})+(t-\tau_{M+1})\right]$ необмежено зростає з ростом t. Залишається переконатися, що різниця $V^1(x(\tau_{i+1}+0))-V^1(x(\tau_i-0))$ невід'ємна.

У побудові u-функції покладемо $c^0=V^1(x(\tau_i-0))$. Тоді $V^1(x(\tau_i+0))\geq c^1$, і $V^1(x(\tau_{i+1}+0))\geq c^2\geq c^0$. Тобто виконується нерівність $V^1(x(\tau_{i+1}+0))-V^1(x(\tau_i-0))\geq 0$.

Таким чином, із ростом t різниця $V^1(x(t))-V^1(x(t_0))$ може бути як завгодно великою, що суперечить $V^i(x(t))<C$.

Оскільки гібридний час не є зенонівським, то якщо ряд $\sum_{i=2,4,\ldots,M}(\tau_i-\tau_{i-1})$ збігається, розбіжним буде інший ряд: $\sum_{i=3,5,\ldots,M-1}(\tau_i - \tau_{i-1})$, і можна буде пробити ці ж викладки з другим станом. Теорему доведено.

Достатні умови, що отримані, суттєво відрізняються від інших умов, які використовуються при дослідженні стійкості гібридних систем.

3. Висновки

Таким чином, в роботі отримано умови стійкості та нестійкості тривіальних стаціонарних станів імпульсних гібридних систем. Доведення базується на існуванні гібридних s - і u -функцій та умовах стійкості й нестійкості перехідних імпульсів. Отримані умови можна легко обчислювати та вони не залежать від розв’язків гібридних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
2. Бичков О. Застосування другого методу Ляпунова для дослідження стійкості гібридних систем // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – № 4. – С.125–133.
3. Парийская Е. Гибридный подход к моделированию и качественному анализу динамических систем. Алгоритмы линейной аппроксимации нелинейного гибридного автомата // Труды 2-ой междунар. научно-технической конф. «Дифференциальные уравнения и приложения». – СПб. – 1998. – С. 174–177.
4. Глушков В.М., Гусев В.В., Марьянович Т.П., Сахнюк М.А. Программные средства моделирования непрерывно-дискретных систем. – Киев: Наукова думка. – 152 с.
5. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. – М.: Наука, 1972. – 592 с.
6. Branicky M. Stability of switched and hybrid systems // Proc. 33-rd Conf. Decision and Control. – Lake Buena Vista, FL. – 1994. – Dec. – P. 3498–3503.
7. Filippov F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. – Kluwer Academic Publishers, 1988.
8. Kesten Y., Pnueli A. Timed and Hybrid statecharts and their textual representation // Lec. Notes in Comp. Sci. – Springer-Verlag, 1992. – P. 591–620.
9. Pettersson S., Lennartson B. Stability and robustness for hybrid systems // Proc. of 35th CDC. – 1996. – P.1202–1207.
10. Ye H., Miche A.l., Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1998. – Vol. 43 (4), April. – P. 461–474.
11. Peleties P., DeCarlo R.A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions // Proc. of the 1991 American Control Conference. – Boston, MA. – 1991. – Vol. 2, June. – P. 1679–1684.