УДК 539:039

ДИНАМИЧЕСКИЙ ДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК И КОЛЛЕКТИВНОЕ СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

А.В. Бабич, С.В. Березовский, В.Ф. Клепиков
Институт электрофизики и радиационных технологий НАНУ, г. Харьков, Украина

Исследованы нелинейные уравнения теории сверхизлучения. Рассмотрены их скрытые симметрии, позволяющие упростить уравнения, а в некоторых случаях полностью проинтегрировать. Построены точные решения нелинейных уравнений теории сверхизлучения.

ВВЕДЕНИЕ

Динамический дальний порядок, обобщающий понятие дальнего порядка на случай неравновесных нестационарных систем, проявляется во времензависящей корреляционной связи значений физических величин в достаточно удалённых пространственных точках.

Количественной мерой динамического дальнего порядка могут являться те же величины, что и в случае обычного, равновесного дальнего порядка, но уже зависящие от времени. Аналогия между равновесными кооперативными эффектами (такими, как сверхтекучесть, сверхпроводимость, магнетизм, сегнетоэлектричество и т.п.) и неравновесными (сверхизлучательная лавина и сверхизлучательное усиление, сверхпластичность) проявляется не только в подобии методов количественного описания, но и в более глубоких, симметрийных проявлениях в рамках теорем Голдстоуна и Хиггса [1]. Так, калибровочные симметрии типа U(1), характерные для сверхпроводимости и сверхтекучести, обобщаются в случае динамического дальнего порядка до неабелевых групп SU(2), SU(3) и т.д.

Однако, в отличие от равновесного спонтанного нарушения симметрий стационарных фаз, появление в кооперативных системах динамического дальнего порядка не всегда происходит путём фазового перехода (впрочем, иногда может наблюдаться размытый фазовый переход).

Экспериментальной предпосылкой изучения динамического дальнего порядка в излучательных системах явилось создание квантовых генераторов электромагнитных волн. Аналогии между характерными понятиями физики критических явлений и когерентной оптики породили в дальнейшем синергетическое описание всех видов дальнего и квазидальнего порядка в произвольных коллективных системах. В связи с тем, что динамическое упорядочение нередко представляет собой когерентный нелинейный импульс – солитон, возникла квантовая концепция солитонных волн как связанных состояний большого числа квазичастиц.

Анализ взаимодействия излучений с веществом показывает, что возможны как статические, так и динамические коллективные состояния излучения и вещества в отсутствие диссипации. Примером может служить сверхизлучательное коллективное спонтанное испускание электромагнитных волн при переходе системы возбуждённых излучателей в когерентное сфазированное состояние, предсказанное в [2]. При этом спонтанная релаксация системы возбужденных N атомов может вызвать N-кратное усиление интенсивности излучения в сравнении с люминесценцией независимых атомов.

Блоховские суперпозиционные операторные состояния возбужденных излучателей, вначале предложенные для описания релаксации и затухания в системе коллективизированных ядерных спинов [3], порождают другой вариант сверхизлучения, возникающего благодаря самосогласованию фаз отдельных спинов.

Однако, в отличие от квантовых генераторов, сверхизлучение представляет собой безрезонаторную генерацию излучения, а обратная связь поля излучения с системой атомов отсутствует.

Следует подчеркнуть, что пиковая интенсивность сигнала сверхизлучения может на 10 и более порядков превосходить интенсивность некогерентного спонтанного распада [4].

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ

Уравнение, описывающее сверхизлучательную лавину в малых, по сравнению с длиной волны излучения, образцах с учетом влияния поперечной и продольной релаксации, выглядит следующим образом:

$$Y'' + \frac{t}{T_1} Y' + 8 e^Y + + 2N_0\left(1 + \frac{t}{N_0}\right) + \frac{2t^2}{T_1 T_2} = 0, \tag{1}$$

где $Y = \ln N$; N – плотность инверсной заселенности; N_0–плотность инверсной заселенности в начальный момент времени; t – безразмерное время; T_1– время, характеризующее энергетическую или продольную релаксацию; T_2 – время, характеризующее фазовую или поперечную релаксацию.

Рассмотрим когерентное взаимодействие мощного ультракороткого импульса света с протяженной резонансно усиливающей средой. В этом случае можно применить систему уравнений Максвелла-Блоха в следующем виде:

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}\left(1-\frac{c}{u}\right)+c\frac{\partial E}{\partial x}=2\pi\omega P-\frac{\gamma}{e}E,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}+\frac{1}{T_2}P=\frac{\mu^2}{\hbar}NE,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon}=-\frac{1}{\hbar}EP-\frac{N}{T_1}, \qquad (2)$$

¿

{¿{¿¿¿

¿

где $\varepsilon=t-x/u$; x–пространственная координата; E–амплитуда поля; P–поляризация среды; μ –матричный элемент дипольного момента; c–скорость света в среде без активных частиц; u–скорость импульса в среде с активными частицами; γ –коэффициент нерезонансных линейных потерь излучения на единицу длины; N–плотность инверсной заселенности; N_0–плотность инверсной заселенности в отсутствии поля. Можно показать, что для солитоноподобных импульсов эту систему можно свести к следующему уравнению:

$$\frac{d^2y}{d\varepsilon_1^2}+\frac{1}{T_1\omega}\frac{dy}{d\varepsilon_1}+2e^y+\frac{2}{T_1T_2\omega_0^2}=0, \qquad (3)$$

где $y=\ln E_1^2$; E_1–безразмерное поле. Это уравнение отличается от уравнения, описывающего спонтанное высвечивание с учетом релаксации, только численными коэффициентами, что позволяет описывать упомянутые явления в рамках одной модели.

Перепишем уравнения (1) и (3) в более удобном для анализа виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+Ke^y+F(x)=0. \qquad (4)$$

Групповой анализ уравнения (4) показывает, что оно допускает группу преобразований с генератором:

$$\overset{¿}{X}=A(x)\frac{\partial}{\partial x}+B(x)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (5)$$

При выполнении условия $F=2\left(f^2+f'\right)$, функции $A(x)$ и $B(x)$ выглядят следующим образом:

$$A(x)=C_1\cdot e^{\int f(x)dx}+C_2\cdot e^{\int f(x)dx}\cdot ¿$$
$$¿\int e^{-\int f(x)dx}dx, \qquad (6)$$

$$B(x)=-2C_1\cdot f(x)e^{\int f(x)dx}-2C_2\cdot ¿$$
$$¿\left(1+f(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\cdot\int e^{-\int f(x)dx}dx\right), \qquad (7)$$

где C_1 и C_2–константы интегрирования. Таким образом, уравнение (4) в рассматриваемом случае допускает двухпараметрическую группу преобразований.

Используем ее подгруппу с генератором:

$$\overset{¿}{X}=e^{\int f(x)dx}\frac{\partial}{\partial x}-2f(x)e^{\int f(x)dx}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (8)$$

для упрощения уравнения (4). Для этого перейдем к новым переменным z и t, где z – инвариант группы, а t определяется из условия $\overset{¿}{X}t=1$, также считаем t функцией только от x:

$$z(t)=y+2\int f(x)dx,\ t=\int e^{-\int f(x)dz}dx. \qquad (9)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4) получаем:

$$e^{-2\int f(x)dx}\cdot z''-f(x)e^{-\int f(x)dx}z'+$$
$$+f(x)e^{-\int f(x)dx}z'-2\left(f'+f^2\right)+$$
$$+f(x)e^{-\int f(x)dx}z'+Ke^{-2\int f(x)dx}\cdot e^z+ \qquad (10)$$
$$+2\left(f'+f^2\right)=0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$z''+Ke^z=0. \qquad (11)$$

Это уравнение легко интегрируется, его решение в переменных t и z выглядит следующим образом:

$$z=\ln\left[\frac{D}{2K}\left(1-th^2\left(-\frac{\sqrt{D}}{2}t\right)\right)\right]. \qquad (12)$$

Переходя к переменным x и y, получаем:

$$y=\ln\left[\frac{D}{2K}\left(1-th^2\left(-\frac{\sqrt{D}}{2}\int e^{\int f(x)dx}dx\right)\right)\right]-$$
$$-\int f(x)dx. \qquad (13)$$

Таким образом, наличие скрытой симметрии у нелинейного уравнения (4) позволяет найти точные решения уравнений (1) и (3).

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В ОДНОМОДОВОЙ МНОГОЦЕНТРОВОЙ МОДЕЛИ

В рамках одномодовой многоцентровой модели взаимодействия излучения с веществом, в приближении сильной нелинейности изменение фазы излучения описывается следующим уравнением:

$$\frac{\rho}{\omega^2}\frac{d^4\Phi}{d\tau^4}+\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}+\sin\Phi=0, \qquad (14)$$

где Φ–фаза; ω –частота излучения; а ρ –материальный параметр.

В случае $\frac{\rho}{\omega^2}<<1$ это уравнение совпадает с уравнением маятника. Рассмотрим вопрос о совместимости уравнения маятника с обобщенным уравнением типа (14):

$$\frac{d^4 y}{dx^4}+\gamma\frac{d^2 y}{dx^2}+F(y)=0\ , \qquad (15)$$

где $F(y)$ – нелинейная функция.

Это уравнение будет совместимо с уравнением маятника:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\alpha\cdot\sin^2 y+C \qquad (16)$$

в случае когда:

$$\begin{gathered}F(y)=-\alpha^2\cos^3 y\cdot\sin y+\\ +5\alpha^2\sin^3 y\cdot\cos y+(4\alpha C-\alpha\gamma)\cos y\cdot\sin y\,.\end{gathered} \qquad (17)$$

Совместное решение уравнений (15) и (16) имеет вид:

$$\sin y=\sqrt{\frac{\alpha+2C}{2\alpha}}\cdot Sn\left(\frac{x}{\sqrt{-2\alpha}},\sqrt{\frac{\alpha+2C}{2\alpha}}\right), \qquad (18)$$

где Sn – эллиптический синус.

Если $F(y)$ имеет вид (17), то равнение (15) является вариационным уравнением для функционала:

$$\begin{gathered}S=\int\Big(\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\\ A\cdot\cos 2y+B\cdot\cos 4y\Big)\,dx\,.\end{gathered} \qquad (19)$$

Коэффициенты уравнения (15), выраженные через A и B, имеют следующий вид:

$$\alpha=\sqrt{\frac{3}{8B}}\ ,\ C=\frac{\gamma}{4}-A\sqrt{\frac{3}{2B}}-\sqrt{\frac{8B}{3}}\,. \qquad (20)$$

Таким образом, вариационное уравнение для функционала (19) допускает следующее точное решение:

$$\begin{gathered}\sin(y)=\left(\sqrt{\frac{\gamma}{4}\sqrt{\frac{3}{2B}}-\frac{3A}{2B}-\frac{3}{2}}\right)\cdot ¿\\ ¿\,Sn\left(\sqrt[4]{\frac{3}{32\,B}}\cdot x\,,\sqrt{\frac{\gamma}{4}\sqrt{\frac{3}{2B}}-\frac{3A}{2B}-\frac{3}{2}}\right).\end{gathered} \qquad (21)$$

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины. Проект № 02.07/372.

ЛИТЕРАТУРА

1.V.F. Klepikov, A.I. Olemskoy *//Physics Reports*. 2000, N 338, p. 571–677.
2.R.H. Dicke *//Phys. Rev.* 1954, v. 93, p. 99.
3.F. Bloch *//Phys. Rev.* 1946, v. 70. N7/8, p. 460.
4.А.В. Андреев *//УФН.* 1990, т. 160, №12, с. 1.

ДИНАМІЧНИЙ ДАЛЬНІЙ ПОРЯДОК І КОЛЕКТИВНЕ СПОНТАННЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

А.В. Бабіч, С.В. Березовський, В.Ф. Клепіков

Досліджені нелінійні рівняння теорії надвипромінювання. Розглянуті їх приховані симетрії, які дозволяють спростити рівняння, а в деяких випадках повністю проінтегрувати. Побудовані точні розв’язки нелінійних рівяннянь теорії надвипромінювання.

DYNAMICAL LONG-DISTANCE ORDER AND COLLECTIVE SPONTANEOUS RADIATION

A.V. Babich, S.V. Berezovsky, V.F. Klepikov

Nonlinear equations of superradiation theory are studied. Their hidden symmetries are considered. It is used to simplify the equations and in some case to integrate it. Exact solutions of nonlinear superradiation theory equations are obtained.