

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ УСКОРИТЕЛЕЙ

УДК 537.87

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

*А.Г. Нерух, Ф.В. Федотов*

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

*Харьков, Украина;*

*E-mail: [nerukh@ddan.kharkov.ua](mailto:nerukh@ddan.kharkov.ua), [ffedor@ukr.net](mailto:ffedor@ukr.net)*

Работа посвящена исследованию электродинамических процессов в нестационарном плоскопараллельном диэлектрическом волноводе, параметры среды которого изменяются во времени. На основе метода интегральных уравнений Вольтерра предложен численно-аналитический подход к решению таких задач и представлены результаты численного моделирования.

### ВВЕДЕНИЕ

Использование различных волноводных структур имеет важное прикладное значение и широко распространено в современной радио- и оптической электронике [1]. Множество теоретических и прикладных исследовательских работ было посвящено исследованию свойств и характеристик стационарных волноводов. В последнее время, в связи с постоянной тенденцией в радиоэлектронике к использованию все более коротких длин волн, вплоть до СВЧ или волн инфракрасного и оптического диапазона, и, соответственно, уменьшению размеров волноводных устройств, все большее распространение получают диэлектрические волноводы, в частности оптические волокна. В настоящее время, в связи с большим прикладным потенциалом, высокий интерес вызывают диэлектрические волноводы с нелинейными и нестационарными свойствами [1,2]. Такие волноводы могут применяться для сжатия электромагнитных сигналов с целью создания ультракоротких импульсов, для генерации высших гармоник или создания высокостабильных солитонных сигналов [3], для управления или модуляции электромагнитного сигнала с помощью изменения параметров среды и др.

Основные электродинамические свойства нестационарных диэлектрических волноводов могут быть исследованы на простой широко распространенной модели плоскопараллельного диэлектрического волновода с нестационарной средой в его ядре. Под нестационарностью в данной работе подразумевается зависимость параметров среды в ядре волновода от времени, причем скорость изменения параметров среды соизмерима со скоростью изменения напряженности поля. Однако аналитическое решение электродинамических моделей для описания реальных нестационарных волноводных структур является, ввиду сложности описания нестационарной среды в волноводе и большой размерности задачи, труднореализуемой задачей. Ввиду этого все большее применение находят численные методы. Данная работа посвящена развитию численно-аналитического подхода к исследованию нестационарных процессов в диэлектрических волноводах с меняющейся во времени средой в ядре.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскопараллельный диэлектрический волновод, образуемый однородным ядром и неограниченной окружающей средой как оболочкой. Среда в ядре волновода задана относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon'_r$  и электрической проводимостью  $\sigma'_r$ , которые могут меняться во времени. Окружающая среда определена параметрами  $\epsilon$  и  $\sigma$ . Относительная магнитная проницаемость среды  $\mu$  во всем пространстве равна 1. Расположим систему координат таким образом, что ось  $x$  направлена поперек волновода, оси  $y, z$  являются продольными координатами и ядро волновода занимает промежуток  $-b/2 \leq x \leq b/2$ , т.е. толщина волновода равна  $b$ . Согласно основной идее подхода, предложенного в 1958 году Н.А. Хижняком [4] и затем расширенного на нестационарные задачи [5,6], определим параметры среды во всем пространстве как

$$\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon + \chi_{[b]} \epsilon_0 (\epsilon'_r - \epsilon), \quad \sigma' = \chi_{[b]} (\sigma'_r - \sigma), \quad \mu' = \mu_0,$$

где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\chi_{[b]}$  – характеристическая функция волновода, равная 1 внутри волновода и 0 в окружающем пространстве.

В силу однородности структуры вдоль продольных координат электромагнитное поле можно разделить на продольные и поперечные компоненты:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E \hat{e}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + B \hat{e}_3,$$

где  $\hat{e}_3$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Тогда из уравнений Максвелла следуют обобщенные волновые уравнения для этих компонент:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 \mathbf{E}_\perp + v^2 \partial_{tt} \mu_0 \sigma \mathbf{E}_\perp - v^2 \partial_{zz}^2 \mathbf{E}_\perp = \\ = -v^2 \partial_{zz} C_\perp E - v^2 \mathbf{e}_3 \nabla_t \partial_t C_\perp B - \\ - (v/c)^2 \partial_{tt}^2 \chi (\epsilon'_r - \epsilon) \mathbf{E}_\perp - v^2 \partial_{tt} \mu_0 \chi (\sigma'_r - \sigma) \mathbf{E}_\perp, \\ \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \epsilon E + \partial_{tt} \mu_0 \sigma E - \Delta E = -\frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \chi (\epsilon'_r - \epsilon) E - \\ - \mu_0 \partial_{tt} (\sigma'_r - \sigma) E + \partial_{zz} (C_\perp \hat{e}_3, \mathbf{E}_\perp), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_{tt}^2 \mathbf{B}_{\perp} + v^2 \mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B}_{\perp} - v^2 \partial_{zz}^2 \mathbf{B}_{\perp} = \\ & = -v^2 \partial_3 C_{\perp} B + v^2 \epsilon_3 \epsilon_r \left( \frac{1}{c^2} \partial_t \epsilon \right) + \mu_0 \sigma \left( \frac{1}{c} \partial_t C_{\perp} E - \right. \\ & \left. - (v/c)^2 \partial_t \chi (\epsilon_r - \epsilon) \partial_t \mathbf{B}_{\perp} - v^2 \mu_0 \chi (\sigma_r - \sigma) \partial_t \mathbf{B}_{\perp} \right), \\ & \frac{1}{c^2} \partial_t \epsilon \partial_t B + \mu_0 \sigma \partial_t B - \Delta B = \\ & = -\frac{1}{c^2} \partial_t \chi (\epsilon_r - \epsilon) \partial_t B - \chi \mu_0 (\sigma_r - \sigma) \partial_t B, \end{aligned}$$

где  $C = C_{\perp} + \epsilon_3 \partial_3$ ;  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_1 \partial_1 + \epsilon_2 \partial_2$ ;  $\partial_3 = \partial / \partial z$ ;  $\partial_t = \partial / \partial t$ ;  $v = c / \sqrt{\epsilon}$  - фазовая скорость в фоновой среде (оболочке волновода);  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  - скорость света в вакууме.

Благодаря использованию обобщенных функций и обобщенных производных, граничные условия для электромагнитного поля на границах волновода неявно включены в приведенные уравнения.

Как и в случае гармонически зависящих от времени сигналов, в общем случае также возможно существование двух типов полей, как это можно видеть из уравнений и: ТЕ-моды с  $\epsilon_{\perp} E = 0$  и ТМ-моды с  $\epsilon_{\perp} B = 0$ . В обоих случаях рассматриваемая задача является трехмерной скалярной задачей во временной области для продольных компонент поля и векторной одномерной задачей во временной области для поперечных компонент.

Далее ограничимся рассмотрением только ТЕ моды электромагнитного сигнала, распространяющейся вдоль оси z. В таком случае все рассматриваемые величины будут независимы от координаты y, а продольные составляющие сведутся только к магнитному полю B, которое определяется независимо волновым уравнением. Решения представленных волновых уравнений, содержащих в себе обобщенные функции и производные, можно получить, преобразовав их с помощью функции Грина в соответствующие интегральные уравнения.

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ

Интегральное уравнение для поперечного электрического поля, полученное с помощью функции Грина из волнового уравнения, имеет следующий вид [7-9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{F}_{\perp E} - \frac{v}{2} \partial_{tt}^2 \int_{-t}^t dt' \int_{z-v(t-t')}^{z+v(t-t')} \chi_{[b]} V(t') \mathbf{E}_{\perp} dt' + \\ + I_0 \left( \frac{\alpha}{v} \sqrt{v^2 (t-t')^2 - (z-z')^2} \right) e^{\alpha(t-t')} dz', \end{aligned}$$

где  $I_0$  - функция Бесселя;  $\alpha = -v^2 \mu_0 \sigma / 2$  - коэффициент, учитывающий потери в оболочке волновода;  $V(t)$  - оператор среды, который в случае немагнитного диссипативного вещества определяется материальным уравнением:

$$V(t) = \frac{1}{v^2} \left( \frac{\epsilon_r(t)}{\epsilon} - 1 \right) + \mu_0 \int_{-t}^t dt' (\sigma_r(t') - \sigma).$$

Свободный член уравнения  $\mathbf{F}_{\perp E}$  определяется через продольную компоненту поля B:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\perp E} = -\frac{v}{2} \int_{-t}^t dt' \int_{z-v(t-t')}^{z+v(t-t')} dz' \epsilon_3 \partial_t C_{\perp} B_{\parallel} dt' + \\ + e^{\alpha(t-t')} I_0 \left( \frac{\alpha}{v} \sqrt{v^2 (t-t')^2 - (z-z')^2} \right). \end{aligned}$$

Следует отметить, что соотношение является интегральным уравнением Вольтерра относительно  $\mathbf{E}_{\perp}$  только внутри ядра волновода, где  $\chi_{[b]} \in 1$ , а вне его поперечная компонента поля равна свободному члену уравнения, т.е.  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{F}_{\perp E}$ . Поперечное магнитное поле удовлетворяет подобному интегральному уравнению, следующему из волнового уравнения, и его свободный член также определяется через продольную компоненту B. Таким образом, ключевой задачей является нахождение продольной компоненты поля, интегральное уравнение для которой имеет вид

$$\begin{aligned} B(t, \mathbf{r}) = F(t, \mathbf{r}) - v \int_0^t dt' \int_{-t'}^t dz' \\ \int_{-b/2}^{b/2} G^{(2)}(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) V(t') B(t', \mathbf{r}') dx'. \end{aligned}$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ; функция Грина равна:

$$G^{(2)}(t, r) = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha t} \cosh(a \sqrt{(vt)^2 - r^2}) \frac{\theta(vt - r)}{\sqrt{(vt)^2 - r^2}};$$

$\theta$  - единичная функция Хевисайда. При получении этого уравнения предполагается, что нестационарное поведение среды в волноводе начинается в нулевой момент времени. Свободный член интегрального уравнения определяется известной до начального момента времени  $t_0 = 0$  предысторией только продольной компоненты поля

$$\begin{aligned} F(t, \mathbf{r}) = B^{(0)}(t, \mathbf{r}) - v \int_{-t}^t dt' \int_{-t'}^t dz' \\ \int_{-b/2}^{b/2} G^{(2)}(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) V(t') B(t', \mathbf{r}') dx', \end{aligned}$$

где  $B^{(0)}$  есть решение однородного уравнения, имеющее смысл начального магнитного поля, которое существовало бы в однородной фоновой среде в отсутствие ядра волновода.

### РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВОЛЮЦИОННОГО ПОДХОДА

Так как поперечные компоненты поля определяются через продольную компоненту, то последняя, таким образом, определяет основные свойства исследуемого процесса, поэтому ниже основное вни-

мание будет сосредоточено на рассмотрении решения уравнения для продольной компоненты поля. Решение этого уравнения, полученное с помощью метода резольвент, выражается через свободный член следующего уравнения:

$$B(t, \mathbf{r}) = F(t, \mathbf{r}) - \int_0^t \int_{-b/2}^{b/2} dx' R(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) F(t', \mathbf{r}'),$$

посредством резольвентного оператора  $\hat{R}(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ . Явное выражение для него может быть вычислено только для небольшого количества задач с простыми типами нестационарности. В частности, это возможно для случая с резким скачком во времени параметров среды в волноводе. Несмотря на простоту такого случая, полученная для него резольвента может быть использована и для построения решения более сложных нестационарных задач с произвольной временной зависимостью оператора среды  $\hat{V}(t)$  от времени. Такая зависимость может быть аппроксимирована ступенчатой кусочно-постоянной функцией, принимающей на каждом интервале времени  $t_n < t < t_{n+1}$  некоторое значение  $\hat{V}_n = const$  (иллюстрация этого приведена на рис. 1). Тогда, используя резольвенту для скачка, решение на каждом временном шаге  $[t_n, t_{n+1}]$  определяется точно.

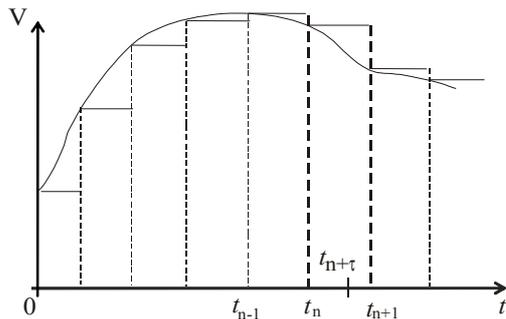


Рис. 1. Аппроксимация параметров среды во времени ступенчатой кусочно-постоянной функцией

Для реализации такого подхода к решению нестационарной задачи необходимо получить соответствующее уравнение и конкретное выражение для резольвенты  $\hat{R}_n$  на каждом интервале  $[t_n, t_{n+1}]$ . Такое уравнение следует из уравнения и имеет вид

$$\hat{R}_n(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{K}_n(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \int_{t_n}^t \int_{-b/2}^{b/2} dx'' \hat{K}_n(t-t'', |\mathbf{r}-\mathbf{r}''|) \hat{R}_n(t-t'', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'),$$

где  $\hat{K}_n(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = G^{(2)}(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \hat{V}_n$ . Тогда, в случае начально-краевой задачи с произвольным начальным моментом времени  $t_n > 0$ , продольная компонента поля будет определяться формулой

$$B(t, \mathbf{r}) = \tilde{F}(t, \mathbf{r}) + \int_{t_n}^t \int_{-b/2}^{b/2} dx' R_n(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{F}(t', \mathbf{r}'),$$

в которой свободный член  $\tilde{F}(t, \mathbf{r})$  описывает предысторию процесса до момента времени  $t_n$ :

$$\tilde{F}(t, \mathbf{r}) = F(t, \mathbf{r}) + \int_0^{t_n} \int_{-b/2}^{b/2} dz' G^{(2)}(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \hat{V}_n(t') B(t', \mathbf{r}') dx'.$$

Изложенный подход допускает достаточную гибкость в постановке нестационарных задач. Например, образование волновода в начальный момент времени или изменение параметров среды после начального момента времени под воздействием некой сторонней силы (параметрическая модуляция) или нелинейности среды. Использование в таких задачах метода резольвенты позволяет явно учесть как изменение параметров среды во времени, так и влияние границ волновода, причем резольвенты  $\hat{R}_n(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  для каждого временного шага отличаются друг от друга только величинами параметров среды.

Описанный выше эволюционный подход можно применить для исследования явлений, в которых диэлектрическая проницаемость среды в волноводе начинает изменяться во времени в силу нелинейности среды. При пренебрежении потерями в веществе ядра и оболочке волновода, т.е.  $\sigma_r = \sigma_r = 0$ , оператор среды  $\hat{V}(t)$  можно задать выражением  $\hat{V}(t) = (\epsilon_d / \epsilon - 1) / v^2 + \chi_{NL}^{(3)} E^2(t) / c^2$ , где  $\epsilon_d$  – линейная часть диэлектрической проницаемости,  $\chi_{NL}^{(3)}$  – коэффициент нелинейной восприимчивости. Аппроксимация изменения во времени параметров среды реализуется таким образом, что непрерывно изменяющийся во времени оператор  $\hat{V}(t)$  заменяется кусочно-постоянной функцией  $\hat{V}_n = const$ , принимающей на каждом интервале времени  $t_n < t < t_{n+1}$  значение  $V_n = (\epsilon_n / \epsilon - 1) / v^2$ , где диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_n$  определяется через эффективную величину напряженности электрического поля  $E_{eff\ n-1}$  на предыдущем временном интервале  $[t_{n-1}, t_n]$  в соответствии со следующим нелинейным законом:

$$\epsilon_n = \epsilon_d + \chi_{NL}^{(3)} E_{eff\ n-1}^2.$$

Эффективная величина электрического поля  $E_{eff}$  определяется путем усреднения решения уравнения по поперечному сечению.

## ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЯ

Однородность рассматриваемой структуры вдоль

продольных координат позволяет использовать преобразование Фурье, и в случае распространения электромагнитного сигнала вдоль оси  $z$  он может быть представлен в виде

$$B(t, x, z) = \int_{-l}^l \bar{B}(t, x, \Gamma) e^{-i\Gamma z} d\Gamma,$$

где  $\bar{B}(t, x, \Gamma)$  - пространственно-временное распределение сигнала, заданное для каждой пространственной гармоники, характеризуемой величиной  $\Gamma$ . С учетом этого уравнение принимает вид

$$\bar{B}(t, x) = \tilde{F}(t, x) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{-b/2}^{b/2} dx' \langle \mathbf{x} | \hat{K} | \mathbf{x}' \rangle \bar{B}(t', x'),$$

где  $\mathbf{x} = (t, x)$  - пространственно-временной вектор, а  $\langle \mathbf{x} | \hat{K} | \mathbf{x}' \rangle$  - ядро уравнения в скобочной нотации:

$$\langle \mathbf{x} | \hat{K} | \mathbf{x}' \rangle = \frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{2v\varepsilon} \partial_{tt}^2 W_0(t - t', x - x'),$$

$$W_0(\tau, x) = J_0(\Gamma v \sqrt{\tau^2 - |x|^2 / v^2}) \theta(\tau - |x|/v).$$

Свободный член вычисляется по формуле и равен:

$$\tilde{F}(t, x) = B^{(0)}(t, x) - \partial_{tt}^2 \int_{-l}^l dx' \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\varepsilon(t') - \varepsilon}{2v\varepsilon} W_0(t - t', x - x') \bar{B}(t', x') dx'.$$

Представление сигнала позволяет разложить любой исследуемый электромагнитный сигнал на пространственные гармонические компоненты и использовать существенно упрощенный вариант уравнения, размерность которого для каждой отдельной пространственной гармоники на единицу ниже. Тем самым облегчается нахождение резольвенты и построение решения.

Решение уравнения с помощью резольвенты задается выражением. Как было показано в работе [6], выражения для резольвентного оператора  $\hat{R}_n$  различаются в различных зонах пространственно-временной диаграммы, обусловленных влиянием границ волновода. Схема расположения таких зон на временном интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  представлена на рис. 2, на котором сплошные линии разделяют различные области определения резольвенты.

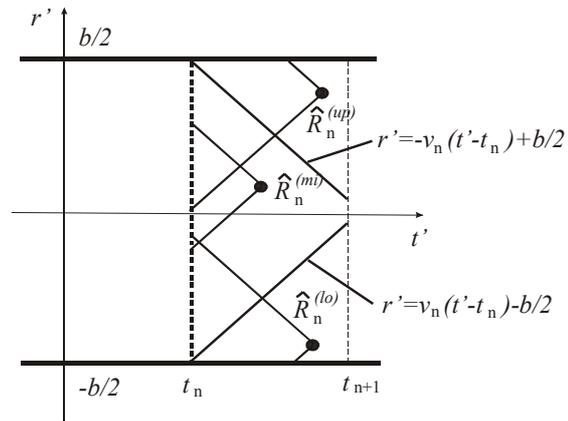


Рис. 2. Схема расположения пространственно-временных зон резольвентного оператора на интервале времени  $[t_n, t_{n+1}]$

Имеется три области определения резольвентного оператора - средняя зона, в которой нет непосредственного влияния границ, и две боковых зоны, в которых сказывается влияние одной из границ волновода. При увеличении длительности рассматриваемого интервала  $[t_n, t_{n+1}]$  эти зоны пересекутся, существенно усложняя структуру резольвентного оператора. Для избежания пересечения различных зон резольвенты должно выполняться условие  $v_n \Delta t_n \ll b/2$ , где  $v_n = c/\sqrt{\varepsilon_n}$  - фазовая скорость на интервале времени  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  - длительность рассматриваемого интервала. Данное условие является приемлемым для рассматриваемой задачи, учитывая тот факт, что для аппроксимации нелинейности среды следует использовать гораздо более мелкий шаг, чем максимально допустимый в рассматриваемом соотношении.

Резольвентный оператор для средней зоны, в которой отсутствует непосредственное влияние границ волновода, был получен в работе [7] и имеет следующий вид:

$$\hat{R}_n^{(mi)} = - \frac{1 - h_n^2}{2h_n} \partial_{tt}^2 W_n^{(0)}(t - t', x - x'),$$

где  $W_n^{(0)}(\tau, x) = J_0(\Gamma h_n \sqrt{\tau^2 - |x|^2 / h_n^2}) \theta(\tau - |x|/h_n)$ ,  $J_0(t)$  - функция Бесселя,  $\Gamma$  - переменная преобразования Фурье.

В боковых зонах появятся дополнительные слагаемые к резольвентному оператору, обусловленные влиянием границ [8,9]:

$$\hat{R}_n^{(\mp)} = \hat{R}_n^{(mi)} + \Delta \hat{R}_n^{(\mp)},$$

где  $\hat{R}_n^{(\mp)}$  обозначает резольвенту соответственно в нижней (-) или верхней (+) зонах, и

$$\Delta \hat{R}_n^{(\mp)} = - \frac{1 - h_n}{2h_n} \partial_{tt}^2 W_n^{(nb)}(t - t', 1 \pm (x + x')) \theta(\pm (x - x') / h_n),$$

где

$$W_n^{(nb)}(t, x) = (1 - h_n) J_0(\Gamma h_n \sqrt{t^2 - |x|^2 / h_n^2}) +$$

$$+ 2\Gamma h_n \int_0^{t-x/h_n} J_0(\Gamma h_n \sqrt{t^2 - (h_n u + x)^2 / h_n^2}) U(u) du,$$

$$U(u) = \sinh(\Gamma h_n u) -$$

$$- (1 + h_n) \int_0^u \cosh[\Gamma h_n (u - u')] \frac{J_1(\Lambda_n u')}{\Lambda_n u'} du',$$

$$\Lambda_n^2 = \Gamma^2 (1 - h_n^2), J_1(t) - \text{функция Бесселя.}$$

Таким образом, в соответствии с предлагаемым эволюционным подходом, построение решения интегрального уравнения может быть выполнено итерационно, шаг за шагом, во времени. Причем, на каждом шаге  $n$ , т.е. на промежутке времени  $[t_n, t_{n+1}]$ , решение определяется точно посредством резольвентного оператора  $R$ , используя рассчитанные на предыдущих итерациях величины поля  $B$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для удобства дальнейших вычислений целесообразно нормировать величины и перейти к безразмерным переменным:

$$t \rightarrow vt/b, x \rightarrow x/b,$$

$$\Omega_0 \rightarrow b\omega/v, h_n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}, \kappa = bk, \Gamma \text{ Ю } b\Gamma.$$

Рассмотрим случай, когда исходный сигнал  $B_0$  представляет собой собственную волну плоского волновода, заданную в безразмерных переменных соотношением:

$$B_0(t, x, z) = e^{i\Omega_0 t - i\Gamma z} \cos(\kappa x),$$

где  $\Omega_0$  – нормированная циклическая частота,  $\Gamma$  – нормированная постоянная распространения,  $\kappa$  – нормированное поперечное волновое число. Параметры сигнала должны удовлетворять дисперсионным соотношениям:

$$\tan(\kappa/2) + \kappa / \sqrt{\Omega_0^2 (1/h_0^2 - 1) - \kappa^2} = 0,$$

$$\Gamma = \sqrt{\Omega_0^2 h_0^{-2} - \kappa^2}, h_0 = \varepsilon / \varepsilon_d.$$

Величина диэлектрической проницаемости на каждом шаге расчета определяется по формуле через эффективное электрическое поле, которое получается в результате решения уравнения

$$E_{\perp}(t, x, z) =$$

$$= -v_n^2 \int_{-\Gamma}^0 dt' \cos(v\Gamma(t-t')) [\mathbf{e}_3, C_{\perp} B_3] -$$

$$- v_n^2 \int_0^t dt' \cos(v_n \Gamma(t-t')) [\mathbf{e}_3, C_{\perp} B_3].$$

Представленный в данной работе подход позволяет исследовать ряд нестационарных электромагнитных явлений в нестационарном диэлектрическом волноводе.

1. Вначале рассмотрим преобразование собственной волны волновода при резком изменении во вре-

мени диэлектрической проницаемости в ядре диэлектрического волновода. Нормированная циклическая частота волны равна  $\Omega_0 = 4\pi$ , диэлектрическая проницаемость среды имеет величину  $\varepsilon_d = 3.5$  в ядре волновода и  $\varepsilon = 3$  в фоновой среде. Поперечное волновое число  $\kappa$  и постоянная распространения  $\Gamma$  волны определяются из дисперсионного уравнения и для рассматриваемого случая имеют значения  $\kappa = 4.297$  и  $\Gamma = 12.875$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  проницаемость среды в ядре волновода резко изменяется и становится равной  $\varepsilon_1 = 3.8$ . Для численного расчета интегральных соотношений используется шаг дискретизации  $\Delta t = \Delta x = \Delta z = 0.025$  в безразмерных координатах, что соответствует 20 интервалам на один период колебания волны во времени. Моделируемая продолжительность процесса  $T = 120$  в безразмерных величинах. Длительность моделирования на персональном компьютере с процессором Athlon 1800+ составила 68 мин.

Преобразование магнитного поля во времени на начальном интервале рассматриваемого нестационарного процесса в точке  $x = 0$ , т.е. в средней точке волновода, показано на рис. 3.

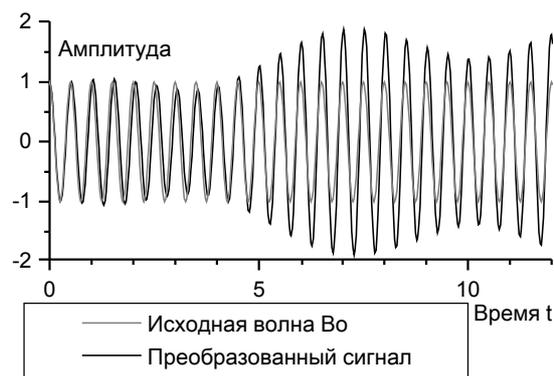


Рис. 3. Преобразование электромагнитного поля в средней точке волновода после скачка диэлектрической проницаемости среды

Спектр преобразованного сигнала, полученный из рассчитанного полного магнитного поля с помощью быстрого преобразования Фурье, представлен на рис. 4,5.

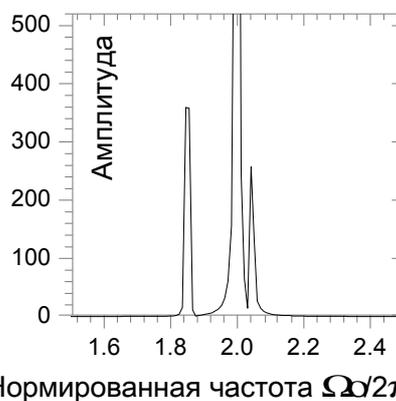


Рис. 4. Спектры преобразованного сигнала

в средней точке волновода  $x=0$

Из приведенных графиков видно, что в результате простого скачка параметров среды в волноводе начался сложный процесс преобразования существующей волны, а также процесс проникновения в ядро со стороны границ волновода, внешнего поля, осциллирующего прежней, невозмущенной, частотой  $\Omega_0/2\pi$ .

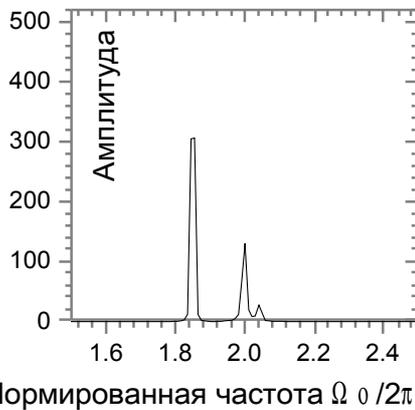


Рис. 5. Спектр преобразованного сигнала в точке  $x=0.25$

На рис. 4,5 показано также, что спектр преобразованного сигнала отличается в различных пространственных точках волновода и имеет несколько пиков, соответствующих волне на старой частоте и двум волнам с новой частотой  $\sqrt{\epsilon_d/\epsilon_1}\Omega_0/2\pi$ . Это согласуется с теоретическим исследованием работ [8, 9], в которых показано, что в результате резкого изменения проницаемости среды в ядре волновода исходная волна расщепляется, и возникают сразу несколько новых собственных волн волновода и непрерывный спектр волн излучения. Одна из собственных волн обладает прежней величиной постоянной распространения, но новой частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению волновода с изменившимися параметрами. Другая волна обладает прежней частотой, но приобретает новое значение постоянной распространения. Структуры спектров сигнала, полученного с помощью разработанного численно-аналитического алгоритма, соответствуют спектрам, полученным в ходе теоретического анализа, что свидетельствует о корректности предложенной численной схемы. Имеющиеся количественные отличия в спектрах связаны с конечным и довольно коротким интервалом времени, по которому определяется спектр, а также с погрешностью численного алгоритма.

2. Рассмотрим теперь нелинейную задачу, когда диэлектрическая проницаемость среды в ядре волновода после начального момента времени  $t_0 = 0$  начинает изменяться во времени в силу нелинейности среды. Такую среду будем описывать соотношением, в котором коэффициенту нелинейности соответствует нормированный параметр  $\gamma = \chi_{NL}^{(3)} |E_0|^2 = 0.1$ . Параметры среды до начального момента времени  $\epsilon = 3$ ,  $\epsilon_d = 3.5$ . Исходный элек-

тромагнитный сигнал является собственной волной плоскопараллельного волновода с параметрами  $\Omega_0 = 2\pi$ ,  $\kappa = 3.55$  и  $\Gamma = 6.326$ . Шаг дискретизации  $\Delta = 0.025$  в безразмерных величинах, что соответствует 40 интервалам дискретизации на один период колебания волны во времени.

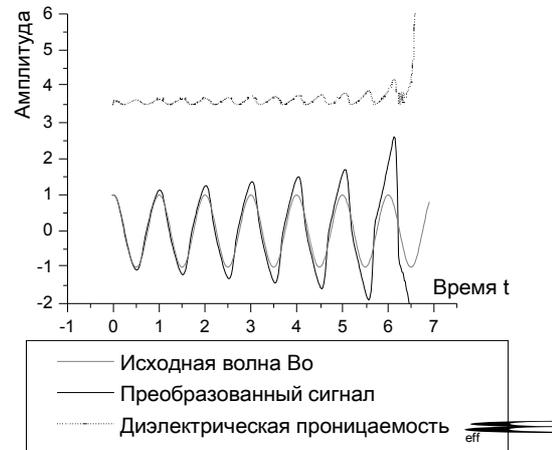


Рис. 6. Преобразование гармонической волны в нелинейном волноводе

Преобразование магнитного поля в точке  $x = 0$  изображено на рис. 6, из которого видно, что сигнал существенно трансформируется, перестает быть гармоническим и, на относительно коротком интервале времени, возникает нестабильность поля. Нестабильность вызвана концентрацией энергии в ядре волновода, а также выбранной моделью нелинейности, не учитывающей насыщение среды и её инертность, что, в результате взаимодействия поля и проницаемости среды, приводит к неограниченному росту обеих величин и возникновению нестабильности.

Для того чтобы показать критичность влияния насыщения нелинейной среды, рассмотрим усложненную модель нелинейности

$\epsilon_n = \epsilon_d + 2\gamma \arctg(\alpha E_{eff}^2) / \pi$ , в которой величина нелинейной добавки теперь будет ограничена выбранной зависимостью от эффективной величины поля, а скорость насыщения зависит от  $\alpha$ . Интервал моделирования по времени составляет  $T = 60$  безразмерных единиц (~60 периодов исходной волны). Моделирование, с такими же, как и ранее параметрами и  $\alpha = \pi$ , заняло 105 мин на персональном компьютере с процессором Athlon 1800+. В процессе численного моделирования в данном случае нестабильность поля не обнаружена. Спектр преобразованного сигнала, полученный с помощью быстрого преобразования Фурье, представлен на рис. 7:

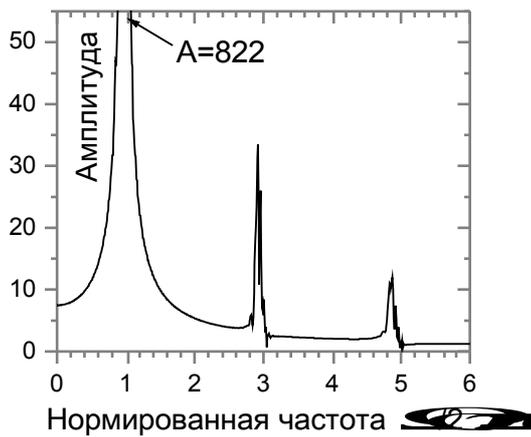


Рис. 7. Спектр преобразованного сигнала в средней точке волновода  $x=0$ . Общая структура спектра

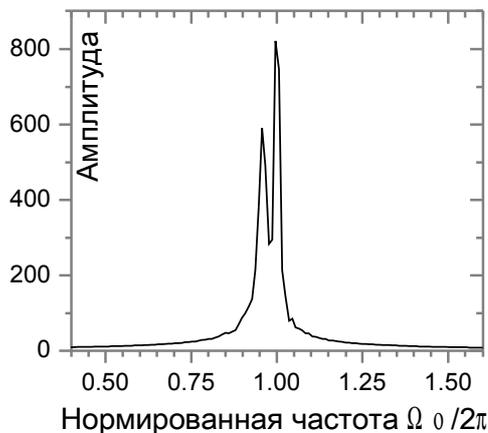


Рис. 8. Детальный вид основной гармоники сигнала

Как и ожидалось из общих физических соображений, появление нелинейности в волноводе повлекло за собой, как это видно на рис. 7, возникновение высших гармоник в спектре сигнала. Однако, ввиду влияния волноводной структуры рассматриваемой задачи на переходной процесс, спектр полученного сигнала имеет более сложную структуру, чем в задаче с нелинейным диэлектрическим слоем [10], что можно наблюдать на детальном представлении основной спектральной составляющей сигнала, представленной на рис. 8, которая в данном случае содержит два пика.

Расщепление основной гармоники можно объяснить появлением постоянной составляющей сигнала в нелинейном процессе и, как следствие, появлением постоянной составляющей нелинейной добавки к эффективной проницаемости среды, что приводит к схожему процессу со скачком параметров во времени и, соответственно, аналогичным эффектам. Структура пиков высших гармоник имеет схожий вид и также содержит двойные пики. Следует также отметить, что ввиду точного полного учета в интегральном уравнении нестационарности среды, спектр преобразованного сигнала не ограничивается наличием только первой (наисильнейшей) высшей гармоники, чем обычно ограничиваются при использовании большинства приближенных методов.

Таким образом, возникновение нелинейности в

волноводе влечет за собой сложное изменение распространяющейся в нём собственной волны, в которой помимо появления высших гармоник, вызванных нелинейностью среды, также появляются дополнительные составляющие спектра сигнала, обусловленные влиянием волноводной структуры рассматриваемой нестационарной задачи.

3. Параметрическую задачу рассмотрим на примере модуляции во времени диэлектрической проницаемости среды в ядре волновода под действием внешних управляющих сил, например, по гармоническому закону:  $\varepsilon(t) = \varepsilon_d + A(1 - \cos(\omega t))$ , где  $\omega$ ,  $A$  - нормированные циклическая частота и глубина модуляции соответственно. Исходный сигнал является собственной волной волновода и имеет следующие параметры:  $\Omega_0 = 2\pi$ ,  $\kappa = 3.55$  и  $\Gamma = 6.326$ . Шаг дискретизации  $\Delta = 0.025$  в безразмерных величинах, что соответствует 40 интервалам дискретизации на один период колебания волны во времени. Рассмотрим случай с параметрами  $\omega = 1.5\Omega_0 = 3\pi$ ,  $A = 0.2$ . Моделируемая продолжительность процесса  $T = 80$  в безразмерных единицах.

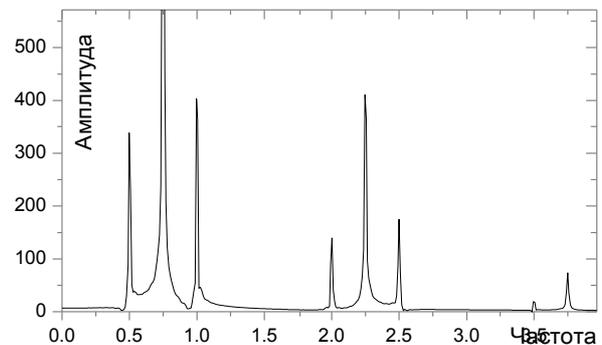


Рис. 9. Спектр преобразованного сигнала в средней точке волновода  $x=0$  в случае с гармонической модуляцией параметров среды ядра

Спектр преобразованного сигнала, полученный с помощью быстрого преобразования Фурье, представлен на рис. 9. Как видно из спектра, преобразованный сигнал содержит набор дополнительных гармоник, представляющих собой различные линейные комбинации частот исходного сигнала и модуляции среды. Как и в случае с нелинейностью, структура преобразованного в волноводе сигнала сложнее, чем в аналогичной задаче о преобразовании поля в нестационарном слое [10], что обусловлено более сложным влиянием исследуемой волноводной структуры.

## ВЫВОДЫ

В представленной работе решена задача о преобразовании электромагнитного поля в нестационарном плоскопараллельном диэлектрическом волноводе. Применяя аппарат обобщенных функций, сформулированы исходные волновые уравнения задачи для продольных и поперечных компонент поля, из которых с помощью функции Грина получены эквивалентные интегральные уравнения Вольтерра во временной области. Рассмотрено решение инте-

грального уравнения с помощью эволюционного подхода на базе метода резольвент и приведено точное решение задачи о преобразовании собственной волны волновода при резком скачке параметров среды его ядра во времени. Для решения задач с произвольной зависимостью параметров среды во времени, в частности под влиянием нелинейности, используется аппроксимация данной зависимости последовательностью скачков, для каждого из которых известно точное решение. Для вычисления окончательного решения разработан численный алгоритм и соответствующее программное обеспечение расчета резольвентного оператора.

Представлены результаты численного моделирования преобразования собственной волны волновода при резком изменении во времени диэлектрической проницаемости среды в ядре волновода и при её изменении под влиянием нелинейности среды. Показано возникновение нескольких новых волн и непрерывного спектра волн излучения после скачка проницаемости. Одна из новых собственных волн обладает прежней величиной постоянной распространения, но новой частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению волновода с изменившимися параметрами. Другая волна обладает прежней частотой, но приобретает новое значение постоянной распространения. Структуры спектров сигнала, полученного с помощью предложенного численно-аналитического алгоритма, соответствуют спектрам, полученным в ходе теоретического анализа рассматриваемой задачи. В случае с возникновением нелинейности среды в волноводе, помимо появления высших гармоник в спектре преобразованного сигнала, наблюдается сходное со скачком проницаемости среды расщепление основной и высших гармоник сигнала, что объясняется появлением постоянной нелинейной добавки к эффективной проницаемости среды. Аналогичные эффекты наблюдаются и в задаче с гармонической модуляцией проницаемости среды волновода во времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G.P.Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego, CA: Academic, 1995.
2. T.M.Monro, N.G.R.Broderik, D.J.Richardson. *Exploring optical Properties of Holey Fibers in Nanoscale Linear and Nonlinear Optics*. NJ: American Institute of Physics, 2000.
3. W.J.Wadsworth. Soliton effects in photonic fibers at 850 nm // *Electron Lett.* 2000, v.36, p.53–55.
4. Н.А. Хижняк. Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред // *Журн. Техн. Физики*. 1958, т.28, с.1592-1609.
5. А.Г.Нерух, Н.А.Хижняк. *Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики*. Харьков: НПО «Тест-Радио», 1991.
6. A.G.Nerukh, T.M.Benson. Integral Equation Of Electromagnetic Field In Time-Varying Dielectric Waveguide // *Proc. Of 4th International Conference on Transparent Optical Networks (Warsaw, Poland)*, 2002, p.165-170.
7. A.G. Nerukh, I.V. Scherbatko, M. Marciniak. *Electromagnetics of Modulated Media with Applications to Photonics*. Warsaw: Nat. Institute of Telecommunic. Publishing House. 2001, p.268.
8. A.G.Nerukh, F.V.Fedotov, T.M.Benson, Sewell Ph. Analytic-Numerical Approach to Nonlinear Problems in Dielectric Waveguides // *Proc. of 11th International Workshop on Optical Waveguide Theory and Numerical Modelling (Prague, Czech Republic)*. 2003, p.127.
9. A.G.Nerukh, F.V.Fedotov, T.M.Benson, Sewell Ph. Resolvents Method for Analytical-Numerical Investigation of Nonlinear Problems in Dielectric Waveguide // *Proc. Of 5th International Conference on Transparent Optical Networks (Warsaw, Poland)*. 2003, p.54-57.
10. F.V.Fedotov, A.G.Nerukh, T.M.Benson, Sewell Ph. Investigation of Electromagnetic Field in a Layer with Time-Varying Medium by Volterra Integral Equation Method // *IEEE J. of Lightwave Technology*. 2003, v.21, №1, p.305-314.

## TRANSFORMATION OF ELECTROMAGNETIC SIGNAL IN NONSTATIONARY DIELECTRIC WAVEGUIDE

*A.G. Nerukh, F.V. Fedotov*

The paper is devoted to investigation of the transients in electromagnetic field in a plane nonstationary dielectric waveguide with the time-varying medium in the core. The analytic-numerical approach, based on the Volterra integral equation method, is proposed for solving the problem and the numerical results are presented.

## ТРАНСФОРМАЦІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В НЕСТАЦІОНАРНОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ ХВИЛЕВОДІ

*О.Г. Нерух, Ф.В. Федотов*

Робота присвячена теоретичному дослідженню електродинамічних процесів в нестационарному плоскопаралельному діелектричному хвилеводі, параметри середовища якого змінюються у часі. На основі методу інтегральних рівнянь Вольєрра запропоновано числово-аналітичний підхід до розв'язку таких задач та наведені результати числового моделювання.