УДК 517.925

О. С. Бичков

Про критерій існування копозитивних розв'язків рівняння Ляпунова

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Досліджено лінійні гібридні автомати, що задані на конусі. Для дослідження стійкості їх розв'язків прийнято використовувати метод функцій Ляпунова, який вимагає побудови матриць з певними властивостями. Отримано необхідні і достатні умови існування додатної на конусі матриці H такої, що матриця $A^T H + HA$ від'ємна.

Одним з методів дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь є другий метод Ляпунова. Наведемо класичну теорему.

Теорема 1. *Система диференціальних рівнянь*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

де A — матриця розмірності $n \times n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли існує додатно визначений розв'язок H матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C$$

для будь-якої додатно визначеної матриці C.

У роботах [1–3] розглядається використання функцій Ляпунова для дослідження гібридних автоматів та систем із перемиканнями.

Розглянемо систему із перемиканням

$$\dot{x} = A_i x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де A_i — матриці розмірності $n \times n$, $i\colon [0, \infty) \to \{1, 2\}$. Необхідно дослідити на стійкість систему (2). У літературі описано декілька підходів до дослідження стійкості. Один із них заснований на побудові для кожної із матриць A_i відповідного розв'язку матричного рівняння Ляпунова [4].

Нехай задано систему вигляду

$$\dot{x} = A_i x, \qquad C_i x \geqslant 0. \tag{3}$$

Конуси $\{x\colon C_i x \geqslant 0\}$ не обов'язково покривають увесь фазовий простір. У [5] поставлено відкриту проблему побудови необхідних і достатніх умов існування додатно визначеного розв'язку рівняння Ляпунова на конусі $\{x\colon C_i x \geqslant 0\}$.

Мета роботи формулюється таким чином. Нехай задано матрицю A розмірності $n \times n$ і конус $\{x\colon x \geqslant 0\}$. Треба визначити необхідні і достатні умови існування додатної на конусі матриці H такої, що матриця $A^T H + HA$ від'ємна.

За допомогою простих перетворень систему (3) можна звести до системи, в якої конуси будуть мати вигляд $\{x\colon x \geqslant 0\}$. Введемо такі позначення. N — фіксоване натуральне число;

$S^{N\times N}$ — множина дійсних симетричних матриць розмірності n; $\operatorname{cl} X$ — замикання множини $X \subseteq \mathbb{R}^N$; $A \geqslant 0$ $(A > 0)$ — матриця A має невід'ємні (додатні) елементи; $\operatorname{int}^R X$ — відносна внутрішність множини $X \subseteq \mathbb{R}^N$; $\operatorname{Im}_A X = \{Ax | x \in X\}$ — образ множини $X \subseteq \mathbb{R}^N$; $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^N$; $\langle X \rangle$ — лінійна оболонка підмножини $X \subseteq \mathbb{R}^N$; $\dim L$ — розмірність векторного підпростору $\mathbb{R}^N$; S_N — одинична сфера в $\mathbb{R}^N$; $e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ — i-й орт в $\mathbb{R}^N$.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Ax,$$

де $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

Означення 1. Система (1) має стійке тривіальне положення рівноваги на замкненому опуклому конусі $X \subseteq \mathbb{R}^N$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $(x(0) \in O_\varepsilon(0) \bigcap X \Rightarrow \forall t\colon 0 < t < \sup\{\tau > 0 \mid x(\tau) \in X\}\ x(t) \in O_\delta(0))$.

Наведемо без доведення відому лему.

Лема 1. *Нехай опуклі конуси X, $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ такі, що $\operatorname{cl}(X) \bigcap \operatorname{cl}(Y) = \{0\}$. Тоді існує $p \in \mathbb{R}^N$, для якого виконується*

$$\forall x \in \operatorname{cl}(X) \setminus \{0\}, \qquad y \in \operatorname{cl}(Y) \setminus \{0\} \qquad p^T x < 0 < p^T y.$$

Наслідок. *Нехай опуклі конуси X, $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ такі, що $\operatorname{cl}(X) \bigcap \operatorname{cl}(Y) = \{0\}$. Тоді існує невироджена матриця $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ така, що*

$$\forall x \in \operatorname{cl}(X) \setminus \{0\}, \qquad y \in \operatorname{cl}(Y) \setminus \{0\} \qquad Cx < 0 < Cy.$$

Доведення. Будемо розглядати випадок $X \neq \{0\}$, $Y \neq \{0\}$, оскільки у випадку рівності одного з конусів $\{0\}$ доведення проводиться аналогічно. У результаті застосування леми до опуклих конусів X та Y отримаємо

$$\forall x \in \operatorname{cl}(X) \setminus \{0\}, \qquad y \in \operatorname{cl}(Y) \setminus \{0\} \qquad p^T x < 0 < p^T y$$

для деякого $p \in \mathbb{R}^N$. Покладемо

$$C(\varepsilon) = (p, p, \ldots, p)^T + \varepsilon E, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\forall x \in \operatorname{cl} X \bigcap S_N, \qquad y \in \operatorname{cl} Y \bigcap S_N \qquad C(0)x < 0 < C(0)y.$$

Оскільки непорожні множини $\operatorname{cl} X \bigcap S_N$, $\operatorname{cl} Y \bigcap S_N$ компактні, то існують a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\max_{x \in \operatorname{cl} X \bigcap S} \max_{i=1,\ldots,N} e_i^T C(0)x < a_0 < 0 < b_0 < \min_{y \in \operatorname{cl} Y \bigcap S} \min_{i=1,\ldots,N} e_i^T C(0)y.$$

На підставі неперервності за ε, x функції $\max\limits_{i=1,\ldots,N} e_i^T C(\varepsilon)x$ існує $\varepsilon^* > 0$, для якого виконується

$$\forall x \in \operatorname{cl} X \bigcap S_N, \qquad y \in \operatorname{cl} Y \bigcap S_N,$$

маємо

$$\max_{i=1,\ldots,N} e_i^T C(\varepsilon^*)x \leqslant a_0 < 0 < b_0 \leqslant \min_{i=1,\ldots,N} e_i^T C(\varepsilon^*)y.$$

І, як наслідок,

$$\forall\, x \in \operatorname{cl} X \setminus \{0\}, \qquad y \in \operatorname{cl} Y \setminus \{0\} \qquad C(\varepsilon^*)x < 0 < C(\varepsilon^*)y.$$

Тоді можна покласти $C = C(\varepsilon^*)$. Наслідок доведено.

Лема 2. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^N$ — опуклий конус, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — матриця і $\operatorname{cl} X \bigcap \operatorname{Im}_A \operatorname{cl} X = \{0\}$. Тоді існує невироджена $H \in S^{N\times N}$ така, що*

$$\forall\, x \in \operatorname{cl} X \setminus \{0\} \qquad x^T H x > 0 \qquad i \qquad x^T(A^T H + HA)x \leqslant 0.$$

Доведення. Застосуємо наслідок з попередньої леми до конусів X та $\operatorname{Im}_A X$. Отримаємо, що

$$\forall\, x \in \operatorname{cl}(X) \setminus \{0\}, \qquad y \in \operatorname{Im}_A \operatorname{cl}(X) \setminus \{0\} \qquad Cx < 0 < Cy$$

для деякої невиродженої матриці C. Покладемо $H = C^T C$. Тоді при довільному $x \in \operatorname{cl} X \setminus \{0\}$ має місце

$$x^T H x = \|Cx\|^2 > 0$$

і

$$x^T(A^T H + HA)x = 2x^T C^T C A x = 2(Cx)^T(CAx) \leqslant 0,$$

оскільки $Ax \in \operatorname{cl} \operatorname{Im}_A X$ та $Cx < 0 \leqslant C(Ax)$.

Отже матриця H шукана. Лему доведено.

З наведеної леми можна отримати критерій існування додатної квадратичної функції Ляпунова для системи (1) на конусі $\{x \in \mathbb{R}^N : x \geqslant 0\}$.

Теорема 1. *Необхідною і достатньою умовою для існування невиродженої матриці $H \in S^{n\times n}$ такої, що $H > 0$ і $A^T H + HA < 0$ є $\forall\, x \geqslant 0$, $x \neq 0$, $Ax \ngeqslant 0$.*

Доведення. Необхідність випливає з того, що припустивши існування $x_0 \geqslant 0$, $x_0 \neq 0$, для якого $Ax_0 \geqslant 0$, отримаємо $x_0^T(A^T H + HA)x_0 = 2(Hx_0, Ax_0) > 0$, оскільки $Hx_0 \geqslant 0$, $Ax_0 \geqslant 0$ і обидва не дорівнюють нулю, що суперечить умові $A^T H + HA < 0$. Достатність випливає з леми 2. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — невироджена матриця і система (1) має стійке тривіальне положення рівноваги на замкненому опуклому конусі X. Шляхом зведення до дійсної канонічної форми матрицю A можна подати у вигляді*

$$A = T(A_1 \oplus A_2)T^{-1},$$

де $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — невироджена матриця, $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $-A_2 \in \mathbb{R}^{l\times l}$ — гурвіцеві матриці (допускається $k = 0$, якщо A гурвіцева).

Виконаємо заміну змінних $x = Ty$. Оскільки для системи з гурвіцевою матрицею завжди існує квадратична функція Ляпунова на всьому просторі, для системи (1) існує квадратична функція Ляпунова на X тоді і лише тоді, коли для системи

$$\dot{y} = A_2 y$$

існує квадратична функція Ляпунова на $\operatorname{Pr}_2 \operatorname{Im}_{T^{-1}} X$.

Згідно з лемою 2 така функція буде існувати, якщо

$$\mathrm{Im}_A \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X \bigcap \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X = \{0\}.$$

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax, \qquad Gx \geqslant 0, \tag{4}$$

де A, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A невироджена. Зробимо невироджену заміну змінних $y = (y_1, \ldots, y_n)^T = Tx$ таку, що для деяких індексів $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ має місце $Gx \geqslant 0 \Leftrightarrow y_1, \ldots, y_i \geqslant 0$, $y_j, \ldots, y_n = 0$.

Можна без обмеження загальності вважати, що обмежень $y_j, \ldots, y_n = 0$ немає. Тоді система (4) рівносильна системі

$$\dot{y} = TAT^{-1}y = \overline{A}y, \qquad y_1, \ldots, y_i \geqslant 0. \tag{5}$$

Якщо в результаті цих дій $i = n$, тобто на всі змінні y_i накладається умова невід'ємності, то можна застосувати твердження: якщо $\forall\, y \geqslant 0$, $y \neq 0$ має місце $\overline{A}y \ngeqslant 0$, то існує квадратична форма $y^T H y$, $H \in S^{n\times n}$, така, що для довільного $y \geqslant 0$, $y \neq 0$ має місце $y^T H y > 0$ і $y^T(\overline{A}^T H + H\overline{A})y < 0$, тобто для довільного x такого, що $Gx \geqslant 0$ виконується:

1) $x^T T^T H T x > 0$;

2) $x^T T^T ((TA^T T^{-1})^T H + HTAT^{-1})Tx = x^T(A^T T^T H T + T^T H T A)x < 0$ і квадратична форма $x^T T^T H T x$ може виступати як функція Ляпунова на $Gx \geqslant 0$.

Можна навести приклад, який демонструє можливість ситуації, коли стан лінійного гібридного автомата «локально стійкий» (гібридний автомат завжди перебуває в цьому стані скінченний час, після чого залишає цей стан), але при цьому не існує відповідної стану квадратичної функції Ляпунова. Зауважимо, що неквадратичну функцію Ляпунова побудувати можна.

Введемо такі позначення. Для невиродженого лінійного оператора A на $\mathbb{R}^N$ позначимо $D_n^A(X) = \bigcap\limits_{i=0}^{n} \mathrm{Im}_{A^{-i}} X$, $n \geqslant 0$; $d_n^A(X) = \dim\langle D_n^A(X)\rangle$, $n \geqslant 0$; $\nu^A(X)$ — найменше $n \geqslant 0$, для якого $D_n^A(X) = \{0\}$, або ∞, якщо такого не існує.

Верхні індекси будемо опускати, коли вважаємо A фіксованим. Мають місце такі властивості:

1) $X \subseteq Y \Rightarrow D_n(X) \subseteq D_n(Y)$;

2) $D_n(X \bigcup Y) \supseteq D_n(X) \bigcup D_n(Y)$;

3) $D_n(X \bigcap Y) = D_n(X) \bigcap D_n(Y)$;

4) $D_n(X \setminus Y) \subseteq D_n(X) \setminus Y$;

5) $D_m(D_n(X)) = D_{m+n}(X)$;

6) X — ЗОК/СЗОК $\Rightarrow D_n(X)$ — ЗОК/СЗОК (ЗОК — замкнений опуклий конус).

Лема 3. *Нехай $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $-A$ є гурвіцевою матрицею і система* (1) *на ЗОК $X \subseteq \mathbb{R}^N$ має стійке тривіальне положення рівноваги. Тоді $\nu^A(X) < \infty$.*

Доведення. Припустимо супротивне: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Dn}(X)$ містить ненульовий вектор. Тоді послідовність множин $D_n(X) \bigcap S_N$ є послідовністю вкладених непорожніх компактів, тому $\exists\, a \in S_N \bigcap \bigcap\limits_{n\geqslant 0} D_n(X) = S_N \bigcap \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}_{A^{-n}} X$, звідки $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $A^n a \in X$. З цього випливає, що

$$\forall\, t > 0,\ n \in \mathbb{N} \qquad c_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}(A^i a) \in X,$$

а отже,

$$\exp(At)a = \lim_{n\to\infty} c_n(t) \in X.$$

Таким чином, існує ненульова (бо $a \in S$) траєкторія $x^*(t) = \exp(At)a$ вихідної системи, що лежить в X для $t > 0$.

Оскільки $-A$ гурвіцева, то $\|x^*(t)\|$ необмежена, що суперечить припущенню про стійкість системи на X. Лему доведено.

Лема 4. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^N$ — замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних у $\mathbb{R}^N$ і $\nu^A(X) = n+1$. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних X_j, $j = 1,\ldots,m$, такі, що $\bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j = X$ і $d_n(X_j) < d_n(X)$.*

Доведення. Покладемо $X_1 = D_n(X)$, $Y = X \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)$; $X = X_1 \bigcup Y$. Тоді $d_n(X_1) = 0 < d_n(X)$, оскільки $D_1(X_1) = D_{n+1}(X) = \{0\}$, і $d_n(Y) < d_n(X)$, оскільки $D_n(X \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)) \subseteq D_n(X) \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)$. Оскільки X — замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних у $\mathbb{R}^N$, то Y можна подати об'єднанням елементів скінченної множини замкнених опуклих конусів зі скінченною множиною твірних $X_2,\ldots,X_m$, для яких $d_n(X_j) \leqslant d_n(Y) < d_n(X)$. Лему доведено.

Наслідок. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^N$ — замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних у $\mathbb{R}^N$ і $\nu^A(X) < \infty$. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних X_j, $j = 1,\ldots,m$, такі, що $\bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j = X$ і $\nu(X_j) \leqslant 1$.*

Доведення. Доведемо лему індукцією за параметром

$$r(X) = (\nu(X), d_{\nu(X)-1}(X)) \in \mathbb{N}_0^2.$$

Тут $d_{-1} \equiv 0$. Будемо вважати множину N_0^2 лексикографічно (цілком) впорядкованою. При $r(X) = (0,d)$ та $r(X) = (1,d)$ твердження очевидне. Припустимо, що лему доведено у випадку $r(X) < r_0$ і доведемо у випадку $r(X) = r_0$. За лемою 4 подамо X у вигляді скінченного об'єднання замкнених опуклих конусів зі скінченною множиною твірних Y_j, $j = 1,\ldots,m$, для яких $d_{\nu(X)-1}(Y_j) < d_{\nu(X)-1}(X)$. Тоді для кожного j можливі два випадки:

1) якщо $d_{\nu(X)-1}(Y_j) = 0$, то $\nu(Y_j) < \nu(X)$ і $r(Y_j) < r(X)$;

2) інакше $\nu(Y_j) > \nu(X)-1$, тому $\nu(Y_j) = \nu(X)$ і $d_{\nu(Y_j)-1}(Y_j) < d_{\nu(X)-1}(X)$ і $r(Y_j) < r(X)$.

В обох випадках $r(Y_j) < r_0$ і за припущенням індукції кожну з множин Y_j можна подати скінченним об'єднанням замкнених опуклих конусів X_j^i, для яких $\nu(X_j^1) \leqslant 1$. Наслідок доведено.

Теорема 2. *Нехай $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ невироджена і система* (1) *на замкненому опуклому конусі зі скінченною множиною твірних $X \subseteq \mathbb{R}^N$ має стійке тривіальне положення рівноваги. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних X_j, $j = 1,\ldots,m$, такі, що $\bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j = X$ і на кожному X_j існує квадратична функція Ляпунова для системи* (1).

Доведення. Шляхом зведення до дійсної канонічної форми матрицю A подамо у вигляді

$$A = T^{-1}(A_1 \oplus A_2)T,$$

де $A_1 \in \mathbb{R}^{N_1\times N_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{N_2\times N_2}$, $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — невироджені матриці, A_1 і $-A_2$ — гурвіцеві матриці.

Тому без обмеження загальності можна вважати, що $A = A_1 \oplus A_2$. За теоремою Ляпунова існує додатно визначена квадратична форма

$$V(x_1) = x_1^T H^1 x_1, \qquad H^1 \in \mathbb{R}^{N_1\times N_1},$$

яка є функцією Ляпунова для системи

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1$$

на $\mathbb{R}^{N_1}$.

Позначимо через Pr_2 проектування на підпростір $\langle e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}\rangle$ простору $\mathbb{R}^N$. Тоді $\mathrm{Pr}_2 X$ є замкнений опуклий конус у $\mathbb{R}^{N_2}$, на якому система $\dot{x}_2 = A_2 x_2$ має стійке тривіальне положення рівноваги. За наслідком з леми 4, лемами 3 та 2, існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних $X_1^2, \ldots, X_m^2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$ такі, що $\bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j^2 = \mathrm{Pr}_2 X$ і на кожному з них існує функція Ляпунова $V_j(x_2) = x_2^T H_j^2 x_2$ для системи

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2.$$

Покладемо замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних таким чином:

$$X_j = X \bigcap (\mathbb{R}^N \times X_j^2), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad \bigcup_{j=1}^{m} X_j = X.$$

Перевіримо, що для кожного j квадратична форма

$$V_j(x) = x^T H_j x^T, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

де $H_j = H^1 \oplus H_j^2$, буде функцією Ляпунова для системи $\dot{x} = Ax$ на відповідному замкненому опуклому конусі зі скінченною множиною твірних X_j.

1. Якщо $x = (x_1, x_2) \in X_j \setminus \{0\}$, то $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2) > 0$, оскільки $x_2 \in \mathrm{Pr}_2 X$.

2. Якщо в деякий момент t траєкторія $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X_j$, то $\dot{V}(x(t)) = \dot{V}_1(x_1(t)) + \dot{V}_2(x_2(t)) \leqslant 0$, причому строго менше нуля, якщо $N_1 > 0$.

Теорему доведено.

Таким чином, лема 2, теорема 1 та наслідки з неї за певних умов гарантують існування квадратичної функції Ляпунова для локально стійкого стану. Проте можна побудувати приклад локально стійкого стану (з інваріантною множиною у вигляді замкнених опуклих конусів), для якого квадратичної функції Ляпунова не існує. Незважаючи на це, теорема 2 показує, що при достатньо загальних умовах локально стійкий стан гібридного автомата можна розщепити на скінченну множину станів, на кожному з яких існує квадратична функція Ляпунова.

1. *Branicky M.* Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – **43**, No 4. – P. 475–482.
2. *Johansson M., Rantzer A.* Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems // Ibid. – P. 555–559.

3. *Бычков А. С., Меркурьев М. Г.* Достаточные условия устойчивости стационарного состояния линейных гибридных автоматов // Управляющие системы и машины. – 2007. – № 2. – С. 18–23.
4. *Liberzon D., Hespanha J. P., Morse A. S.* Stability of switched systems: A Lie-algebraic condition // Systems Control Lett. – 1999. – No 37. – P. 117–122.
5. *Unsolved* problems in mathematical systems and control theory / Ed. by V. D. Blondel, A. Megretski. – Princeton: Princeton University Press, 2004. – 334 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.10.2008

O. S. Bychkov

On the existence criterion of copositive solutions of the Lyapunov equation

Linear hybrid automats which are defined on a cone are described. To study the solution stability, it is accepted to use the method of Lyapunov functions which requires the construction of matrices with certain properties. The necessary and sufficient conditions of existence of a matrix H positive on a cone such that the matrix $A^T H + HA$ is negative are obtained.