УДК 537.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про повну систему рівнянь електропружності

Запропоновано нову узагальнену систему рівнянь електропружності, в якій враховується повна система рівнянь Максвелла.

В теорії електропружності загальноприйнятим є використання системи рівнянь коливань деформацій твердого тіла та квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для електричного поля разом з матеріальними залежностями для п'єзоелектричних матеріалів. В зв'язку з цим в теоретичних дослідженнях виникають питання щодо оцінки такого наближення і розширення теорії до меж застосування повної системи рівнянь Максвелла. Цим питанням присвячена дана робота, в якій, на відміну від запропонованого раніше наближеного варіанта [2], формулюється вільна від прийнятих в [2] припущень повна система рівнянь електропружності.

Загальноприйнята система рівнянь електропружності складається [2–4 та ін.] з механічних рівнянь коливань суцільного середовища

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{k3}}{\partial x_3}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

і квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для речовини відносно компонент електричного поля

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Для поляризованої вздовж осі ox_3 п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) і п'єзоелектриків гексагональної системи класу 6mm з віссю симетрії шостого порядку ox_3 рівняння (1), (2) замикаються матеріальними залежностями ($2c_{66} = c_{11} - c_{12}$)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{13}E_3,\\
&\sigma_{22} = c_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{13}E_3,\\
&\sigma_{33} = c_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{31}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{33}E_3,\\
&\sigma_{23} = c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) - e_{51}E_2, D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + e_{15}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),\\
&\sigma_{31} = c_{44}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) - e_{51}E_1, D_2 = \varepsilon_{11}E_2 + e_{15}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
&\sigma_{12} = c_{66}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \qquad D_3 = \varepsilon_{33}E_3 + e_{31}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{3}$$

в яких враховані формули Коші для деформацій

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 2K_{ik}. \tag{4}$$

Застосування в теорії квазістатичного наближення (2) і нехтування магнітним полем якоюсь мірою звужує межі застосування моделі (1)–(4). Для виявлення ефектів, які не охоплюються рівняннями (1)–(4), визначення меж їх застосування потрібно звернутися до повної системи рівнянь Максвелла. В такому разі можливі різні варіанти формулювання зв'язаної задачі. Один з них, близький за своєю ідеологією до рівнянь (1)–(4), пропонується нижче.

З цією метою доповнимо систему рівнянь (1), (3), (4) не квазістатичним наближенням (2), а повною системою рівнянь Максвелла, які запишемо у вигляді двох пар рівнянь [1, 3, 4]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho. \tag{6}$$

Другі рівняння цих пар є наслідком перших рівнянь, враховуючи умову неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0. \tag{7}$$

Використовуючи матеріальну залежність

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{8}$$

з перших двох рівнянь (5) і (6) при $\mathbf{i} = 0$, а значить і $\rho = 0$, одержимо

$$\mu\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{9}$$

Користуючись тотожністю $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$, де Δ — оператор Лапласа, перетворимо співвідношення (9) до вигляду

$$\mu\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \Delta\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}. \tag{10}$$

Для подальших перетворень матеріальним залежностям (3) надамо вигляду ($2c_{66}^D = c_{11}^D - c_{12}^D$)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}^D\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}^D\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^D\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - h_{13}D_3,\\
&\sigma_{22} = c_{12}^D\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}^D\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{13}^D\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - h_{13}D_3,\\
&\sigma_{33} = c_{13}^D\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13}^D\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{33}^D\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - h_{33}D_3,\\
&\sigma_{23} = c_{44}^D\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) - h_{15}D_2, \qquad E_1 = \beta_{11}^S D_1 - h_{15}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\sigma_{31} = c_{44}^D\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - h_{15}D_1, \qquad E_2 = \beta_{11}^S D_2 - h_{15}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),$$

$$\sigma_{12} = c_{66}^D\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad E_3 = \beta_{33}^S D_3 - h_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - h_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - h_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

У формулах (11) модулі пружності при сталій електричній індукції c_{ij}^D, обернені діелектричні проникності при сталій деформації β_{ii}^S і п'єзоелектричні модулі h_{ij} пов'язані з модулями пружності при сталій електричній напруженості c_{ij}^E, діелектричними проникностями при сталих деформаціях ε_{ii}^S і п'єзоелектричними модулями e_{ij} відомими [3, 4] залежностями

$$c_{11}^D = c_{11}^E + \frac{e_{13}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad c_{12}^D = c_{12}^E + \frac{e_{13}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad c_{13}^D = c_{13}^E + \frac{e_{13}e_{33}}{\varepsilon_{33}^S},$$

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad c_{44}^D = c_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^S}, \qquad c_{66}^D = c_{66}^E, \tag{12}$$

$$\beta_{11}^S = \frac{1}{\varepsilon_{11}^S}, \qquad \beta_{33}^S = \frac{1}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad h_{13} = \frac{e_{13}}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad h_{33} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad h_{15} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^S}.$$

Таким чином, співвідношення (1), (10), (11) є загальною системою п'ятнадцяти рівнянь електропружності відносно п'ятнадцяти невідомих u_j, σ_{ij}, E_j, D_j.

Для визначення векторів магнітного поля треба скористатися залежностями

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}. \tag{13}$$

Якщо врахувати анізотропію магнітних властивостей і замість (8) скористатися матеріальними залежностями

$$B_1 = \mu_{11}H_1, \qquad B_2 = \mu_{11}H_2, \qquad B_3 = \mu_{33}H_3, \tag{14}$$

то замість (9) одержимо рівняння

$$\frac{\partial^2 D_1}{\partial t^2} = -\mu_{33}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right) + \mu_{11}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 D_2}{\partial t^2} = -\mu_{11}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) + \mu_{33}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 D_3}{\partial t^2} = -\mu_{11}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) + \mu_{11}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right).$$

Розглянемо систему п'ятнадцяти співвідношень (1), (11), (15) відносно невідомих u_1, u_2, u_3, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{12}, E_1, E_2, E_3, D_1, D_2, D_3.

Для визначення векторів магнітного поля слід скористатися залежностями

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \qquad H_1 = \mu_{11}^{-1}B_1, \qquad H_2 = \mu_{11}^{-1}B_2, \qquad H_3 = \mu_{33}^{-1}B_3. \tag{16}$$

Таким чином, якщо загальноприйнята система рівнянь електропружності (1)–(3) зводиться [2–4] до чотирьох рівнянь типу Ламе

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi), \qquad 0 = L_4(u_1, u_2, u_3, \varphi), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{17}$$

відносно компонент вектора механічних переміщень $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ і електричного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$, який вводиться градієнтним розв'язком $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ другого з рівнянь (2), то в запропонованому варіанті подібними перетвореннями повна система рівнянь електропружності (1), (11), (15) зводиться до шести рівнянь відносно трьох компонент вектора механічних переміщень $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ і трьох компонент вектора електричної індукції $D_k(x_1, x_2, x_3, t)$.

1. *Кузъмичев В. Е.* Законы и формулы физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 864 с.
2. *Шульга М. О.* Про структуру рівнянь електропружності // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 81–85.
3. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезокерамических тел. – Київ: Наук. думка, 1990. – 228 с.
4. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2007. – 186 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.06.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga**

On the complete system of electroelasticity equations

A new generalized system of electroelasticity equations taking the complete system of Maxwell equations into account is proposed.