

Л. С. Рожок

Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Досліджується вплив локального навантаження на напружений стан еліптичних порожнистих циліндрів з гофрами в поперечному перерізі на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Наводиться розподіл полів переміщень та напружень.

У роботах [1, 2] розглянуто задачу про напружений стан ізотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі. Вплив локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів розглянуто в роботах [3, 4]. Нижче досліджується напружений стан порожнистих еліптичних гофрованих циліндрів, що знаходяться під дією локального навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні в околі гофрів циліндрів при певних граничних умовах на торцях у просторовій постановці.

Циліндри розглядаються в ортогональній криволінійній системі координат s, ψ, γ : s — довжина дуги вздовж твірної циліндра; ψ — полярний кут в поперечному перерізі; γ — нормальна координата вздовж товщини.

Напрямна поверхні відліку в площині поперечного перерізу задається в полярній системі координат

$$\rho(\psi) = \frac{a}{1 - e^2 \cos^2 \psi} + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \quad e = \sqrt{1 - 2\frac{a}{b}} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta}. \quad (1)$$

Тут ρ — полярний радіус; e — ексцентриситет еліпса; Δ — степінь еліптичності; a і b — півосі еліпса ($b > a$); α — амплітуда; m — частота гофрування.

Параметр Ламе $A_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma)\omega(\psi)$, тут

$$H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)},$$

$$\omega(\psi) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2}, \quad R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''} - \text{радіус кривизни.}$$

За вихідні приймаємо основні рівняння просторової теорії пружності для ізотропного тіла [5]. На торцях циліндра мають місце умови простого опирання

$$\sigma_s = 0, \quad u_\psi = 0, \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (2)$$

На бічних поверхнях граничні умови мають вигляд

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \quad (3)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \quad (4)$$

За розв'язувальні функції обираємо три компоненти напруження σ_γ , $\tau_{s\gamma}$, $\tau_{\psi\gamma}$ і три компоненти переміщення u_γ , u_s , u_ψ . Після деяких перетворень з основних рівнянь можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Граничні умови (3) дозволяють відокремити змінні вздовж твірної циліндра. Для відокремлення змінних вздовж напрямної циліндра застосовуємо метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та метод відокремлення змінних вздовж напрямної циліндра [6], в результаті чого приходимо до одновимірної крайової задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5); \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \\ &\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \\ &\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \\ \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k} + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (5)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\ \sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Отриману одновимірну крайову задачу (5), (6) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [7]. При інтегруванні на кожному кроці застосування чисельного методу невідомі амплітудні значення доповнювальних функцій будемо обчислювати за допомогою дискретних рядів Фур'є [8].

Розглядатимемо гофровані циліндри, частота та амплітуда гофрування яких дорівнюють відповідно $m = 4$; $\alpha = 4$. Прикладене в околі всіх чотирьох гофрів локальне навантаження подамо у вигляді ряду Фур'є (рис. 1, а)

$$q_\gamma(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[\sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right].$$

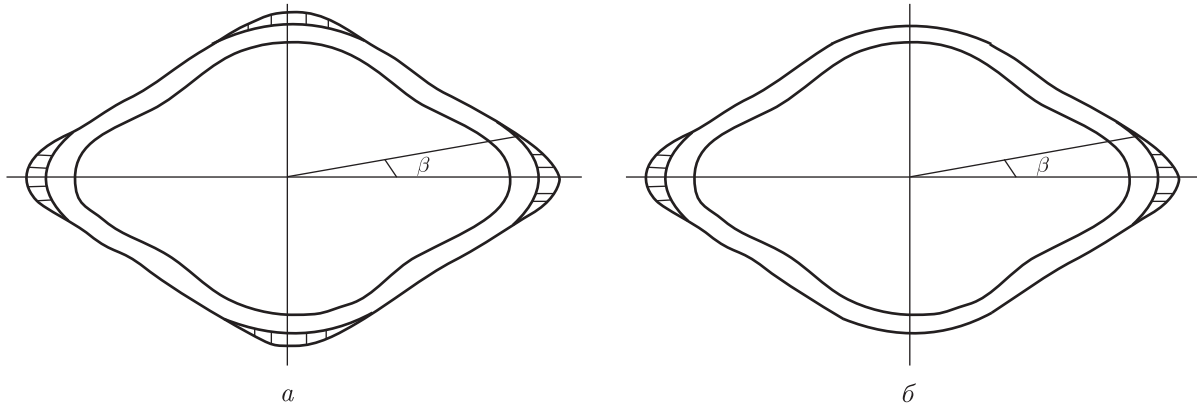


Рис. 1

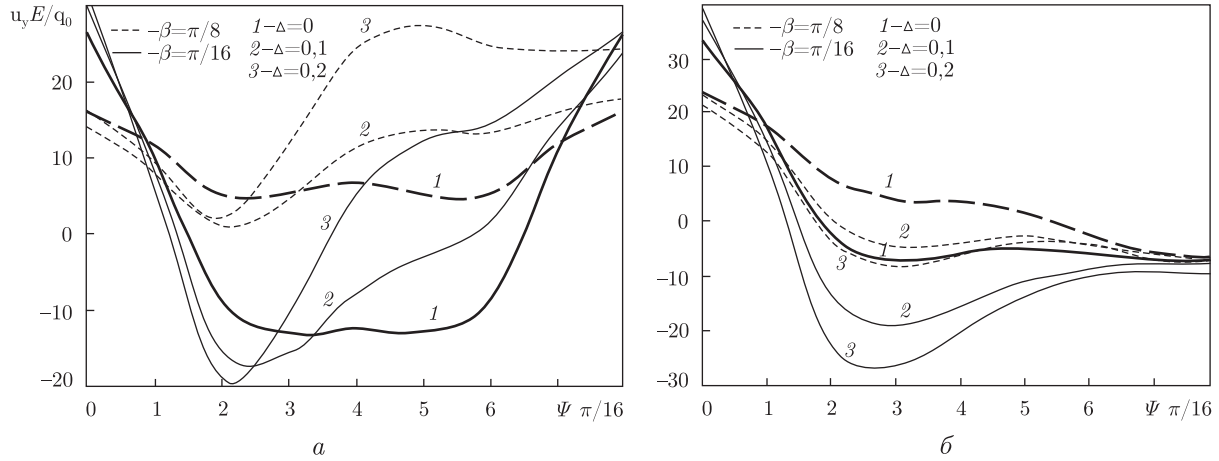


Рис. 2

Прикладене в околі гофрів більшої напівосі еліпса локальне навантаження подамо у вигляді ряду Фур'є (рис. 1, б)

$$q_{\gamma}(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[\sin \beta - \beta \cos \beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos \beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right].$$

Тут β — інтервал прикладення локального навантаження. Значення параметра q_0 обираємо таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим і дорівнювало навантаженню при $\beta = \pi/8$.

Задачу розв'язано за таких умов: $l = 40$; $\beta = \pi/8$; $\pi/16$, товщина циліндра $H = 4$; $\nu = 0,3$; $\Delta = 0$; $0,1$; $0,2$.

На рис. 2–4 наведено результати розв'язку задачі в середньому перерізі по довжині циліндра для $s = 0,5l$ на зовнішній поверхні для двох варіантів прикладення навантаження: в околі всіх чотирьох гофрів циліндра (рис. 2, а — 4, а) та в околі гофрів більшої напівосі еліпса (рис. 2, б — 4, б). Суцільною лінією показано криві для значення $\beta = \pi/16$, штриховою — для $\beta = \pi/8$.

Рис. 2 ілюструє розподіл переміщень u_{γ} вздовж напрямної залежно від інтервалу прикладення локального навантаження β для циліндрів з різним значенням степеня еліптично-

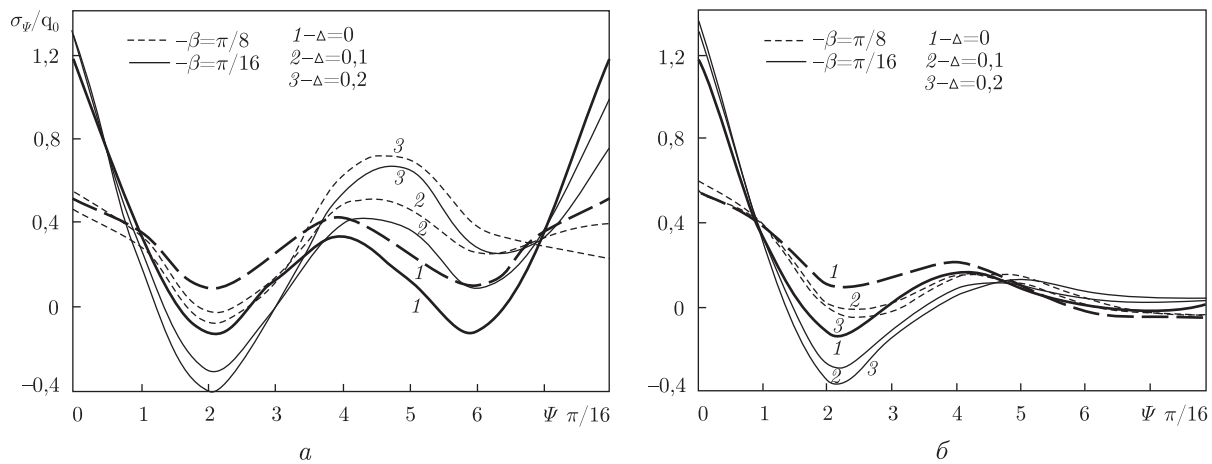


Рис. 3

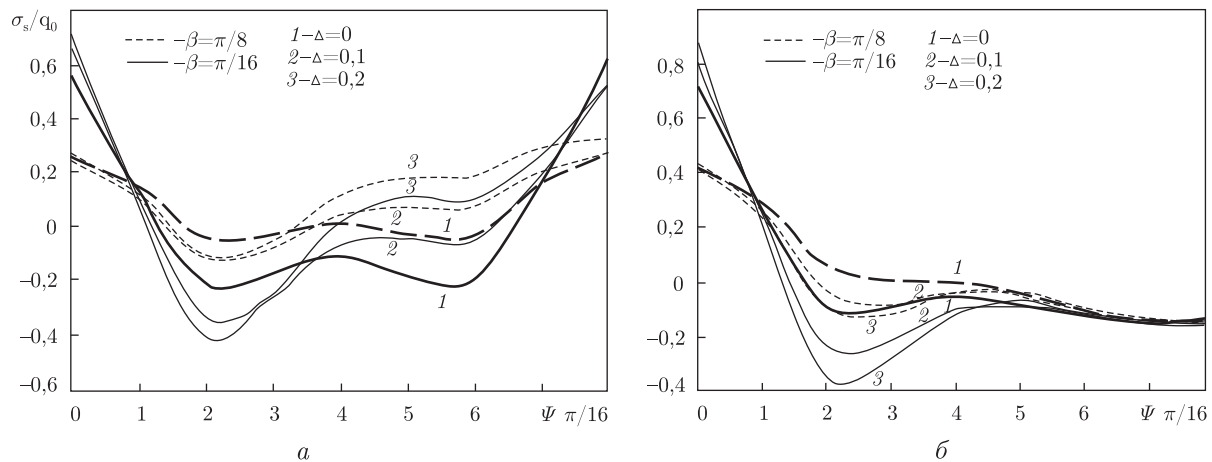


Рис. 4

сті Δ , рис. 3 — розподіл напружень σ_ψ вздовж напрямної залежно від інтервалу прикладення локального навантаження β для циліндрів з різним значенням степеня еліптичності Δ .

На рис. 4 наведено розподіл напружень σ_s вздовж напрямної залежно від інтервалу прикладення локального навантаження β для циліндрів з різним значенням степеня еліптичності Δ .

З рис. 2, $a - 4$, a видно, що відхилення форми поперечного перерізу від кругової гофрованої призводить до порушення симетрії в розподілі полів переміщень та напружень відносно перерізу $\psi = \pi/4$.

Вплив еліптичності на розподіл переміщень (рис. 2, a) при першому варіанті прикладення навантаження більше відчувається на інтервалі $\pi/4 \leq \psi \leq 3\pi/4$. Так, якщо при $\Delta = 0,1$ значення переміщень зменшуються в 1,5–4 рази, то при $\Delta = 0,2$ — приблизно в 1,5–2,5 рази, при цьому змінюють знак на протилежний при $\beta = \pi/16$. При $\beta = \pi/8$ переміщення збільшуються приблизно в 1,5 разів для $\Delta = 0,1$ та в 4 рази — для $\Delta = 0,2$. При другому способі прикладення навантаження максимальний перерозподіл переміщень відбувається в перерізі $\pi/8 \leq \psi \leq \pi/4$. Тут відхилення форми поперечного перерізу від кругової гофрованої призводить до збільшення величини переміщень приблизно від 0,9 разів для $\Delta = 0,1$

до 2,4 рази для $\Delta = 0,2$ при $\beta = \pi/16$. Для $\beta = \pi/8$ величина переміщень збільшується в 0,5–1,4 рази, при цьому вони змінюють знак на протилежний.

Як впливає спосіб прикладення навантаження та степінь еліптичності циліндрів на розподіл напружень σ_ψ та σ_s показано на графіках рис. 3, 4.

Таким чином, запропоновану методику можна застосовувати при дослідженні напруженого стану некругових порожнистих циліндрів із складною формою поперечного перерізу у вигляді гофрованих еліпсів, що знаходяться під дією локального навантаження.

1. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 67–73.
2. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние // Там же. № 9. – С. 87–93.
3. Рожок Л. С. Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 56–59.
4. Рожок Л. С. Шаруваті порожнисті циліндри з гофрама в поперечному перерізі при дії локального навантаження // Там само. – 2007. – № 12. – С. 70–75.
5. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
6. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 78–100.
7. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, вып. 3. – С. 171–174.
8. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – Москва: Наука, 1949. – 783 с.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 02.06.2008

L. S. Rozhok

Equilibrium of hollow cylinders with corrugated elliptic cross-section under a local load

The influence of a local loading on the stressed state of hollow cylinders with corrugated elliptic cross-section is investigated on the basis of the approximation of functions by discrete Fourier series. Distributions of the displacements and stresses fields are presented.